ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIČKE ANALIZE

- PRVI DEO -

UVOD U ANALIZU, IZVOD, INTEGRAL



NAŠA KNJIGA D.O.O.
Beograd, 2007.

I. I. Ljaško, A. K. Boljarčuk, J. G. G. Gaj, G. P. Golovač

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIČKE ANALIZE

- PRVI DEO -

Preveo sa ruskog i kompjuterski obradio:
Dr Stojan N. Radenović, redovni profesor Mašinskog fakulteta
Univerziteta u Beogradu

Izdavač:



NAŠA KNJIGA D.O.O., Beograd
direktor: Opačić Bogdan, prof.
063/340611

Štampa:
MEGRAF, Beograd

Tiraž:
300 primeraka

Beograd, 2007.

Štampanje ovog rukopisa preporučeno je na sednici Katedre za matematiku Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, dana 11.04.2002. godine

Predgovor

Uvod u analizu, izvod i integral su sadržaj knjige pod nazivom: zbirka zadataka iz matematičke analize (I deo,1976,na ruskom jeziku). Redovi, vektorske i realne funkcije više realnih promenljivih, višestruki i krivolinijski integrali, obradjeni su u knjizi pod nazivom: zbirka zadataka iz matematičke analize (II deo,1978,na ruskom jeziku). U njima su I.I.Ljaško, A.K.Borjačuk, A.G.Gaj i G.P.Golovač dali rešenja većine matematičkih problema iz analiza I i II koji su kao nerešeni navedeni u poznatom zborniku od B. P. Demidoviča.

S obzirom da se iz navedenih zbirki zadataka, mogu dobiti najopsežnije informacije iz oblasti matematičkih analiza I i II, odlučio sam se na prevodjenje ovih knjiga, sa ciljem da učinim dostupnim rešenja velikog broja zadataka iz matematičke analize studentima naših fakulteta. Smatrao sam da će se objavljivanjem ovih zbirki obogatiti matematička literatura ne samo za studente matematike, fizike i ostalih prirodnih i tehničkih nauka, nego i za učenike elitnih srednjih škola i gimnazija, asistente, buduće naučne radnike, inženjere raznih profila, i ostale.

Za prvo izdanje na srpskom jeziku, izvršio sam detaljnu proveru rešenja svih navedenih primera, popravio ne mali broj štamparskih grešaka i u nekim slučajevima intervenisao svojom primedbom ne menjajući originalno rešenje.

Tekst sam kompjuterski obradio koristeći "Scientific Word-Latex-2e" firme "TCI Software" iz Novog Meksika.

Za razliku od originala u izdanju na srpskom jeziku rezultati zadataka za samostalni rad navedeni su na kraju odgovarajuće glave.

Očekujem od budućih korisnika ovih knjiga da mi ukažu na sve propuste koje uoče, a kojih verovatno ima.

Januar, 2007

Beograd

Redaktor i prevodilac Stojan Radenović,radens@beotel.yu

Sadržaj

Glava 1

Uvod u analizu

1.1 Realni brojevi

1^0 **Skupovi.** Matematički se pojam skupa elemenata shvata intuitivno.[1] Zapis $x \in E$ označava:" x je element skupa E " a zapis $x \notin E$ označava da "x nije element skupa E ". Ako je svaki element iz F element iz E, onda se to zapisuje $F \subset E$ ili $E \supset F$.

2^0 **Metod matematičke indukcije.** Pretpostavimo da je utvrđeno sledeće: **1)** Tvrđenje T koje zavisi od prirodne promenljive, pretpostavljajući da je tačno za bilo koji prirodan broj a, tačno je i za broj $a+1$; **2)** Postoji bar jedan prirodan broj b, za koji je tvrđenje T tačno.Tada je tvrđenje T tačno za proizvoljan prirodan broj veći ili jednak b.

3^0 **Sečenje.** Skup A racionalnih brojeva naziva se sečenjem ako: **1)** Skupu A pripada bar jedan racionalan broj, ali ne svaki racionalan broj; **2)** Za $p \in A$ i $q < p$ ($q \in \mathbb{Q}$) imamo $q \in A$; **3)** Skup A nema najveći broj. Iz definicije sečenja sledi, da ako $p \in A$ i $q \notin A$, to je $p < q$. Elementi skupa A zovu se donjim brojevima sečenja A a racionalni brojevi koji ne pripadaju skupu A zovu se gornjim brojevima sečenja A. Skup svih gornjih brojeva sečenja A označava se sa A'. Ako u skupu A' postoji najmanji broj r, to se sečenje A zove racionalnim i kaže da ono definiše racionalan broj r. Ako u skupu A' nema najmanjeg broja, to se kaže da sečenje A definiše iracionalan broj. Skup svih racionalnih i iracionalnih brojeva naziva se skupom realnih brojeva.

4^0 **Apsolutna vrednost.** Ako je x realan broj, to se apsolutnom vred-

[1] tj. neposredno se uviđa i opaža, bez posredstva razmišljanja.

nošću $|x|$ naziva nenegativan broj, definisan sledećim uslovima:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Za proizvoljne realne brojeve x i y važe nejednakosti:

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

5^0 Supremum i infimum skupa. Neka je $X = \{x\}$ ograničen skup realnih brojeva. Broj $m = \inf\{x\}$ naziva se infimumom skupa X, ako je: **1)** svako $x \in X$ zadovoljava nejednakost $x \geq m$; **2)** za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji takvo $x' \in X$, da je $x' < m + \varepsilon$. Slično, broj $M = \sup\{x\}$ se naziva supremumom skupa X, ako je: **1)** svako $x \in X$ zadovoljava nejednakost $x \leq M$; **2)** za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $x'' \in X$, tako da je $x'' > M - \varepsilon$. Ako skup nije ograničen odozgo (odozdo) to uslovno kažemo, da je njegov supremum (infimum) $+\infty$ ($-\infty$): $\sup\{x\} = +\infty$ ($\inf\{x\} = -\infty$).

6^0 Kvantori. U matematičkim teoremama se često koriste izrazi " Za svako..." i "Postoji ...tako da..." Njih redom označavamo sa $\forall$ i $\exists$ i zovemo kvantorima ili kvantifikatorima.

7^0 Rešeni zadaci.

1. Naći sumu:

$$S_n = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8} + \cdots + \arctan\frac{1}{2n^2}$$

◀ Primenimo metod matematičke indukcije. Pošto je:

$$S_1 = \arctan\frac{1}{2}, \quad S_2 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8} = \arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \arctan\frac{2}{3},$$

$$S_3 = \arctan\frac{2}{3} + \arctan\frac{1}{18} = \arctan\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \arctan\frac{3}{4},$$

to možemo pretpostaviti da je

$$S_n = \arctan\frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Kako je

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \arctan\frac{n}{n+1} + \arctan\frac{1}{2(n+1)^2} \\ &= \arctan\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}}{1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}} = \arctan\frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

i jednakost (1) je tačna za 1, to je saglasno indukciji ona tačna za sve prirodne brojeve n. ▶

2. Primenjujući metod matematičke indukcije, dokazati da za proizvoljan prirodan broj n važe sledeće jednakosti:

a)

$$A_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

b) 

$$B_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

◀ a) Jednakost je tačna za 1. Pretpostavimo tačnost jednakosti za n, i pokažimo njenu tačnost za $n+1$. Zaista,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = A_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

b) Tačnost jednakosti za 1 je očigledna. Iz pretpostavke njene tačnosti za n sledi

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = B_n + (n+1)^3 \\ &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 \\ &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}.(n+1) + (n+1)^2. \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir jednakost

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

dobijamo

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + n + (n+1))^2,$$

tj. tvrđenje je tačno i za $n+1$. ▶

3. Dokazati Njutnovu binomnu formulu:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_m^n a^{n-m} b^m,$$

gde je $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (broj kombinacija od n elemenata klase m) , $k! = k(k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, gde je $0! = 1$.

◀ Za 1 imamo: [2]

$$(a+b)^1 = \sum_{m=0}^{1} C_m^1 a^{1-m} b^m = \frac{1!}{0!1!} a + \frac{1!}{1!0!} b = a + b.$$

Ostaje da se pokaže da iz pretpostavke tačnosti tvrdjenja za n sleduje, da je:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_m^{n+1} a^{n+1-m} b^m.$$

Stvarno,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{m=0}^{n} C_m^n a^{n-m} b^m \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_m^n a^{n+1-m} b^m + \sum_{m=0}^{n} C_m^n a^{n-m} b^{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_m^n a^{n+1-m} b^m + \sum_{m=1}^{n+1} C_{m-1}^n a^{n+1-m} b^m \\
&= a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \left(C_m^n + C_{m-1}^n\right) a^{n+1-m} b^m + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Koristeći relacije

$$\begin{aligned}
C_m^n + C_{m-1}^n &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n+1-m)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \\
&= C_m^{n+1};\ C_0^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

konačno imamo

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} C_m^{n+1} a^{n+1-m} b^m + b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_m^{n+1} a^{n+1-m} b^m. \ ▶$$

4. Dokazati Bernulijevu nejednakost:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

gde su $x_1, x_2, ..., x_n$ brojevi istoga znaka veći od -1.

[2] Prim. prevodioca: U svim zadacima iz indukcije pisaćemo: ...za 1; ako je tačno za n, proverićemo tačnost za $n+1$; ne kao u originalu:...za $n=1$;...$n=k$, ...$n=k+1$.

◀ Za 1 i 2 nejednakost je očigledna. Neka je nejednakost tačna za n. Pokažimo njenu tačnost za $n+1$. Imamo (za $x_i > -1$)

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)(1+x_{n+1}) \\ \geq & (1+x_1+\cdots+x_n)(1+x_{n+1}) \\ = & 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1} \\ \geq & 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1} \end{aligned}$$

Ovde je korišćena nejednakost

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1} \geq 0,$$

koja je tačna za proizvoljne x_i istog znaka. ▶

5. Dokazati, da ako je $x > -1$, to je:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ (n \in \mathbb{N}),$$

gde znak jednakosti važi samo za $x = 0$.

◀ Navedena nejednakost neposredno proizilazi iz nejednakosti primera 4 za $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. ▶

6. Dokazati nejednakosti:

a) $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ gde je $x_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$ (aritmetička sredina nenegativnih brojeva nije manja od njihove geometrijske sredine).

b) $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$, gde je $x_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$ (geometrijska sredina pozitivnih brojeva nije manja od harmonijske sredine tih brojeva).

c) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$, gde su x_i, y_i $(i = \overline{1,n})$ proizvoljni realni brojevi (nejednakost Koši-Bunjakovskog). U kojim slučajevima u navedenim nejednakostima važi znak jednakosti?

◀ a) Za 2 je

$$\frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2}{2} \geq 0.$$

Pretpostavimo da je nejednakost a) tačna. Tada je

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+x_{n+1}}{n+1} \geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}+x_{n+1}}{n+1}.$$

Stavljajući $x_1x_2...x_n = a^{n(n+1)}$, $x_{n+1} = b^{n+1}$ i koristeći poslednju nejednakost dobijamo:

$$\begin{aligned}
& \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{x_1x_2...x_nx_{n+1}} \\
\geq & \frac{n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}+x_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{x_1x_2...x_nx_{n+1}} \\
= & \frac{na^{n+1}+b^{n+1}}{n+1} - a^nb = \frac{na^{n+1}+b^{n+1}-na^nb-a^nb}{n+1} \\
= & \frac{1}{n+1}\left(na^n(a-b)-b(a^n-b^n)\right) \\
= & \frac{a-b}{n+1}\left(na^n-ba^{n-1}-b^2a^{n-2}-\cdots-b^n\right) \\
= & \frac{a-b}{n+1}(a^n-ba^{n-1}+a^n-\cdots+a^n-b^n) \\
= & \frac{(a-b)^2}{n+1}\left(a^{n-1}+a^{n-2}(a+b)+\cdots+(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Na taj način nejednakost a) je dokazana. Znak jednakosti važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Stvarno, iz poslednje nejednakosti sledi, da je jednakost

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1} = \sqrt[n+1]{x_1x_2....x_nx_{n+1}},$$

moguća, ako i samo ako je $a = b$, tj. kada je $x_1x_2...x_n = x_{n+1}^n$. Slično možemo dobiti da je $x_1x_2...x_{n-1} = x_n^{n-1}$. Iz tih jednakosti sledi da je $x_n = x_{n+1}$.Tako su dokazane jednakosti $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

b) Neka je $x_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$. Tada primenjujući nejednakost a) na brojeve $\frac{1}{x_i}$ $(i = \overline{1,n})$, dobijamo relaciju:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n},$$

iz koje sleduje nejednakost b).

c) Iz očigledne nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n}(x_it+y_i)^2 \geq 0$$

dobijamo nenegativnost za sve vrednosti t kvadratnog trinoma

$$t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 \geq 0,$$

zato je

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq 0.$$

Znak jednakosti važi, tada i samo tada, kada je $x_i t + y_i = 0$ $(i = \overline{1,n})$ tj. kada postoji broj $\lambda \neq 0$, da je $y_i = \lambda x_i$ $(i = \overline{1,n})$, ili kada su svi x_i ili svi y_i jednaki nuli. ▶

7. Dokazati nejednakosti:

a) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 1$; b) $(n!)^2 < \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$, $n > 1$;

c) $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

◀ Nejednakosti **a)** i **b)** su posledice nejednakosti a) iz prethodnog zadatka za $x_k = k$ i $x_k = k^2$ $(k = \overline{1,n})$ respektivno. Nejednakost **c)** dokazaćemo indukcijom. Ona je očigledna za 1. Pretpostavimo njenu tačnost za n i pokažimo tačnost za $n+1$. Stvarno,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}\frac{2n+1}{2n+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}. \end{aligned}$$ ▶

8. Dokazati nejednakosti:

a) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, $(n \geq 2)$; b) $n^{n+1} > (n+1)^n$, $(n \geq 3)$;

c) $\left|\sin \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k$, $(0 \leq x_k \leq \pi;\ k = \overline{1,n})$;

d) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, $(n > 1)$.

◀ a) Za $n \geq 2$ imamo

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

b) Nejednakost je očigledna za 3. Pretpostavimo njenu tačnost za n i dokažimo tačnost za $n+1$, tj. dokažimo da je

$$(n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1},$$

$$\text{ako je } n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Množenjem obe strane poslednje nejednakosti sa $\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}$, imamo

$$(n+1)^{n+2} > \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}}.$$

Kako je

$$\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n}\right)^{n+1} > (n+2)^{n+1},$$

to je tvrđenje dokazano.

c) Nejednakost je tačna za 1. Dokažimo da je

$$\left|\sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k$$

smatrajući da je polazna nejednakost tačna. Stvarno, ako je $0 \le x_k \le \pi$, to je

$$\begin{aligned}
\left|\sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| &= \left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \cos x_{n+1} + \cos \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sin x_k\right| \\
&\le \left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \cdot |\cos x_{n+1}| + \left|\cos \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \cdot |\sin x_{n+1}| \\
&\le \left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| + \sin x_{n+1} \le \sin \sum_{k=1}^{n} x_k + \sin x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k.
\end{aligned}$$

d) Nejednakost je očigledna za 2. Polazeći od njene tačnosti za n pokažimo tačnost za $n+1$. Stvarno,

$$\begin{aligned}
(2n+2)! &= (2n)!(2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2) \\
&< 2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2 = 2^{2n+2}((n+1)!)^2. \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

9. Sečenje A kojim je definisan broj $\sqrt[3]{2}$ formiramo na sledeći način: Skup A donjih brojeva sečenja sadrži sve racionalne brojeve a takve da je $a^3 < 2$. Tada skup A' gornjih brojeva sečenja sadrži sve ostale racionalne brojeve. Dokazati da skup A nema najveći a skup A' nema najmanji element.

◀ Dokažimo prvo tvrđenje. Neka $a \in A$, tada je $a^3 < 2$. Pokažimo da možemo izabrati takav prirodan n, da $a + \frac{1}{n} \in A$, tj. $\left(a+\frac{1}{n}\right)^3 < 2$. Odatle sleduje da je

$$a^3 + \frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2,$$

$$\text{tj. } \frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - a^3.$$

Poslednja nejednakost je zadovoljena tim pre, ako je

$$\frac{3a^2+3a+1}{n} < 2-a^3,$$

odnosno, traženo n zadovoljava nejednakost

$$n > \frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}.$$

Slično se dokazuje i drugo tvrđenje. ►

10. Pokazati da skup svih pravilnih racionalnih razlomaka $\frac{m}{n}$ gde su m i n prirodni brojevi i $0 < m < n$ nema najmanji i najveći element. Naći infimum i supremum tog skupa.

◄ Neka su m i n $(0 < m < n)$ proizvoljni prirodni brojevi.Tada iz očiglednih nejednakosti

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} > \frac{2m-1}{2n} > 0, \quad \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} < \frac{2m+1}{2n} < 1$$

sleduje da skup svih pravilnih racionalnih razlomaka nema najmanji i najveći element. Pokažimo da je

$$\inf\left\{\frac{m}{n}\right\} = 0, \quad \sup\left\{\frac{m}{n}\right\} = 1.$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i prirodan broj m postoji takav prirodan broj $n > m$, tako da je $n > \frac{m}{\varepsilon}$. Tada je $\frac{m}{n} < \varepsilon$. Odavde i iz nejednakosti $\frac{m}{n} > 0$ sleduje, da je $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\} = 0$. Slično, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i prirodan broj p postoji takav prirodan m, da je $m > \frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$. Odavde je $\frac{m}{p+m} > 1-\varepsilon$, tj. za $n = p+m$, imamo $\frac{m}{n} > 1-\varepsilon$, a to sa nejednakošću $\frac{m}{n} < 1$ označava da je $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\} = 1$. ►

11. Neka je $\{-x\}$ skup brojeva suprotni brojevima $x \in \{x\}$.

Dokazati a) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; b) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

◄ a) Ako je skup $\{x\}$ ograničen odozgo, to je skup $\{-x\}$ ograničen odozdo, jer iz $x \le M$ sledi, da je $-x \ge -M$. Dakle, iz postojanja $\sup\{x\}$ proizilazi i postojanje $\inf\{-x\}$. Neka je $\sup\{x\} = M'$, tj. $x \le M'$ za proizvoljno $x \in \{x\}$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji takvo $x' \in \{x\}$ tako da je $M' - \varepsilon < x' \le M'$. Ali, tada je $-x \ge -M'$ i $-M' \le -x' < -M' + \varepsilon$, gde $-x' \in \{-x\}$, odakle sleduje, da je $\inf\{-x\} = -M' = -\sup\{x\}$.

b) Kao i u slučaju pod a) utvrdjuje se postojanje $\inf\{x\}$ i $\sup\{-x\}$. Neka je $\inf\{x\} = m'$, tj. $x \ge m'$ za proizvoljno $x \in \{x\}$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $x' \in \{x\}$, tako da je $m' \le x' < m' + \varepsilon$. Tada je $-x \le -m'$ i $-m' - \varepsilon < -x' \le -m', -x' \in \{-x\}$. Znači $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$. ►

12. Neka je $\{x+y\}$ skup svih suma $x+y$, gde $x \in \{x\}$ i $y \in \{y\}$. Dokazati jednakosti:

a) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$; b) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

◀ a) Pošto iz

$$x \geq m, \; x \in \{x\} \text{ i } y \geq m_1, \; y \in \{y\}$$

proističe, da je

$$x+y \geq m+m_1, \; x+y \in \{x+y\},$$

to iz postojanja

$$\inf\{x\} = m' \text{ i } \inf\{y\} = m_1'$$

sleduje postojanje $\inf\{x+y\}$. Jasno, da je

$$x+y \geq m' + m_1'.$$

Dalje, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji takav element

$$x' + y' \in \{x+y\},$$

da je

$$m' + m_1' \leq x' + y' < m' + m_1' + \varepsilon,$$

jer postoje takvi

$$x' \in \{x\} \text{ i } y' \in \{y\}, \text{ da je } m' \leq x' < m' + \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } m_1' \leq y' < m_1' + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sleduje,

$$\inf\{x+y\} = m' + m_1' = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

Jednakost b) se dokazuje slično. ▶

13. Neka je $\{x \cdot y\}$ skup svih proizvoda $x \cdot y$, gde $x \in \{x\}$ i $y \in \{y\}$, pri čemu je $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Dokazati jednakosti:

a) $\inf\{x \cdot y\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$; b) $\sup\{x \cdot y\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

◀ Dokažimo jednakost b) Kako iz

$$x \leq M, \; x \in \{x\} \text{ i } y \leq M, \; y \in \{y\}, \; x \geq 0, \; y \geq 0$$

sleduje, da je

$$x \cdot y \leq M \cdot M_1,$$

to iz postojanja

$$\sup\{x\} = M \text{ i } \sup\{y\} = M_1$$

proizilazi postojanje $\sup\{x\cdot y\}$. Iz nejednakosti

$$M-\varepsilon_1 < x \le M,\ M_1-\varepsilon_2 < y \le M_1$$

sleduje, da je

$$M\cdot M_1-(\varepsilon_1 M_1+\varepsilon_2 M-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2) < x\cdot y \le M\cdot M_1.$$

Kako veličina

$$\varepsilon_1 M_1+\varepsilon_2 M-\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

može biti proizvoljno mala, to je

$$\sup\{x\cdot y\}=M\cdot M_1=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}.$$

Jednakost a) dokazuje se slično. ▶

14. Dokazati nejednakosti:

a) $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$; b) $|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|\ge|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

◀ Nejednakost a) ekvivalentna je sistemu nejednakosti:

$$-|x-y|\le|x|-|y|\le|x-y|.$$

Očigledno je

$$|x+y|\ge|x|-|y|\ \text{ i }\ |-y|=|y|.$$

Zamenjujući y sa $-y$, dobijamo

$$|x-y|\ge|x|-|-y|=|x|-|y|.$$

Dalje je

$$|x-y|=|y-x|\ge|y|-|x|,$$

odakle je

$$-|x-y|\le|x|-|y|,$$

tj. nejednakost a) je dokazana. Nejednakost b) se dokazuje slično. ▶

15. Neka je $X=\left\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\right\}$ $(n\in\mathbb{N})$. Dokazati da je

$$\inf X=0,\ \sup X=1.$$

◀ Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno. Tada iz nejednakosti

$$0<\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}<\varepsilon, 1-\varepsilon<\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}<1,$$

koje su tačne za sve $n>\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$, proizilazi da je

$$\inf X=0,\ \sup X=1.\ ▶$$

1.2 Teorija nizova

1^0 **Beskonačno veliki i beskonačno mali nizovi.** Niz $\{x_n\}$ se naziva beskonačno velikim, ako se za proizvoljno $E > 0$ može naći takav broj $N = N(E)$ da za $n > N$ svi elementi x_n niza zadovoljavaju nejednakost $|x_n| > E$. Niz $\{\alpha_n\}$ naziva se beskonačno malim, ako se za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može naći takav broj $N = N(\varepsilon)$, da za sve $n > N$ elementi α_n zadovoljavaju nejednakost $|\alpha_n| < \varepsilon$.

2^0 **Granična vrednost niza.** Niz $\{x_n\}$ se zove konvergentnim, ako postoji takav broj a da je niz $\{x_n - a\}$ beskonačno mali, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $N = N(\varepsilon)$ takvo da za sve $n > N$ elementi x_n zadovoljavaju nejednakost $|x_n - a| < \varepsilon$. Pritom se broj a zove granična[3] vrednost niza $\{x_n\}$ i simbolično zapisuje: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ili $x_n \to a$ kad $n \to \infty$.

3^0 **Kriterijumi postojanja granične vrednosti.**

1. Ako je $y_n \leq x_n \leq z_n$, za svako $n > n_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. Monoton i ograničen niz ima graničnu vrednost.

3. Košijev kriterijum. Da bi niz $\{x_n\}$ imao konačnu graničnu vrednost, potrebno je i dovoljno , da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $N = N(\varepsilon)$ tako da je $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, za sve $n > N$ i za svako $p \in \mathbb{N}$.

4^0 **Granični prelaz u jednakostima i nejednakostima.** Neka nizovi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ konvergiraju. Tada:

1) ako je $x_n \leq y_n$ to je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

5^0 **Broj** e. Niz $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ima konačnu graničnu vrednost, koja se naziva brojem e :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828182845904523536028747135266....$$

6^0 **Beskonačna granična vrednost.** Simbolički zapis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, znači da za bilo koji broj $E > 0$, postoji takav broj $N = N(E)$, da je $|x_n| > E$ za sve $n > N$.

7^0 **Tačke nagomilavanja niza.** Tačka a beskonačne prave naziva se

[3] Prim. prevodioca: ne zahteva se da brojevi $N(E)$ i $N(\varepsilon)$ budu obavezno prirodni.

tačkom nagomilavanja niza $\{x_n\}$ ili njegovom delimičnom graničnom vrednošću, ako se iz tog niza može izdvojiti podniz koji konvergira ka a. Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja. Najveća tačka nagomilavanja $\overline{x}$ ograničenog niza $\{x_n\}$ zove se gornja granična vrednost tog niza

$$\overline{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n,$$

a najmanja njegova tačka nagomilavanja $\underline{x}$ se zove donja granična vrednost

$$\underline{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Da bi niz $\{x_n\}$ bio konvergentan, potrebno je i dovoljno da je on ograničen i da su donja i gornja granična vrednost $\underline{x}$ i $\overline{x}$ jednake. Ako niz nije ograničen odozgo (odozdo), onda se pod najvećom (najmanjom) tačkom nagomilavanja uzima simbol $+\infty$ $(-\infty)$.

8^0 Rešeni zadaci.

16. Neka je

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

određujući za svako $\varepsilon > 0$ takav broj $N = N(\varepsilon)$, da bude

$$|x_n - 1| < \varepsilon,$$

ako je $n > N(\varepsilon)$. Popuniti tablicu:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
N	?	?	?	?

◀ Po definiciji granične vrednosti, za svaki unapred zadat $\varepsilon > 0$ imamo

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

za $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$. Sada popunjena tablica je:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
N	9	99	999	9999

▶

17. Dokazati da je x_n $(n \in \mathbb{N})$ beskonačno mali niz (tj. ima za graničnu

vrednost 0), nalazeći za svako $\varepsilon > 0$ takav broj $N = N(\varepsilon)$ da bude $|x_n| < \varepsilon$ za $n > N$, ako je:

a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; b) $x_n = \frac{2n}{n^3+1}$; c) $x_n = \frac{1}{n!}$; d) $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$.

Za svaki od navedenih slučajeva popuniti sledeću tablicu:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
N	?	?	?	?

◀ a) Očigledno je za svako $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ ako je } n > \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon).$$

b) Slično,

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}\right| < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} < \varepsilon \text{ za } n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} = N(\varepsilon).$$

c) Imamo

$$\left|\frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Rešavajući poslednju nejednačinu dobijamo

$$n > 1 + \log\frac{1}{\varepsilon} \cdot \log^{-1} 2 = N(\varepsilon).$$

d)

$$|(-1)^n \cdot 0,999^n| = 0,999^n < \varepsilon.$$

Odavde je

$$n \log 0,999 < \log \varepsilon,$$

$$\text{i pošto je } \log 0,999 < 0,$$

$$\text{to je } n > \log\varepsilon \cdot \log^{-1} 0,999 \approx 2330 \cdot \log\frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$$

Popunjavanje tablice ostavljamo čitaocu. ▶

18. Dokazati da nizovi :

a) $x_n = (-1)^n \cdot n$; b) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$; c) $x_n = \log(\log n)$ $(n > 2)$ imaju beskonačnu graničnu vrednost kad $n \to \infty$ (tj. oni su beskonačno veliki), određujući za svako E takav broj $N = N(E)$ da je $|x_n| > E$ za $n > N$.

Za svaki od slučajeva popuniti tablicu:

ε	10	100	1000	10 000
N	?	?	?	?

◀ a) Nejednakost

$$|(-1)^n n| = n > E$$

zadovoljena je za $n > N(E) = E$, gde je $E > 0$ proizvoljno.

b) Slično, rešavanjem nejednačine

$$2^{\sqrt{n}} > E,$$

imamo:

$$n > (\log E)^2 \cdot (\log 2)^{-2} = N(E)$$

c) Iz nejednakosti

$$|\log(\log n)| = \log(\log n) > E \ (n > 10)$$

$$\text{sledi } n > 10^{10E} = N(E).$$

Popunjavanje tablice ostavljamo čitaocu. ▶

19. Pokazati da niz $x_n = n^{(-1)^n}$ nije ograničen, a ipak nije beskonačno veliki kad $n \to \infty$.

◀ Neka je $E > 0$ proizvoljan broj. Tada je za $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$|x_{2k}| = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k > E,$$

ako je $k > \frac{E}{2}$, tj. x_n je neograničen. Ako je zatim $E > 1$ i $n = 2k-1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$x_{2k-1} = (2k-1)^{(-1)^{2k-1}} = \frac{1}{2k-1} < 1 \ (k \in \mathbb{N})$$

ne može biti veći od broja $E > 1$, tj. nije beskonačno veliki. ▶

20. Dokazati da je za $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

smatrajući da n prolazi skupom prirodnih brojeva.

◀ Ako je $q = 0$, to je jednakost očigledna. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $0 < |q| < 1$. Tada (prema primeru 5) je

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Odatle je

$$|q|^n = |q^n| < \frac{|q|}{n(1-|q|)} < \varepsilon, \text{ za svako } n > \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)} = N(\varepsilon). \ \blacktriangleright$$

Pretpostavljajući da n prolazi skupom prirodnih brojeva, naći sledeće granične vrednosti:

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

◀ Označimo

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Zatim je

$$S_n = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}} - 2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 3. \end{aligned}$$

Stvarno, pošto je

$$\left|\frac{n}{2^n}\right| = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} < \varepsilon,$$

ako je $n > 1+\frac{2}{\varepsilon}$, $(\varepsilon > 0)$ to je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$. ▶

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

◀ Primetimo da je

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1. \blacktriangleright$$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$.

◀ Kako je

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{2}{2^{1/2^n}}$$

i za $n>2$:

$$2=\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}=\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{2^n}>\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{n}>n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right),$$

tj. $0<2^{\frac{1}{2^n}}-1<\frac{2}{n}$, to $2^{\frac{1}{2^n}}\to 1$ kad $n\to\infty$ i granična vrednost datog niza je 2. ▶

Dokazati sledeće jednakosti:

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

◀ Jednakost sleduje iz nejednakosti

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n}\le 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

i iz toga da $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ (prema primeru 20) kad $n\to\infty$. ▶

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$.

◀ Neka je m ceo broj i $m\ge k$. Tada je

$$0<\frac{n^k}{a^n}\le\frac{n^m}{a^n}=\left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m=\left(\frac{n}{b^n}\right)^m,$$

gde je $b=\sqrt[m]{a}>1$. Međutim,

$$\begin{aligned}0&<\frac{n}{b^n}=\frac{n}{(1+(b-1))^n}=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\cdots+(b-1)^n}\\&<\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}\to 0 \text{ kad } n\to\infty.\end{aligned}$$

Onda prema teoremi o graničnoj vrednosti proizvoda, dobijamo da $\left(\frac{n}{b^n}\right)^m\to 0$ kad $n\to\infty$, odakle sleduje dokaz tvrđenja. ▶

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

◀ Da je granična vrednost jednaka nuli sledi iz očigledne nejednakosti

$$0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n} < \frac{|a|^m}{m!}\cdot\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} < \varepsilon,$$

koja je tačna za svako $\varepsilon > 0$ i $m+1 > |a|$, ako je n dovoljno veliko. ▶

27 $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, ako je $|q| < 1$.

◀ Dokaz sleduje iz toga što je

$$|nq^n| = \frac{n}{\left|\frac{1}{q}\right|^n} = \frac{n}{b^n}\ (b>1)$$

(prema primeru 25). ▶

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

◀ Za $a = 1$ jednakost je očigledna. Neka je $a > 1$. Tada $\sqrt[n]{a} > 1$ i (prema primeru 5)

$$a = \left(1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right)^n > 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right),$$

odakle dobijamo da je

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} < \varepsilon$$

za $n > \frac{a}{\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, tj. $\sqrt[n]{a} \to 1$ kad $n \to \infty$. Ako je $0 < a < 1$, to je $\frac{1}{a} > 1$ i prema dokazanom, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$ kad $n \to \infty$. Ali tada je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1. \ ▶$$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ $(a > 1)$.

◀ Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0\ (b > 1)$$

(prema rešenju primera 25), to je

$$\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$$

za dovoljno veliko n. Stavimo $b = a\varepsilon$, gde je $a > 1$, i $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada je

$$\frac{1}{a^{\varepsilon n}} < \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1 \text{ ili } 1 < n < a^{\varepsilon n}.$$

Logaritmujući poslednju nejednakost, imamo

$$0 < \log_a n < \varepsilon n,$$

odakle proizilazi

$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

za dovoljno veliko n. Iz poslednje nejednakosti i sleduje tvrđenje. ►

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

◄ Iz očigledne nejednakosti

$$\begin{aligned} n &= \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n \\ &= 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2, \end{aligned}$$

sleduje da je

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$$

za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i za sve $n > 1 + 2\varepsilon^{-2}$. ►

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

◄ Pokažimo najpre da je $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$. Primenićemo metod indukcije. Za 1 nejednakost je tačna. Zatim, ako je ona tačna za n, to za $n+1$ imamo

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$$

Poslednja nejednakost je tačna , jer je

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)....(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\ &< 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Sada postojanje i jednakost granične vrednosti sa nulom, proizilazi iz nejednakosti

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}} = \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

zadovoljene za proizvoljno $\varepsilon > 0$, ako je $n > \frac{3}{\varepsilon}$. ►

32. Dokazati da je niz

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

rastući i ograničen odozgo, a niz

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

opadajući i ograničen odozdo. Zato oni imaju zajedničku graničnu vrednost:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

◄ Saglasno nejednakosti primera 5, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} \\
&> \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{n+1}{n} = 1, \\
\frac{y_n}{y_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} \frac{n+1}{n} \\
&< \frac{1}{1 + \frac{n}{n^2-1}} \frac{n+1}{n} = \frac{n^3 + n^2 - n - 1}{n^3 + n^2 - n} < 1,
\end{aligned}$$

tj. $x_n \nearrow$, a $y_n \searrow$. Dalje, $x_n < y_n$ i $0 < y_n - x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n} \to 0$ kad $n \to \infty$, odakle $(y_n - x_n) \to 0$ kad $n \to \infty$. Sleduje, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. ►

33. Dokazati da je

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Za koje se vrednosti eksponenta n izraz $(1+\frac{1}{n})^n$ razlikuje od broja e za manje od $0,001$?

◀ Saglasno primeru 32 imamo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e.$$

Tada je

$$\begin{aligned} 0 &< e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n} < \frac{3}{n} < \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

za $n > 3000$. ▶

34. Neka je p_n $(n \in \mathbb{N})$ proizvoljan niz brojeva koji teži $+\infty$, i q_n $(n \in \mathbb{N})$ proizvoljan niz brojeva koji teži $-\infty$. Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

◀ Neka je $\{n_k\}$ bilo koji niz celih brojeva koji teži $+\infty$. Tada iz uslova

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - e\right| < \varepsilon \text{ za } n > N(\varepsilon),\ \varepsilon > 0$$

sleduje

$$\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon \ za\ n_k > N(\varepsilon),$$

$$\text{tj. } \lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Ako niz proizvoljnih brojeva $\{p_k\}$ $(p_k > 1)$ teži $+\infty$, to postoji takav niz celih brojeva $\{n_k\}$, da je $n_k < p_k < n_k + 1$ i $n_k \to +\infty$. Pošto levi i desni izraz očigledne nejednakosti

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} < \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

teži ka e, to je i

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} = e.$$

Ako sada proizvoljan niz brojeva $\{q_k\}$ $(-q_k > 1)$ teži $-\infty$ stavljajući $q_k = -\alpha_k$, dobijamo

$$\left(1+\frac{1}{q_k}\right)^{q_k} = \left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-\alpha_k} = \left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right)^{\alpha_k-1} \cdot \left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right) \to e$$

kad $k \to \infty$. ►

35. Znajući da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

Izvesti odatle formulu

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}, \text{ gde je } 0<\theta_n<1,$$

i izračunati broj e sa tačnošću do 10^{-5}.

◄ Prelaskom na graničnu vrednost u nejednakosti

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots \\
&+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&> 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\
&+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),
\end{aligned}$$

kad $n \to \infty$ dobijamo nejednakost

$$e \geq 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!} = y_k,$$

koja je zadovoljena za proizvoljno k. Kako u skupu $\{y_k\}$ ne postoji najveći element, to je za $k = n$

$$y_n = 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} < e,$$

tj. znak jednakosti je nemoguć. S druge strane je

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} = y_n.$$

Znači,

$$x_n < y_n < e \text{ i } \lim_{n\to\infty} x_n = e.$$

Odatle sleduje da je

$$\lim_{n\to\infty} y_n = e.$$

Prelaskom na graničnu vrednost u nejednakosti

$$\begin{aligned} y_{m+n} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

za fiksirano n i $m \to \infty$, dobijamo

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n \cdot n!}$$

Označimo

$$\theta_n = \frac{e - y_n}{\frac{1}{n \cdot n!}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Odavde sleduje dokaz navedene formule. Nejednakost

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n \cdot n!} < 10^{-5}$$

je tačna za $n \geq 8$. Zato je

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2,71828. \blacktriangleright$$

36. Dokazati da je broj e iracionalan.

◀ Pretpostavimo da je broj e racionalan. Tada je $e = \frac{m}{n}$, gde su m i n prirodni brojevi. Za broj n je onda zadovoljena jednakost

$$e = \frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Množeći ovu jednakost sa $n!$, dobijamo

$$m(n-1)! - n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{\theta_n}{n},$$

tj. sa leve strane ceo broj a sa desne razlomak. Dobijena protivurečnost dokazuje iracionalnost broja e. ▶

37. Dokazati nejednakost:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

◀ Leva strana nejednakosti je tačna za 1. Zatim je prema principu indukcije

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)$$

$$= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

jer je nejednakost

$$(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{n+1}{e}\right)^{-n-1} > 1$$

ekvivalentna nejednakosti

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

(poslednja nejednakost je tačna na osnovu primera 32). Desna strana nejednakosti sleduje iz toga što je (primer 6)

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

$$= e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n. \ ▶$$

38. Dokazati nejednakosti:

a)

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

gde je n proizvoljan prirodan broj;

b)

$$1+\alpha < e^\alpha,$$

gde je α realan broj, različit od nule.

◀ a) Logaritmujući nejednakost (primer 32)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

dobijamo

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln e=1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

odakle sleduje nejednakost a).

b) Pokažimo najpre da je

$$\frac{r}{r+1}<\ln(1+r)<r, \tag{1}$$

gde je r proizvoljan racionalan broj, različit od nule i veći od -1. Neka je $r=\frac{m}{n}>0$. Tada je prema nejednakosti a)

$$\begin{aligned}
\ln(1+r) &= \ln\left(1+\frac{m}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdots\frac{n+m}{n+m-1}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n+m-1}\right)\\
&< \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+m-1}<\frac{m}{n}=r;\\
\ln(1+r) &> \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}>\frac{m}{n+m}=\frac{\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}=\frac{r}{1+r},
\end{aligned}$$

odakle sleduje nejednakost (1) za $r>0$. Ako je $-1<r_1<0$, to stavljajući $-r_1=r$ $(0<r<1)$, imamo

$$-\ln(1-r)=\ln\frac{1}{1-r}=\ln\left(1+\frac{r}{1-r}\right),$$

odakle je

$$r<\ln\left(1+\frac{r}{1-r}\right)<\frac{r}{1-r}\ \text{ili}$$

$$\frac{r_1}{1+r_1}=\frac{-r}{1-r}<-\ln\left(1+\frac{1}{1-r}\right)=\ln(1-r)=\ln(1+r_1)<-r=r_1,$$

$$\text{tj. } \frac{r_1}{1+r_1}<\ln(1+r_1)<r_1.$$

Neka je α proizvoljan realan broj, veći od -1, različit od nule. Tada postoji takav racionalan broj r da je

$$\frac{r}{2}+\frac{r}{2+r}<\alpha<r$$

(na primer proizvoljan racionalan broj r, koji se nalazi između realnih brojeva α i $\sqrt{\alpha^2+4}+\alpha-2$). Tada je

$$\begin{aligned}\ln(1+\alpha) &< \ln(1+r)=\ln\left(\frac{2+2r}{2+r}\cdot\frac{2+r}{2}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{r}{2+r}\right)+\ln\left(1+\frac{r}{2}\right)<\frac{r}{2+r}+\frac{r}{2}<\alpha.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\ln(1+\alpha)<\alpha\ (\alpha>-1,\alpha\neq 0)\ \text{tj. } 1+\alpha<e\alpha\ (\alpha>-1,\ \alpha\neq 0).$$

Ako je $\alpha<-1$, to je nejednakost $1+\alpha<e\alpha$ tačna za svako $\alpha\neq 0$. ►

39. Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a\ (a>0)$$

gde je $\ln a$ logaritam broja a za osnovu $e=2,718281828459...$

◄ Iz nejednakosti

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

nalazimo da je

$$1<n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)<1+\frac{1}{n-1}\ (n>1),$$

odakle sleduje

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1.$$

Za $a>1$ imamo

$$y_n=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=n\left(e^{\frac{\ln a}{n}}-1\right)=z_n\left(e^{\frac{1}{z_n}}-1\right)\cdot\ln a,$$

gde $z_n=\frac{n}{\ln a}\to+\infty$ kad $n\to+\infty$. Označimo $\alpha_n=[z_n]$ (celobrojna vrednost), tada je

$$\alpha_n\leq z_n<\alpha_n+1 \text{ i } \frac{1}{\alpha_n+1}<\frac{1}{z_n}\leq\frac{1}{\alpha_n}.$$

Odavde dobijamo nejednakosti:

$$\ln a\cdot\alpha_n\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right)<y_n<\ln a\cdot(\alpha_n+1)\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right),$$

$$-\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}-1\right)+\ln a\cdot(\alpha_n+1)\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}-1\right)<y_n$$
$$<\ln a\cdot\alpha_n\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)+\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right).$$

Posto je niz $\left\{\alpha_n\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)\right\}$ podniz konvergentnog niza $\left\{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right\}$, to je

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1.$$

Primenjujući tvrđenje 2^0 dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(\ln a\cdot\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)+\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)\right)=\ln a\ (a>1).$$

Ako je $0<a<1$, onda je

$$y_n=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=n\left(\frac{1}{a^{-\frac{1}{n}}}-1\right)=\frac{n\left(1-b^{\frac{1}{n}}\right)}{b^{\frac{1}{n}}}=-b^{-\frac{1}{n}}\cdot n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right),$$

gde je $b=\frac{1}{a}>1$. Kako $b^{\frac{1}{n}}\to 1$ i $n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\to\ln b$ kad $n\to\infty$, to je

$$\lim_{n\to\infty}y_n=-\ln b=\ln\frac{1}{b}=\ln a\ (0<a<1).\ \blacktriangleright$$

Koristeći teoremu o postojanju granične vrednosti monotonih i ograničenih nizova, dokazati konvergenciju sledećih nizova:

40. $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{10^2}+\cdots+\frac{p_n}{10^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ gde su p_i $(i\in\mathbb{N}_0)$[4] celi nenegativni brojevi koji nisu veći od 9, počevši od p_1.

◀ Niz je neopadajući jer je

$$x_{n+1}-x_n=\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}\geq 0,$$

tj. $x_{n+1}\geq x_n$ i ograničen odozgo:

$$x_n<p_0+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\cdots=p_0+\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=p_0+1,$$

zato ima graničnu vrednost. ▶

41. $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$

[4] Prim.prevodioca: $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$

◀ Imamo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1,$$

odakle sledi rastućost niza. Ograničenost sleduje iz nejednakosti

$$\begin{aligned}
\ln x_n &= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1, \text{ tj. } x_n < e.
\end{aligned}$$

Znači, niz saglasno tvrđenju 2^0 konvergira. ▶

42. $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots, x_n = \underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n \text{ korena}}$

◀ Pošto je

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \quad (n \geq 1)$$

to se rastućost i ograničenost odozgo dokazuju primenom indukcije. Zaista, $x_1 < x_2$. Ako je $x_n < x_{n+1}$ tada je

$$\sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}} \; tj. \; x_{n+1} < x_{n+2}.$$

Zatim je $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Ako je $x_n < 2$, onda je

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Znači, x_n je konvergentan niz. ▶

Koristeći Košijev kriterijum dokazati konvergenciju sledećih nizova:

43. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

◀ Neka je dato $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \\
&\leq \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} + \cdots \\
&= \frac{2^{-n-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

za $n > -\log_2 \varepsilon$ i svaki prirodan broj p. ▶

44. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

◀ Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i za svaki prirodan broj p imamo:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)} \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \cdots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

za svako $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$. ▶

45. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

◀ Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada je

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\begin{aligned} &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

za $n > \frac{1}{\varepsilon}$ i za svaki prirodan broj p. ▶

46. Kaže se da niz x_n $(n \in \mathbb{N})$ ima ograničenu varijaciju, ako postoji takav broj c, da je

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < c$$

$(n \in \mathbb{N})$. Dokazati da niz sa ograničenom varijacijom konvergira. Naći primer konvergentnog niza koji nije ograničene varijacije.

◀ Iz datog uslova proizilazi da niz

$$y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|$$

$(n \in \mathbb{N})$ konvergira (kao ograničen i rastući). Zatim, iz konvergencije niza

y_n sledi

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= |x_{n+1}-x_n+x_{n+2}-x_{n+1}+\cdots+x_{n+p}-x_{n+p-1}| \\ &\le |x_{n+1}-x_n|+|x_{n+2}-x_{n+1}|+\cdots+|x_{n+p}-x_{n+p-1}| \\ &= |y_{n+p}-y_n|<\varepsilon\end{aligned}$$

za $n>N(\varepsilon)$, i svako $p\in\mathbb{N}$ tj. niz x_n konvergira.

Očigledno je da niz $x_n=\frac{1-(-1)^n}{2n}$ $(n\in\mathbb{N})$ konvergira ali nije sa ograničenom varijacijom, jer za bilo koje $A>0$ nejednakost (prema primeru 7)

$$\begin{aligned}&|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}| \\ = \; & 1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{2n-1}>1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \\ > \; & \ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) \\ = \; & \ln\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}>\ln\sqrt{2n+1}>A\end{aligned}$$

je zadovoljena za $n>\frac{1}{2}\left(e^{2A}-1\right)$. ►

47. Koristeći Košijev kriterijum dokazati divergenciju nizova:

a) $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$;

b) $x_n=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}$ $(n=2,3,\ldots)$.

◄ Neka je ε proizvoljan broj iz intervala $]0,\frac{1}{2}[$. a) Pošto je

$$|\, x_{n+p}-x_n \,|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\ge\frac{p}{n+p},$$

a za $p=n$ je

$$|\, x_{n+p}-x_n \,|\ge\frac{1}{2}>\varepsilon$$

za svaki prirodan broj n, to niz divergira. b) Divergencija niza sledi na osnovu toga što je

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \frac{1}{\ln(n+1)}+\frac{1}{\ln(n+2)}+\cdots+\frac{1}{\ln(n+p)} \\ &\ge \frac{p}{\ln(n+p)}>\frac{p}{n+p}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

za $p=n$. ►

48. Dokazati da monoton niz konvergira, ako konvergira neki njegov podniz.

◀ Određenosti radi smatraćemo da je niz $\{x_n\}$ rastući i $\{x_{n_k}\}$ njegov konvergentan podniz, tj. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Tada za $\forall\varepsilon > 0 \exists K = K(\varepsilon)$ takvo, da je za $\forall k > K$ zbog monotonosti ispunjeno

$$a - \varepsilon < x_{n_k} \leq x_{n_k+1} \leq \cdots \leq x_{n_{k+1}} \leq x_{n_{k+1}+1} \leq \cdots < a + \varepsilon,$$

odakle sleduje $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ za $\forall n > n_k$, gde je $k < K(\varepsilon)$, što je i trebalo dokazati. ▶

49. Dokazati, da ako je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

to je

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

◀ Neka $\{x_n\}$ konvergira, tj.

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ za } n > N(\varepsilon).$$

Onda je (prema primeru 14.a))

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$$

za $n > N(\varepsilon)$. Odavde i sledi tvrđenje. ▶

50. Ako $x_n \to a$, šta se može reći o graničnoj vrednosti $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

◀ Ako je $a \neq 0$, to je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

Neka je $a = 0$ i neka postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$$

Pokažimo da je $|l| \leq 1$. Pretpostavimo, da je $|l| > 1$ i izaberimo takvo $\varepsilon > 0$, da bude $|l| - \varepsilon > 1$. Pošto je

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > |l| - \varepsilon > 1 \text{ za } n > N(\varepsilon),$$

to je $|x_{n+1}| > |x_n|$ za $n > N(\varepsilon)$, tj. niz $\{|x_n|\}$, a zajedno sa njim i niz $\{x_n\}$

ne može težiti nuli. Protivurečnost dokazuje naše tvrđenje. Pokažimo na primerima da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ može postojati i da pripada segmentu $[-1, 1]$:

1)

$$x_n = \frac{1}{n}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1;$$

2)

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = -1;$$

3)

$$x_n = nq^n \ \ (|q| < 1)\,, \ \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q.$$

Međutim $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ može uopšte da ne postoji, na primer, za niz

$$x_n = \frac{1}{n}\left(q + (-1)^n\right) \ \ (|q| \neq 1)\,,$$

a za $|q| = 1$ sam niz $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ nije definisan. ►

51. Dokazati da konvergentan niz dostiže ili svoj supremum ili svoj infimum ili i jedno i drugo. Navesti primere nizova sva tri tipa.

◄ Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Pretpostavimo da je $x_n < a$ $(x_n > a)$ za svako n. Tada postoji najmanji (najveći) član niza koji je infimum (supremum) niza. Ako niz x_n ima članove manje od a, jednake a i veće od a, onda ima i najmanji i najveći član, dakle i infimum i supremum. Navodimo primere nizova sva tri tipa.

1)

$$x_n = \frac{n-1}{n}, \ x_1 = 0 = \inf\{x_n\}\,;$$

2)

$$x_n = \frac{1}{n}, \ x_1 = 1 = \sup\{x_n\}\,;$$

3)

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \ x_1 = -1 = \inf\{x_n\}\,, \ x_2 = \frac{1}{2} = \sup\{x_n\}\,. \ ►$$

52. Dokazati da brojni niz x_n $(n \in \mathbb{N})$ koji teži $+\infty$, dostiže svoj infimum.

◄ Neka $x_n \to +\infty$ kad $n \to \infty$ i neka je x_l proizvoljan član niza. Uzmimo bilo koji broj $A > x_l$. Pošto $x_n \to +\infty$, to postoji prirodan broj $N(A)$, takav

da je za $n > N(A) : x_n > A$. Označimo sa $x_{n_0} = \min\{x_1, x_2, ..., x_N\}$. Tada je očigledno $x_{n_0} = \inf\{x_n\}$. ►

Naći najveći član niza x_n $(n \in \mathbb{N})$ ako :

53. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.

◄ Najveći član niza $\{x_n\}$ označimo simbolom $\max x_n$. Iz nejednakosti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1$$

sledi da je $n > 2$. Znači $\{x_n\}$ $(n > 2)$ opada. Zato se $\max x_n$ nalazi među članovima x_1, x_2, x_3. Nalazimo da je

$$\max x_n = x_3 = \frac{9}{8}. \text{ ►}$$

54. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}$.

◄ Imamo

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n} - 10)^2 + 20\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{n}-10)^2}{\sqrt{n}} + 20}.$$

Odatle je $x_n \leq \frac{1}{20}$, gde je jednakost postignuta za $n = 100$. Dakle, $\max x_n = x_{100} = \frac{1}{20}$. ►

55. $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

◄ Pošto je $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}$, to za $n > 999$ niz opada, a za $n < 999$ niz raste. Dakle,

$$\max x_n = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2,49 \cdot 10^{452}. \text{ ►}$$

Za niz x_n $(n \in \mathbb{N})$ naći $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

56. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

◄ Niz raste i ograničen je odozgo, zato konvergira. Najmanji član niza je $x_1 = 0 = \inf\{x_n\}$. Gornja i donja granična vrednost se poklapaju i jednake su $\sup\{x_n\}$, znači

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n = 1. \text{ ►}$$

57. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$.

◄ Kako su svi članovi niza $\{x_n\}$ sadržani u nizovima

$$x_{2n-1} = 2 + \frac{3}{2n-1}, \; x_{2n} = -2 - \frac{3}{2n} \; i \; x_{2n} < x_{2n-1},$$

gde $\{x_{2n-1}\}$ opada a $\{x_{2n}\}$ raste, to je

$$\begin{aligned} x_1 &= \sup\{x_n\} = 5, \ \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 2, \\ x_2 &= \inf\{x_n\} = -\frac{7}{2}, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = -2. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

58. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.
◀ Imamo

$$x_{4n-2} < x_{2n-1} < x_{4n}$$

i pritom je $\{x_{4n-2}\}$ opadajući a $\{x_{4n}\}$ rastući niz. Zato je

$$\begin{aligned} \inf\{x_n\} &= \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{4n-2}{4n-1}\right) = 0, \\ \sup\{x_n\} &= \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = \lim\left(1 + \frac{4n}{4n+1}\right) = 2. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

59. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
◀

$$x_{4n-3} = 6, \ x_{4n-2} = -4, \ x_{4n-1} = 0, \ x_{4n} = 2 \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$\text{te je } \inf\{x_n\} = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -4 \text{ i } \sup\{x_n\} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 6. \ \blacktriangleright$$

Naći $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ **i** $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_{n\to\infty}$.
60. $x_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$.
◀ Pošto je

$$x_{3n-2} < x_{3n-1} < x_{3n}$$

$$\text{i nizovi } \{x_{3n-2}\}, \{x_{3n-1}\} \ i \ \{x_{3n}\}$$

konvergiraju, to je

$$\begin{aligned} \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n &= \lim_{n\to\infty} x_{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(3n-2)^2}{2\left(1+(3n-2)\right)^2} = -\frac{1}{2}, \\ \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n &= \lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)^2}{1+(3n)^2} = 1. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

61. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$.
◀ Izdvajajući iz svih članova datog niza osam podnizova

$$\{x_{8n-j}\} \ (j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

lako se zaključuje da su donja i gornja granična vrednost redom granične vrednosti sledećih podnizova:

$$x_{8n-3} = -\left(1 + \frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \; i \; x_{8n-6} = \left(1 + \frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1.$$

Zato je

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-3} = \lim_{n\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -e - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-6} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1\right) = e+1. \;\blacktriangleright$$

62. $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$.

◀ Imamo

$$x_{4n} < x_{4n-3} < x_{4n-2},$$

odakle je

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{4n-1} = 1. \;\blacktriangleright$$

Naći delimične granične vrednosti niza:

63. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$

◀ Od članova datog niza sastavimo dva konvergentna podniza

$$\overline{x}_n = \frac{1}{2^n} \; i \; \overline{\overline{x}}_n = \frac{2^n-1}{2^n} \; (n \in \mathbb{N}).$$

Njihove granične vrednosti su

$$\lim_{n\to\infty}\overline{x}_n = 0 \; i \; \lim_{n\to\infty}\overline{\overline{x}}_n = 1$$

tj. to su i delimične granične vrednosti datog niza. Kako svi ostali podnizovi neophodno ulaze u sastav navedenih podnizova, to su 0 i 1 jedine delimične granične vrednosti. ▶

64. $1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \ldots$

◀ Očigledno je da su svi racionalni brojevi r $(0 < r < 1)$ članovi datog niza. Neka je α proizvoljan realan broj takav da je $0 \leq \alpha < 1$; tada za dovoljno veliki prirodan broj m, zadovoljena je nejednakost

$$\alpha + \frac{1}{n+m} < 1 \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Za svaki prirodan broj n među članovima datog niza postoji takav racionalan broj r_n, da je

$$\alpha < r_n < \alpha + \frac{1}{n+m}.$$

Odatle sleduje da je

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha,$$

tj. α je delimična granična vrednost. Na potpuno sličan način se razmatra i slučaj kada je $0 < \alpha \leq 1$. ▶

66. Sastaviti primer brojnog niza koji ima za svoje delimične granične vrednosti date brojeve: $a_1, a_2, ..., a_p$.

◀ Označimo

$$x_{kn} = a_k + \frac{1}{n}, \ k = \overline{1,p}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Pošto niz x_{kn} konvergira ka a_k $(k = \overline{1,p})$ to traženi niz može biti na primer niz:

$$a_1+1, \ a_2+1, ..., \ a_p+1, \ a_1+\frac{1}{2}, \ a_2+\frac{1}{2}, ..., \ a_p+\frac{1}{2}, ..., \ a_1+\frac{1}{n}, ..., \ a_p+\frac{1}{n}, ..$$

sastavljen od članova niza $\{x_{kn}\}$ $(k = \overline{1,p})$. ▶

67. Sastaviti primer brojnog niza za koga su članovi datog niza

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

njegove delimične granične vrednosti. Koje će još delimične granične vrednosti imati dobijeni niz?

◀ Od članova niza $x_n = a_n$, $x_{kn} = a_k + \frac{1}{n+k}$ $(n \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N})$ sastavimo niz:

$$a_1, \ a_1 + \frac{1}{2}, \ a_2, \ a_1 + \frac{1}{3}, \ a_2 + \frac{1}{3}, \ a_3, \ a_1 + \frac{1}{4}, \ a_2 + \frac{1}{4}, \ a_3 + \frac{1}{4}, \ a_4, ..$$

koji ima za svoje delimične granične vrednosti:

1) granične vrednosti niza $\{x_{kn}\}$ tj. članove niza $\{a_n\}$ i **2)** delimične granične vrednosti niza $\{a_n\}$. ▶

68. Sastaviti primer niza :

a) nema konačnih delimičnih graničnih vrednosti;

b) ima jedinstvenu konačnu delimičnu graničnu vrednost ali nije konvergentan;

c) ima beskonačan skup delimičnih graničnih vrednosti;

d) ima svaki realan broj za svoju delimičnu graničnu vrednost.

◀ a) Na primer $x_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$. b) Neka je $\{x_n\}$ niz koji teži ka konačnoj granici a, $\{y_n\}$ beskonačno veliki niz; tada je niz

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2, .., x_n,\ y_n, ..$$

divergentan i ima jedinstvenu delimičnu graničnu vrednost a. c) Primeri 65 i 66. d) Uzmimo niz sastavljen od svih racionalnih brojeva $\pm\frac{p}{q}$, gde su p i q prirodni brojevi:

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} - \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{1}$$

$$-\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

$$\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, -\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n-1}, -\frac{n}{n-1}, \ldots$$

Činjenica da je proizvoljan realan broj delimična granična vrednost navedenog niza dokazuje se slično kao u primeru 65. ▶

69. Dokazati da nizovi x_n i $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ imaju iste delimične granične vrednosti.

◀ Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (primer 30), to je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p_n]{p_n} = 1$, gde je $\{p_n\}$ proizvoljan niz prirodnih brojeva. Neka je α delimična granična vrednost niza $\{x_n\}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \alpha$. Onda prema tvrđenju o graničnoj vrednosti proizvoda imamo:

$$\lim_{n\to\infty} y_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_{p_n} \cdot \sqrt[p_n]{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_{p_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[p_n]{p_n} = \alpha,$$

tj. α je delimična granična vrednost niza $\{y_n\}$.

Neka je sada β delimična granična vrednost niza $\{y_n\}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_{q_n} = \beta$. Pošto je $\sqrt[n]{n} > 0$, to je definisan podniz $x_{q_n} = y_{q_n} \cdot q_n^{-\frac{1}{q_n}}$ niza $x_n = y_n \cdot n^{-\frac{1}{n}}$ koji očigledno ima β za svoju graničnu vrednost, tj. β je delimična granična vrednost niza x_n. ▶

70. Neka niz x_n $(n \in \mathbb{N})$ konvergira, a niz y_n $(n \in \mathbb{N})$ divergira. Šta se može tvrditi o konvergenciji nizova:

a) $x_n + y_n$; b) $x_n \cdot y_n$? Navesti odgovarajuće primere (za slučaj b).

◀ a) Niz $\{x_n + y_n\}$ divergira. Ako bi on konvergirao, tada bi konvergirala i razlika nizova $\{x_n + y_n\}$ i $\{x_n\}$, tj. konvergirao bi niz $\{y_n\}$.

b) Niz $\{x_n \cdot y_n\}$ može kako konvergirati tako i divergirati. Uzimajući

$$x_n = \frac{1}{n},\ y_n = (-1)^n\ tj.\ x_n = \frac{n}{n+1},\ y_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

U prvom slučaju niz $\{x_n \cdot y_n\}$ konvergira a u drugom slučaju divergira. ►

71. Dokazati, da je

a)

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n;$$

b)

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Navesti primere kada u navedenim relacijama važe stroge nejednakosti.

◄ a) Primetimo najpre da ako je $\{x_{k_n}\}$ podniz niza $\{x_n\}$, to je

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varliminf_{n\to\infty} x_{k_n}.$$

Pošto je donja granična vrednost tačka nagomilavanja niza, to je

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} + y_{r_n}), \quad \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}.$$

Prema napred navedenoj napomeni imamo:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} + \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} \le \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

Dalje, pošto je

$$\left\{x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}\right\}$$

podniz konvergentnog niza

$$\{x_{r_n} + y_{r_n}\}, \text{ to je}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_{r_n} + y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty} \left(x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}\right).$$

Kako pored toga niz $\left\{x_{m_{r_n}}\right\}$ konvergira, to i niz $\left\{y_{m_{r_n}}\right\}$ takođe konvergira, jer je

$$\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}},$$

i dobijena nejednakost se može napisati u obliku:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}\right) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \left(x_n + y_n\right).$$

Levi deo nejednakosti je dokazan. S obzirom na činjenicu da je

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (-y_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

dobijamo :

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) - \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n &= \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) + \underline{\lim}_{n\to\infty} (-y_n) \\ &\le \underline{\lim}_{n\to\infty} [(x_n + y_n) + (-y_n)] = \underline{\lim}_{\to\infty} x_n. \end{aligned}$$

Odatle proizilazi i desni deo nejednakosti **a)**. Nejednakost **b)** se dokazuje slično. Navodimo primere kada u datim nejednakostima važi stroga nejednakost. Neka je

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2 \frac{n\pi}{2}, \; y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos^2 \frac{n\pi}{2} \; (n \in \mathbb{N}).$$

Tada je

$$x_n + y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = -1, \; \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 1,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -1, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 1. \; ▶$$

72. Neka je $x_n \ge 0$ i $y_n \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Dokazati:

a)

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n;$$

b)

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

Navesti primere kada važe stroge nejednakosti.

◀ Dokažimo slučaj **a)** (**b)** se dokazuje slično). Ako je $x_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ ili $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$ to je relacija a) očigledna. Ostaje da se razmotri slučaj $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n > 0$. Tada je $x_n > 0$ za $n > n_0$, gde je n_0 prirodan broj. Koristeći napomene primera 71 i označavajući

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} \cdot y_{r_n}), \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}},$$

imamo

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_{r_n} \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_{r_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} \leq \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

Pošto je $\{x_{m_{r_n}} \cdot y_{m_{r_n}}\}$ podniz konvergentnog niza $\{x_{r_n} \cdot y_{r_n}\}$ to je

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} \cdot y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty} \left(x_{m_{r_n}} \cdot y_{m_{r_n}}\right).$$

Kako niz $\{x_{m_{r_n}}\}$ konvergira ka granici različitoj od nule, to podniz $\{y_{m_{r_n}}\}$ takođe konvergira tj.

$$\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

Sledi,

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}} = \varliminf_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n).$$

Na taj način je levi deo nejednakosti a) dokazan. Ako je $\varlimsup_{n\to\infty} y_n = 0$, to je desni deo nejednakosti a) očigledan, jer je u tom slučaju $\varliminf_{n\to\infty} y_n = 0$, i zbog toga je $\varliminf_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$. Neka je $\varlimsup_{n\to\infty} y_n > 0$. Tada saglasno dol:azanom i tome da je $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} y_n}$, dobijamo nejednakost:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n} \cdot \varliminf_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) &= \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} \cdot \varliminf_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) \\ &\leq \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{y_n} \cdot (x_n \cdot y_n)\right) = \varliminf_{n\to\infty} x_n \end{aligned}$$

iz koje sledi desni deo nejednakosti a). Navodimo primer nizova kada važe stroge nejednakosti. Neka je

$$x_n = 2 + (-1)^n, \; y_n = 2 - (-1)^n + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Tada je

$$x_n \cdot y_n = 3 + \frac{2 + (-1)^n}{2} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ i}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 1, \; \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 3, \; \varliminf_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}, \; \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \frac{7}{2},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \frac{3}{2}, \; \varlimsup_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \frac{9}{2}. \; \blacktriangleright$$

73. Dokazati da ako $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ postoji, onda za bilo koji niz y_n $(n \in \mathbb{N})$ imamo:

a)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n;$$

b)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

◄ a) Imamo (prema primeru 71)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

Pošto je
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$
to je u prethodnim relacijama moguć samo znak jednakosti.

Slično, (prema primeru 72b)) se dokazuje i jednakost pod **b)**. ►

74. Dokazati da ako je za neki niz x_n $(n \in \mathbb{N})$ i bilo koji niz y_n $(n \in \mathbb{N})$ zadovoljena bar jedna od jednakosti:

a)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \text{ ili}$$

b)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \; (x_n \geq 0)$$

tada niz x_n konvergira.

◄ Neka je uslov **a)** ispunjen. Kako je $\{y_n\}$ bilo koji niz, uzmimo $y_n = -x_n$. Tada iz uslova **a)** sledi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} (-x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n - x_n) = 0,$$

odakle imamo
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n,$$
tj. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ postoji. Pri ispunjenju uslova **b)** uzmimo $y_n = -1$. Tada iz **b)** proizilazi da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (-x_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \textit{ ili } \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n,$$

što opet znači da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ postoji. ►

75. Dokazati, da ako je

$$x_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}) \ i \ \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = 1,$$

to niz $\{x_n\}$ konvergira.

◀ Iz uslova primera i činjenice da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n},$$

proizilazi da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n,$$

tj. $\{x_n\}$ konvergira. ▶

76. Dokazati, da ako je niz x_n $(n \in \mathbb{N})$ ograničen i

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

to su delimične granične vrednosti niza rasprostranjene svuda gusto između donje i gornje granične vrednosti niza:

$$l = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \ i \ L = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n,$$

tj. bilo koji broj iz segmenta $[l, L]$ je delimična granična vrednost datog niza.

◀ Pokažimo da je bilo koja tačka a intervala $]l, L[$ delimična granična vrednost niza $\{x_n\}$, tj. pokažimo da proizvoljna ε okolina tačke a sadrži beskonačno članova niza $\{x_n\}$. Neka je $\varepsilon > 0$ takav proizvoljan fiksiran broj, da ε okoline tačaka l, a i L nemaju zajedničkih tačaka. Saglasno uslovu postoji takav broj $N(\varepsilon)$ da je

$$|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon, \text{ za } n > N(\varepsilon).$$

Pošto je l delimična granična vrednost to se u ε okolini tačke l može pronaći element x_{p_1} sa indeksom p_1 većim od $N(\varepsilon)$. Iz istog razloga u ε okolini tačke L postoji element x_{q_1}, čiji je indeks q_1 veći od p_1. Kako je rastojanje među susednim elementima, kada je $n > N(\varepsilon)$, manje od 2ε, to se među prirodnim brojevima n, za koje je $p_1 < n < q_1$, nalazi bar jedan broj r_1, takav da element x_{r_1} pripada ε okolini tačke a. Dalje, postoji element x_{p_2} sa indeksom p_2 većim od q_1 tako da x_{p_2} pripada ε okolini tačke l. Sledi, među

brojevima n za koje je $q_1 < n < q_2$ postoji takav r_2 da element x_{r_2} pripada ε okolini tačke a. Nastavljajući taj proces do beskonačnosti uveravamo se u postojanje beskonačnog broja elemenata niza $\{x_{r_n}\}$ koji pripadaju ε okolini tačke a. Znači, a je tačka nagomilavanja, a pošto je a proizvoljna tačka intervala $]l, L[$ to je navedeno tvrđenje dokazano. ▶

77. Neka brojni niz x_1, x_2, .., x_n, ...zadovoljava uslov

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \ (m,\ n \in \mathbb{N}).$$

Dokazati, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ postoji.

◀ Imamo

$$0 \leq x_n \leq x_1 + x_1 + \cdots + x_1 = nx_1,$$
$$\text{tj. } 0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1 \ (n \in \mathbb{N}),$$

sledi, $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ je ograničen i postoji $\alpha = \inf\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, tada postoji takav broj m, da je

$$\alpha \leq \frac{x_m}{m} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

Svaki ceo broj n može da se predstavi u obliku $n = qm + r$, gde je r jednak nekom od brojeva: $0, 1, 2, ..., m-1$. Uzimajući da je $x_0 = 0$, imamo

$$\begin{aligned} x_n &= x_{qm+r} \leq x_m + x_m + \cdots + x_m + x_r = q \cdot x_m + x_r, \\ \frac{x_n}{n} &= \frac{x_{qm+r}}{qm+r} \leq \frac{q \cdot x_m + x_r}{qm+r} = \frac{x_m}{m} \cdot \frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n}, \\ \alpha &\leq \frac{x_n}{n} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{n}. \end{aligned}$$

Pošto je

$$0 \leq r \leq m+1,$$

to je x_r ograničen i postoji takav broj $N(\varepsilon)$ da je za $n > N(\varepsilon)$ ispunjeno

$$0 \leq \frac{x_r}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada je

$$\alpha \leq \frac{x_n}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \varepsilon,$$

za $n > N(\varepsilon)$, odnosno,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha. \ ▶$$

78. Dokazati Teplicovu teoremu:

Neka je **1)** $P_{nk} \geq 0$; **2)** $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk} = 0$ za svako fiksirano k; **4)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Tada niz

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k \ (n \in \mathbb{N})$$

konvergira i

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a.$$

◀ Iz uslova **4)** proizilazi postojanje takvog broja $N = N(\varepsilon)$ da je nejednakost

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

zadovoljena za sve $n > N(\varepsilon)$; dalje iz istog uslova proizilazi postojanje takvog broja $M > 0$ da je

$$|x_n| \leq M, \quad |x_n - a| \leq 2M$$

za sve n. Na kraju iz uslova **3)** sledi postojanje broja $n_0 = n_0(\varepsilon) > N$ da je $P_{nk} < \frac{\varepsilon}{4NM}$ $(k = \overline{1,N})$ za sve $n > n_0$. Polazeći od tih nejednakosti i uslova **1)-2)** teoreme, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k - a\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k - \sum_{k=1}^{n} P_{nk} a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk} (x_k - a)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} P_{nk} |x_k - a| = P_{n1} |x_1 - a| + P_{n2} |x_2 - a| + \cdots \\
&\quad + P_{nN} |x_N - a| + \cdots + P_{nn} |x_n - a| \\
&\leq N \cdot \frac{\varepsilon}{4NM} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} (P_{nN+1} + P_{nN+2} + \cdots + P_{nn}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

za sve $n > n_0$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = a. \ ▶$$

79. **a)** Dokazati da ako niz $\{x_n\}$ konvergira, to i niz aritmetičkih sredina

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \ (n \in \mathbb{N})$$

takođe konvergira i $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n$.

b) Dokazati da ako niz $\{y_n\}$ konvergira i $y_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ to i niz harmonijskih sredina

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}}$$

takođe konvergira i $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

c) Dokazati da ako je $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, to je 1) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$ i 2) $\lim_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$, gde je γ_n harmonijska a ξ_n aritmetička sredina brojeva $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

◀ a) Uzimajući

$$P_{nk} = \frac{1}{n} \quad (k = \overline{1,n};\ n \in \mathbb{N})$$

to su za P_{nk} i x_n ispunjeni svi uslovi primera 78, gde je

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = \xi_n.$$

Sledi, $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n$.

b) Neka

$$P_{nk} = \frac{\frac{1}{y_k}}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}} \quad (k = \overline{1,n}),$$

tada su ispunjeni svi uslovi teoreme 78, gde je $t_n = \gamma_n$. Sledi, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

c) 1) Pokažimo da ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0$, da je onda $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} = 0$. A to je ekvivalentno sa $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$. Primenom teoreme 78, stavljajući $P_{nk} = \frac{1}{n}$ $(k = \overline{1,n})$, $x_n = \frac{1}{y_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, dobijamo da je $t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = \frac{1}{\gamma_n}$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0$. 2) Tvrđenje da je $\lim_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$, sledi iz nejednakosti (prema primeru 6) $\gamma_n \leq \xi_n$ i činjenice da je $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$. ▶

80. Dokazati, da ako niz $\{x_n\}$ konvergira i $x_n > 0$, to je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

◀ Imamo (nejednakosti a) i b) primer 6))

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \xi_n$$

Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(prema primeru 79) to je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n. \blacktriangleright$$

81. Dokazati da ako je $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ to je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}},$$

pretpostavljajući da granična vrenost koja stoji na desnom delu poslednje jednakosti, postoji.

◀ Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

(prema primeru 80). ▶

82. Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

◀ Primetimo da je

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{x_n},$$

$$\text{gde je } x_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e,$$

to na osnovu primera 81 imamo dokaz tvrđenja. ▶

83. Dokazati Štolcovu teoremu: ako **a)** $y_{n+1} > y_n$, $n \in \mathbb{N}$ **b)** $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ **c)** postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

◀ Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a.$$

Sada ako uzmemo

$$y_0 = 0,\ x_0 = 0,\ P_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n}\ (k = 1, 2, ..., n),\ X_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

ispunjeni su uslovi Teplicove teoreme (primer 78) za P_{nk} i X_n gde je $t_n = \frac{x_n}{y_n}$. Sledi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}. = a$$

Ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty,$$

to ponovnim navođenjem gornjih rasuđivanja ali za niz $\{\frac{y_n}{x_n}\}$ prethodno dokazavši da je $x_{n+1} > x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0,\ \text{tj.}\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty. \ ▶$$

84. Dokazati, da ako je p prirodan broj, to je

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}\right) = \frac{1}{2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+3^p+\cdots+(2n+1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}$.

◀ Za dokaz navedenih tvrđenja primenjuje se Štolcova teorema (primer 83). Dokažimo tvrđenje **b)** (**a)** i **c)** se slično dokazuju). Uzimajući da je

$$x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1},\ y_n = (p+1)n^p,$$

imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(n+1)^p - (n+1)^{p+1} + n^{p+1}}{(p+1)((n+1)^p - n^p)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(p+1)\left(n^p + pn^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}n^{p-2} + \cdots + 1\right)}{(p+1)\left(n^p + pn^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}n^{p-2} + \cdots + 1 - n^p\right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-n^{p+1} - (p+1)n^p - \frac{(p+1)p}{2}n^{p-1} - \cdots - 1 + n^{p+1}}{(p+1)\left(n^p + pn^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}n^{p-2} + \cdots + 1 - n^p\right)} \right). \end{aligned}$$

Sabiranjem koeficijenata uz iste stepene n, i deljenjem brojioca i imenioca sa n^{p-1} a zatim označavanjem sa $o(\frac{1}{n})$ zbir svih članova čiji stepen nije veći od -1; dobija se

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p(p+1)}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{p(p+1) + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}. \ \blacktriangleright$$

85. Dokazati da niz

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \ (n \in \mathbb{N})$$

konvergira. Na taj način važi formula

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

◄ Pošto je

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

(prema primeru 38) to je niz $\{x_n\}$ opadajući. Pored toga, dati niz je ograničen odozdo:

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} > 0 \end{aligned}$$

Zato postoji konačna granična vrednost C i važi predstavljanje:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = C + \varepsilon_n,$$

gde je $C = 0,577216...$ (zove se Ojlerova konstanta) i $\varepsilon_n \to 0$ kad $n \to \infty$. ►

86. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$.

◄ Neka je

$$z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Tada je (prethodni primer)

$$\begin{aligned} z_{2n} - z_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ &= \ln 2n + \varepsilon_{2n} - \ln n - \varepsilon_n = \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \end{aligned}$$

odnosno,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2. \ \blacktriangleright$$

87. Niz brojeva x_n $(n \in \mathbb{N})$ definisan je formulama :

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\ (n = 3, 4, ..).$$

Naći

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

◀ Imamo

$$x_k - x_{k-1} = \frac{x_{k-1}+x_{k-2}}{2} - x_{k-1} = -\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{2}.$$

Zamenjujući ovaj izraz u očiglednu jednakost:

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}),$$

dobijamo počev od drugog sabirka, geometrijsku progresiju, čiji je zbir jednak

$$\begin{aligned} x_n &= a + (b-a) - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4} - \cdots + (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}} \\ &= a + \frac{2(b-a)}{3} + \frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}, \end{aligned}$$

odakle je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(a + \frac{2(b-a)}{3} + \frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\right) = \frac{a+2b}{3}. \ \blacktriangleright$$

88. Neka je x_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ niz brojeva definisan sledećim formulama:

$$x_0 > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)\ (n \in \mathbb{N}_0).$$

Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

◀ Pošto je

$$x_0 > 0 \text{ i } x_n + \frac{1}{x_n} \geq 2,$$

to je niz x_n $(n \in \mathbb{N})$ ograničen odozdo brojem 1. A iz nejednakosti

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \leq x_n,$$

koja je zadovoljena za $x_n \geq 1$, proizilazi da dati niz opada. Sledi, postoji konačna granična vrednost a, gde je $a \geq 1$. Prelazeći na graničnu vrednost u jednakosti

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right),$$

nalazimo da je

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Odavde je $a^2 = 1$ ili $a = \pm 1$. Pošto je $x_n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ to je $a = 1$. ▶

89. Dokazati da nizovi x_n i y_n $(n \in \mathbb{N})$ definisani formulama

$$x_1 = a, \; y_1 = b, \; x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \; y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

imaju zajedničku graničnu vrednost

$$\mu(a, b) = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n$$

(aritmetičko-geometrijska sredina brojeva a i b).

◀ Iz uslova primera sleduje da je $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Koristeći poznatu nejednakost

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a \geq 0, \; b \geq 0)$$

dobijamo

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geq \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}$$

a pošto je

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n^2} = x_n, \; y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq y_n,$$

$$\text{i zbog } x_n \leq y_n \leq y_1, \; y_n \geq x_n \geq x_1,$$

nizovi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ prema 3^0, **2**, imaju odgovarajuće konačne granične vrednost A i B. Prelaskom na granične vrednosti u jednakosti

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

dobijamo $A = B$. Zajednička granična vrednost ovih nizova zove se aritmetičko-geometrijska sredina i označava simbolom $\mu(a, b)$. ►

Naći granične vrednosti:

90. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

◄ Pošto je

$$1-\frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \quad (k = 2, ..., n),$$

to zapisujući proizvod u obliku

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

nalazimo da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$ ►

91. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$

◄ Imamo

$$1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \quad (k = 2, ..., n)$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n} = \frac{1}{3}.$$ ►

92. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$

◄ Vidimo da je

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$
$$= \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)((k-1)^2+(k-1)+1)} \quad (k = 2, ..., n),$$

odatle je

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{15\cdot 13}\cdots\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)((n-1)^2+(n-1)+1)}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

1.3 Pojam funkcije

1^0 Definicija funkcije. Neka su X i Y dva podskupa skupa realnih brojeva. Ako svakom $x \in X$ po nekom zakonu (pravilu) odgovara jedinstven broj $y = f(x) \in Y$, to se kaže da je na skupu X definisana funkcija $y = f(x)$, čija se oblast vrednosti nalazi u skupu Y. Skup X se zove oblast definisanosti funkcije f, a promenljiva x se zove argument. Skup X može biti : interval $[a,b[\,: a \le x < b$ ili $]a,b]\,: a < x \le b$, poluprava $[a,+\infty[\,: a \le x < +\infty$ ili $]-\infty,b]\,: -\infty < x \le b$, cela beskonačna prava $]-\infty,+\infty[\,: -\infty < x < +\infty$ i.t.d. Skup X može biti i sistem intervala ili segmenata ili njihova kombinacija a takođe može se sastojati iz diskretnih tačaka.

2^0 Monotonost funkcije. Funkcija $y = f(x)$ se naziva neopadajućom (nerastućom) na skupu X, ako za proizvoljne x_1 i x_2 iz X, koji zadovoljavaju uslov $x_1 < x_2$, važi $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$. Neopadajuće i nerastuće funkcije se jednim imenom nazivaju monotonim funkcijama. Ako za proizvoljne $x_1, x_2 \in X$, koji zadovoljavaju uslov $x_1 < x_2$ važi $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2)$ to se funkcija $y = f(x)$ naziva strogo rastućom (opadajućom).

3^0 Inverznost funkcije. Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na segmentu $[a,b]$ i neka je njen skup vrednosti segment $[\alpha,\beta]$. Neka, dalje svakom $y \in [\alpha,\beta]$ odgovara jedinstvena vrednost $x \in [a,b]$, za koju je $f(x) = y$. Tada se na segmentu $[\alpha,\beta]$ može definisati funkcija $x = f^{-1}(y)$, koja svakom elementu $y \in [\alpha,\beta]$ dodeljuje onu vrednost $x \in [a,b]$ za koju je $y = f(x)$. Funkcija $x = f^{-1}(y)$ se naziva inverznom za funkciju $y = f(x)$. Umesto segmenta mogu se posmatrati konačni ili beskonačni intervali. Funkcije $y = f(x)$ i $x = f^{-1}(y)$ se nazivaju uzajamno inverznim. One poseduju sledeća svojstva:

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \text{ i } f^{-1}(f(x)) = x$$

Ako je funkcija $y = f(x)$ monotona u strogom smislu na $[a,b]$, to na seg-

mentu $[\alpha, \beta]$ postoji inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$, takođe strogo monotona u istom smislu.

4^0 **Rešeni zadaci.**

Odrediti oblast definisanosti funkcija:

93. $y = (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$.

◀ Pošto prvi činilac $x-2$ ima smisla za proizvoljne vrednosti x, to se oblast definisanosti datog izraza sastoji iz onih vrednosti x, za koje važi nejednakost

$$\frac{x+1}{1-x} \geq 0,$$

čije je rešenje $-1 \leq x < 1$. ▶

94. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

◀ Izraz ima smisla pod uslovom, da je $\sin\sqrt{x} \geq 0$, tj. ako je

$$2k\pi \leq \sqrt{x} \leq \pi + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{N}_0).$$

Odatle je

$$4k^2\pi^2 \leq x \leq \pi^2(2k+1)^2 \quad (k \in \mathbb{N}_0). \ ▶$$

95. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

◀ Slično prethodnom primeru imamo $\cos x^2 \geq 0$, odakle nalazimo

$$0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2} \quad ili \quad \frac{\pi}{2}(4k-1) \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2}(4k+1) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

tj. $|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ili $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)} \quad (k \in \mathbb{N})$. ▶

96. $y = \lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

◀ Oblast definisanosti određena je nejednakošću

$$\sin\frac{\pi}{x} > 0,$$

koja je zadovoljena, za

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < \pi(2k+1) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Odavde se dobija da je :

$$1 < x < +\infty, \text{ za } k = 0; \ \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \text{ za } k > 0;$$

$$\frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k+1} \text{ za } k < 0. \ ▶$$

97. a) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$; b) $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

◀ a) Funkcija je definisana ako je

$$x \geq 0 \text{ i } \pi x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{N}_0)$$

tj. ako je $k < x < k + 1$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.

b) Izraz $x + |x|$ ima smisla uvek, znači proizvod je definisan, ako kvadratni koren ima smisla, tj. ako je

$$x \cdot \sin^2 \pi x \geq 0.$$

Rešavanjem poslednje nejednakosti, nalazimo da je $x \geq 0$ i $x = -1, -2, \ldots$ ▶

98. a) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$; b) $y = \arccos(2 \sin x)$; c) $y = \lg(\cos(\lg x))$.

◀ a) Data funkcija ima smisla, ako je

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1 \ (x \neq -1).$$

Ako je $x < -1$, nema rešenja, za $x > -1$ sledi $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

b) Očigledno mora biti

$$|2 \sin x| \leq 1, \text{ tj. } |\sin x| \leq \frac{1}{2}.$$

Rešavanjem poslednje nejednakosti nalazimo oblast definisanosti funkcije: $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Spoljašnji logaritam postoji ako je

$$\cos(\log x) > 0.$$

Kosinus je pozitivan za

$$\frac{\pi}{2}(4k - 1) < \log x < \frac{\pi}{2}(4k + 1) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Na kraju logaritam postoji u navedenim granicama, ako je

$$10^{\frac{\pi}{2}(4k-1)} < x < 10^{\frac{\pi}{2}(4k+1)} \ (k \in \mathbb{Z}).$$ ▶

99. $y = \cot \pi x + \arccos(2^x)$.

◀ Kotangens postoji za

$$\pi x \neq k\pi, \text{ tj. za } x \neq k \ (k \in \mathbb{Z})$$

Arkuskosinus ima smisla , ako je

$$0 < 2^x \leq 1,$$

odakle je $-\infty < x \leq 0$. Sleduje, $-\infty < x < 0$ i $x \neq -1, -2, \ldots$. ►

100. $y = (2x)!$

◄ Izraz zdesne strane ima smisla, ako je

$$2x = n \ (n \in \mathbb{N}),$$

zato je oblast definisanosti skup $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\right\}$. ►

101. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$.

◄ Koren ima smisla pod uslovom da je

$$\sin 2x \geq 0 \text{ i } \sin 3x \geq 0.$$

Tada je

$$2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi \ i \ 2k\pi \leq 3x \leq \pi + 2k\pi, \text{ ili}$$

$$k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \ i \ \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Iz sistema nejednakosti nalazimo oblast definisanosti:

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \ ►$$

Odrediti oblast definisanosti i skup vrednosti sledećih funkcija:

102. $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

◄ Logaritam ima smisla ako je

$$1 - 2\cos x > 0.$$

Rešavanjem ove nejednakosti nalazimo:

$$X : 2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Pošto je

$$0 < 1 - 2\cos x \leq 3,$$

a logaritam je rastuća funkcija na intervalu $]0, 3]$, to je za skup vrednosti $Y : -\infty < y \leq \log 3$. ►

103. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

◄ Očigledno je

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \ za \ -\infty < x < +\infty,$$

zato je $X : -\infty < x < +\infty$; $Y : 0 \leq y \leq \pi$. ►

104. $y = (-1)^x$.

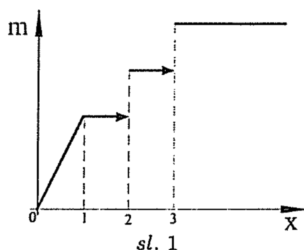
◀ Oblast definisanosti funkcije se sastoji samo iz racionalnih brojeva. Kako je $(-1)^x = \pm 1$, to realan koren te jednačine postoji samo za neparne eksponente korena, tj. izraz $(-1)^x$ ima smisla, ako je $x = \frac{p}{2q+1}$, gde su p i q celi brojevi. Pritom je $y = \pm 1$. ▶

105. Na segmentu $0 \leq x \leq 1$ ose Ox ravnomerno je raspoređena masa od $2g$, au tačkama $x = 2$ i $x = 3$ te ose koncentrisana je masa od po $1g$ u svakoj od njih. Sastaviti analitički izraz funkcije $m = m(x)$, $-\infty < x < +\infty$, brojno jednak masi, koja se nalazi na intervalu $]-\infty, x[$, i nacrtati grafik te funkcije.

◀ Na intervalu $-\infty < x < 0$ nema mase, i zato je $m(x) = 0$, ako je $-\infty < x < 0$. Na segmentu $[0,1]$ masa je raspoređena ravnomerno, zato je masa segmenta $[0,x]$, gde je $0 \leq x \leq 1$, proporcionalna dužini toga segmenta, tj. $m(x) = kx$. Ako je $x = 1$, to je $m = 2$, odavde je $k = 2$, pa je $m(x) = 2x$, ako je $0 \leq x \leq 1$. Na intervalu $]1,2[$ mase nema, zato $m(x)$ na tom intervalu, čuva konstantnu vrednost jednaku $m(1) = 2$. U tački $x = 2$ masa se poveća za $1g$ i očuvava tu vrednost na polusegmentu $[2,3[$. U tački $x = 3$ masa se ponovo poveća za $1g$ i očuvava tu vrednost na celom beskonačnom polusegmentu $[3,+\infty[$. Znači,

$$m(x) = \begin{cases} 0; & -\infty < x < 0; \\ 2x; & 0 \leq x \leq 1; \\ 2; & 1 < x < 2; \\ 3; & 2 \leq x < 3; \\ 4; & 3 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Grafik funkcije nacrtan je na (sl.1). ▶



sl. 1

Na koji skup E_y se preslikava skup E_x funkcijom $y = f(x)$:

106. $y = x^2$, $E_x = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$.

◀ Pošto je

$$y = x^2 \geq 0 \text{ } za \text{ } x \in E_x$$

i najveća vrednost funkcije y je postignuta za $x = 2$, to je

$$E_y = \{y \mid 0 \leq y \leq 4\}. \ \blacktriangleright$$

107. $y = \log x$, $E_x = \{x \mid 10 < x < 1000\}$.
◀ Zbog monotonosti logaritamske funkcije

$$E_y = \{y \mid 1 < y < 3\}. \ \blacktriangleright$$

108. Dokazati, da ako za linearnu funkciju

$$f(x) = ax + b$$

vrednosti argumenta $x = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ čine aritmetičku progresiju, to odgovarajuće vrednosti funkcije

$$y_n = f(x_n) \ (n \in \mathbb{N})$$

čine takođe aritmetičku progresiju.
◀ Neka je

$$x_n = a_0 + (n-1)d,$$

gde je a_0 prvi član, a d razlika progresije. Tada je

$$y_n = a\left(a_0 + (n-1)d\right) + b = (aa_0 + b) + da(n-1);$$

Kako je

$$y_{n+1} - y_n = da \ (n \in \mathbb{N})$$

tj. razlika uzastopnih vrednosti funkcije je konstantna, to vrednosti y_n čine aritmetičku progresiju. ▶

109. Neka je

$$f(x) + f(y) = f(z).$$

Odrediti z, ako je:
a) $f(x) = ax$; b) $f(x) = \arctan x$ $(|x| < 1)$; c) $f(x) = \frac{1}{x}$;
d) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$.
◀ a) Iz jednakosti

$$ax + ay = az$$

nalazimo da je

$$z = x + y \ (a \neq 0).$$

b) Slično iz uslova

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

nalazimo da je

$$z = \frac{xy}{x+y}, \; x \neq -y.$$

c) Saglasno uslovu

$$\arctan x + \arctan y = \arctan z$$

imamo da je

$$z = \tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan y)}{1 - \tan(\arctan x) \cdot \tan(\arctan y)} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

d) Iz jednakosti

$$\log \frac{1+x}{1-x} + \log \frac{1+y}{1-y} = \log \frac{1+z}{1-z},$$

nalazimo da je

$$\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y} = \frac{1+z}{1-z},$$

odakle je $z = \dfrac{x+y}{1-xy}$. ▶

110. Neka je

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f(x))\ldots)}_{n \text{ puta}}.$$

Naći $f_n(x)$, ako je $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

◀ Nalazimo da je

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

Pretpostavimo da je $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Tada je

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}},$$

što u saglasnosti sa metodom matematičke indukcije znači da je

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}. \; ▶$$

111. Naći $f(x)$, ako je

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0)$$

◀ Neka je $z = \frac{1}{x}$. Tada je $x = \frac{1}{z}$ i pošto je $z > 0$, to je

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} = \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}.$$

Zamenjući z sa x, dobijamo

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}. \ ▶$$

Odrediti inverznu funkciju $x = \varphi(y)$ i njenu oblast definisanosti, ako je:

112. $y = 2x + 3$ $(-\infty < x < +\infty)$.

◀ Ako se x menja od $-\infty$ do $+\infty$, to y raste od $-\infty$ do $+\infty$. Zato postoji jedinstvena inverzna funkcija. Nalazimo da je

$$x = \frac{1}{2}(y-3) \quad (-\infty < y < +\infty). \ ▶$$

113. $y = x^2$ za a) $-\infty < x \leq 0$; b) $0 \leq x < +\infty$.

◀ a) Na polusegmentu $-\infty < x \leq 0$ funkcija y opada od $+\infty$ do 0 i zato na $0 \leq y < +\infty$ postoji jedinstvena inverzna funkcija. Rešavajući jednačinu u odnosu na x, nalazimo da je

$$x = -\sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty).$$

Pred korenom je znak $-$ jer se x menja po negativnoj poluosi.

b) Slično prethodnom nalazimo da je

$$x = +\sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty). \ ▶$$

114. $y = \frac{1-x}{1+x}$ $\quad (x \neq -1)$.

◀ Pošto na intervalu $-\infty < x < -1$ funkcija opada od -1 do $-\infty$, a na intervalu $-1 < x < +\infty$ opada od $+\infty$ do -1, to na celoj osi, izuzev $y = -1$, postoji jedinstvena inverzna funkcija. Nalazimo da je

$$x = \frac{1-y}{1+y} \quad (y \neq -1). \ ▶$$

115. $y = \sqrt{1-x^2}$ za a) $-1 \leq x \leq 0$; b) $0 \leq x \leq 1$.

◀ a) Na segmentu $-1 \leq x \leq 0$ funkcija raste od 0 do 1. Zato postoji jedinstvena inverzna funkcija. Rešavanjem jednačine u odnosu na x, nalazimo

$$x = -\sqrt{1-y^2} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

b) Slično prethodnom slučaju je

$$x = \sqrt{1-y^2} \quad (0 \leq y \leq 1). \ ▶$$

116. $y = \sinh x$, gde je

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

◀ Pošto na intervalu $-\infty < x < +\infty$ funkcija $y = \sinh x$ raste od $-\infty$ do $+\infty$ to na intervalu $-\infty < y < +\infty$ postoji jedinstvena inverzna funkcija. Imamo

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \ e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

odakle je $e^x = y \pm \sqrt{1+y^2}$. Birajući u poslednjoj jednakosti znak + (jer je $e^x > 0$) i logaritmujući , dobijamo

$$x = Arshy = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \quad (-\infty < y < +\infty). \ ▶$$

117. Dokazati da se svaka funkcija f definisana u simetričnom intervalu $]-l, l[$, može predstaviti u obliku zbira parne i neparne funkcije.

◀ Označimo

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2};$$

očigledno, funkcije φ i ψ su definisane na intervalu $]-l, l[$. Iz jednakosti

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\varphi(x), \\ \psi(-x) &= \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \psi(x), \end{aligned}$$

sleduje da je funkcija φ neparna, a ψ parna. Kako je

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

to je tvrđenje dokazano. ▶

118. Utvrditi, koja je od sledećih funkcija periodična, i odrediti najmanji njihov period, ako je:

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$; b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;
c) $f(x) = 2\tan\frac{x}{2} - 3\tan\frac{x}{3}$; d) $f(x) = \sin^2 x$; e) $f(x) = \sin(x^2)$;
f) $f(x) = \sqrt{\tan x}$; g) $f(x) = \tan\sqrt{x}$; h) $f(x) = \sin x + \sin\left(\sqrt{2}x\right)$.

Napomena. Funkcija f, definisana na skupu E, naziva se periodičnom, ako postoji takav broj $T > 0$ (period funkcije u širem smislu reči), da je $f(x+T) = f(x)$ za $x \in E$.

◀ Preko T označimo period funkcije f, a preko T_0 njen najmanji pozitivan period.

a) Iz identičnosti

$$\begin{aligned} & f(x+T) - f(x) \\ = \; & A\left(\cos\lambda(x+T) - \cos\lambda x\right) + B\left(\sin\lambda(x+T) - \sin\lambda x\right) \\ = \; & -2A\sin\frac{\lambda T}{2}\cdot\sin\lambda\left(x+\frac{T}{2}\right) + 2B\sin\frac{\lambda T}{2}\cdot\cos\lambda\left(x+\frac{T}{2}\right) \equiv 0, \end{aligned}$$

zadovoljene, ako je $\sin\frac{\lambda T}{2} = 0$, nalazimo da je $T = \frac{2\pi n}{\lambda}$ $(n \in \mathbb{N})$, $T_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

b) Razlika

$$\begin{aligned} & f(x+T) - f(x) \\ = \; & \sin(x+T) - \sin x + \frac{1}{2}\left(\sin 2(x+T) - \sin 2x\right) + \frac{1}{3}\left(\sin 3(x+T) - \sin 3x\right) \\ = \; & 2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) + \sin T\cos 2\left(x+\frac{T}{2}\right) + \frac{3}{2}\sin\frac{3T}{2}\cos 3\left(x+\frac{T}{2}\right) \equiv 0, \end{aligned}$$

se pretvara u identičnost, ako je

$$T = 2\pi n = m\pi = \frac{2k\pi}{3},$$

gde su n, m, k prirodni brojevi, tj. ako je $n = \frac{m}{2} = \frac{k}{3}$. Te jednakosti su ispunjene, ako je $m = 2n$, $k = 3n$. Na taj način je $T = 2n\pi$, $T_0 = 2\pi$.

c) Slično prethodnom, za sve x iz oblasti definisanosti funkcije, identičnost

$$f(x+T) - f(x) = \frac{2\sin\frac{T}{2}}{\cos\frac{x+T}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{2\sin\frac{T}{3}}{\cos\frac{x+T}{2}\cos\frac{x}{3}} \equiv 0$$

je ispunjena, ako je $\sin\frac{T}{2} = 0$ i $\sin\frac{T}{3} = 0$, tj. ako je $T = 2n\pi = 3m\pi$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Odavde je $\frac{n}{3} = \frac{m}{2} = k$. Kako je $n = 3k$, $m = 2k$, to je $T = 6k\pi$, $T_0 = 6\pi$.

d) Iz uslova, da je

$$f(x+T)-f(x)=\sin^2(x+T)-\sin^2 x=\sin T\cdot\sin(2x+T)\equiv 0,$$

nalazimo: $\sin T=0$, $T=n\pi$ $(n\in\mathbb{N})$, $T_0=\pi$.

e) $\sin\left(x^2\right)$ nije periodična, jer rastojanje između njenih uzastopnih nula teži nuli:

$$\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}\to 0 \text{ kad } k\to\infty.$$

f) Za sve x iz oblasti definisanosti funkcije imamo:

$$f(x+T)-f(x)=\frac{\sin T}{\cos(x+T)\cdot\cos x\cdot\left(\sqrt{\tan(x+T)}+\sqrt{\tan x}\right)}\equiv 0.$$

Odavde je $\sin T=0$, $T=n\pi$ $(n\in\mathbb{N})$, $T_0=\pi$.

g) $\tan\sqrt{x}$ postaje nula za $x=k^2\pi^2$ $(k\in\mathbb{Z})$. Rastojanje među uzastopnim nulama $(k+1)^2\pi^2$ i $k^2\pi^2$ teži $+\infty$ i dakle funkcija nije periodična.

h) Pokažimo da je funkcija f neperiodična. U tom cilju pretpostavimo suprotno. Neka je funkcija f periodična sa periodom T. Tada važi identičnost:

$$f(x+T)-f(x)=2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)+2\sin\frac{T\sqrt{2}}{2}\cos\left(x\sqrt{2}+\frac{T\sqrt{2}}{2}\right)\equiv 0,$$

iz koje sledi, da je $\sin\frac{T}{2}=0$ i $\sin\frac{T\sqrt{2}}{2}=0$. Odavde je $2n\pi=\sqrt{2}m\pi$, gde su m i n prirodni brojevi. Poslednja jednakost je nemoguća, jer je $\frac{m}{n}\neq\sqrt{2}$ za bilo koja dva prirodna broja m i n. Pretpostavka da je funkcija periodična je protivrečna. Znači f je neperiodična. ►

119. Dokazati da je za Dirihleovu funkciju

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$$

period bilo koji racionalan broj.

◄ Neka je T proizvoljan racionalan broj. Saglasno uslovu, imamo

$$\chi(x+T)=\begin{cases}1, & x+T\in\mathbb{Q},\\ 0, & x+T\in\mathbb{I},\end{cases}$$

Pošto je T racionalan broj, to je zbir $x+T$ racionalan za racionalno x, i iracionalan za iracionalno x. Dakle,

$$\chi(x+T)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{I},\end{cases}$$

i $\chi(x+T)=\chi(x)$, što je i trebalo dokazati. ►

120. Dokazati da je zbir i proizvod dve periodične funkcije definisane na istom skupu čiji su periodi samerljivi, takođe periodična funkcija.

◄ Neka su φ i ψ definisane na istom skupu sa samerljivim periodima T_1 i T_2. Neka je $\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}$, gde su m i n uzajamno prosti brojevi i $T=nT_1=mT_2$. Tada je broj T period zbira $\varphi(x)+\psi(x)$ i proizvoda $\varphi(x)\cdot\psi(x)$. Stvarno,

$$\begin{aligned}\varphi(x+T)+\psi(x+T) &= \varphi(x+nT_1)+\psi(x+mT_2)=\varphi(x)+\psi(x),\\ \varphi(x+T)\cdot\psi(x+T) &= \varphi(x+nT_1)\cdot\psi(x+mT_2)=\varphi(x)\cdot\psi(x).\end{aligned}$$ ►

121. Funkcija f se naziva antiperiodičnom, ako je

$$f(x+T)=-f(x)\quad (T>0).$$

Dokazati da je f periodična sa periodom $2T$.

◄ Saglasno uslovu, imamo

$$f(x+2T)=f(x+T+T)=-f(x+T)=-(-f(x))=f(x).$$

Sledi, f je periodična funkcija sa periodom $2T$. ►

122. Dokazati da ako za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ važi jednakost

$$f(x+T)=kf(x),$$

gde su k i T pozitivne konstante, to je

$$f(x)=a^x\varphi(x),$$

gde je a konstanta, a φ periodična funkcija sa periodom T.

◄ Stavimo $k=a^T$. Tada je

$$f(x+T)=a^Tf(x).$$

Proizvoljna funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je predstavljiva u obliku

$$f(x)=a^x\varphi(x),$$

gde je φ neka funkcija. Saglasno uslovu, imamo

$$a^{x+T}\varphi(x+T)=a^Ta^x\varphi(x).$$

Posle skraćivanja sa a^{x+T}, jer je $a^{x+T}>0$, dobijamo $\varphi(x+T)=\varphi(x)$, odakle i sledi tvrđenje. ►

1.4 Granične vrednosti funkcija

1^0 Ograničenost funkcije. Funkcija f, definisana na skupu X, naziva se ograničenom na tom skupu, ako postoje brojevi m i M, takvi da je $m \leq f(x) \leq M \quad (x \in X)$. Broj $m_0 = \inf\{f(x) : x \in X\}$ naziva se infimumom funkcije f, a broj $M_0 = \sup\{f(x) : x \in X\}$ supremumom funkcije f na skupu X. Razlika $M_0 - m_0$ se zove oscilacija funkcije f na skupu X.

2^0 Granična vrednost funkcije. Neka je funkcija f definisana na intervalu $]\alpha, \beta[$, izuzev možda u tački $a \in]\alpha, \beta[$. Broj A se zove graničnom vrednošću funkcije f u tački a, ako za bilo koji broj $\varepsilon > 0$ postoji takav broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, kad god je $0 <| x - a |< \delta$. Pri tom se zapisuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ ili $f(x) \to A$ kad $x \to a$.

Postoji i ekvivalentna definicija granične vrednosti: Broj A se naziva graničnom vrednošću funkcije f u tački a, ako za bilo koji niz $\{x_n\}$ tačaka skupa X, koji konvergira ka a $(x_n \neq a)$ važi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Navodimo dve važne granične vrednosti:

$$1) \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \; 2) \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Košijev kriterijum. Konačna granična vrednost funkcije f u tački $x = a$ postoji ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da za svaki par vrednosti x' i x'' iz oblasti definisanosti funkcije f za koje je $0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta$, važi $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3^0 Jednostrane granične vrednosti. Neka je funkcija f definisana na poluintervalu $]\alpha, a]$, izuzev možda u tački a. Broj A' se naziva levom graničnom vrednošću funkcije f u tački a : $A' = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0)$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da je $|A' - f(x)| < \varepsilon$ kad god je $0 < a - x < \delta(\varepsilon)$. Slično, ako je funkcija f definisana na poluintervalu $[a, \beta[$, izuzev možda u tački a, to se broj A'' naziva desnom graničnom vrednošću funkcije f u tački a : $A'' = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0)$, ako je $|A'' - f(x)| < \varepsilon$ za $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$. Za postojanje granične vrednosti funkcije f u tački a potrebno je i dovoljno, da bude ispunjena jednakost: $f(a - 0) = f(a + 0)$.

4^0 Beskonačna granična vrednost. Uslovno, zapis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, označava da za proizvoljno $E > 0$ važi $|f(x)| > E$, ako je $0 < |x - a| < \delta(E)$.

5^0 Landauov simbol. Za dve funkcije f i g definisane u oblasti D, simbol $f = O\,(g)$ označava da postoji takva konstanta $K > 0$, da je $|f(x)| \leq K \cdot g(x)$ za sve $x \in D$.

6^0 Klasifikacija beskonačno malih veličina. Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, to se funkcija f naziva beskonačno malom kad $x \to x_0$.

Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, to uvek možemo zapisati $f(x) = b + \alpha(x)$, gde je α beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$.

Neka su α i β beskonačno male funkcije kad $x \to x_0$.

a) Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ $(0 \neq C =\text{konst.})$, to se funkcije α i β nazivaju beskonačno malim istog reda i zapisuje $\alpha = O^*(\beta)$, $\beta = O^*(\alpha)$.

b) Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, to se funkcija α naziva beskonačno malom višeg reda od β i zapisuje $\alpha = o(\beta)$; funkcija β se u tom slučaju naziva beskonačno malom nižeg reda od α.

c) Ako je $\alpha - \beta = o(\alpha)$, to se funkcije α i β nazivaju ekvivalentnim beskonačno malim i zapisuje $\alpha \sim \beta$. Da bi α i β bile ekvivalentne, potrebno je i dovoljno da bude: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

d) Ako $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ne postoji, to se funkcije α i β nazivaju neuporedivim.

7^0 **Skala beskonačno malih funkcija.** Neka je α beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$, čija se brzina konvergencije nuli uzima za jedinicu. Beskonačno male funkcije $A_1\alpha$, $A_2\alpha^2, .., A_n\alpha^n$, kad $x \to x_0$ gde je $A_j =$ konst. $A_j \neq 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$ zovu se redom, beskonačno male prvog, drugog, .., $n-$tog reda. Često se za α uzima $x - x_0$, kad $x \to x_0$.

8^0 **Neke asimptotske formule.** Kad $x \to 0$ važe formule $\sin x = x + o(x^2)$; $\tan x = x + o(x^2)$; $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Ako je beskonačno mala funkcija f, kad $x \to x_0$, ekvivalentna beskonačno maloj $\alpha(x) = A(x - x_0)^k$, gde je $0 \neq A =$ konst., $k > 0$, tj. $f(x) = A(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right)$, to se funkcija α naziva glavnim članom funkcije f kad $x \to x_0$.

9^0 **Princip zamenjivanja beskonačno malih.** Ovaj princip se sastoji u zameni beskonačno malih ekvivalentnim beskonačno malim, prilikom izračunavanja graničnih vrednosti. Neka su α_j $(j = 1, 2, ..., k)$ beskonačno male funkcije kad $x \to x_0$, pri čemu je među njima α_s beskonačno mala najnižeg reda. Tada je beskonačno mala funkcija $\gamma(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(x)$ kad $x \to x_0$, ekvivalentna funkciji α_s. Zaista, prema uslovu $\alpha_j = o(\alpha_s)$ $(j = 1, 2, .., s - 1, s + 1, .., k)$, imamo $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\alpha_s(x)} = 1$. Neka je β beskonačno mala kad $x \to x_0$, i neka se zahteva nalaženje granične vrednosti količnika $\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$; očigledno, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\alpha_s(x)} \cdot \frac{\alpha_s(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_s(x)}{\beta(x)}$, jer je $\gamma \sim \alpha_s$. Na taj način, pri izračunavanju limesa proizvoda i količnika, beskonačno male funkcije možemo zameniti svojim glavnim članovima. U slučaju zbira i razlike, to u opštem slučaju, nije moguće.

10^0 **Delimične granične vrednosti.** Ako za neki niz $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$ važi jednakost $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = B$, to se broj B (ili simbol ∞) naziva

delimičnom graničnom vrednošću (konačnom ili beskonačnom) funkcije f u tački x_0. Najveća i najmanja među tim delimičnim graničnim vrednostima označava se sa $\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$ i $\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$ i nazivaju se redom gornja i donja granična vrednost funkcije f u tački x_0. Jednakost $\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$ je potreban i dovoljan uslov za postojanje granične vrenosti (konačne ili beskonačne) funkcije f u tački x_0.

Funkcija f se naziva beskonačno velikom kad $x \to x_0$, ako je $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Beskonačno velike funkcije se upoređuju slično kao što se upoređuju beskonačno male.

11^0 Rešeni zadaci.

123. Neka je funkcija f definisana uslovima:

a) $f(x) = n$, ako je $x = \frac{m}{n}$, gde su m i n uzajamno prosti celi brojevi, $n > 0$;

b) $f(x) = 0$, ako je x iracionalan.

Dokazati da tada ona nije ograničena u svakoj tački x (tj. nije ograničena u bilo kojoj okolini te tačke).

◀ Neka je $x = \frac{p}{q}$ proizvoljan racionalan broj. Tada, $r_k = \frac{kp+1}{kq} \to \frac{p}{q}$ kad $k \to \infty$, tj. pripada proizvoljnoj okolini tačke $x = \frac{p}{q}$. A kako je $f(r_k) = kq \to \infty$ kad $k \to \infty$, to funkcija f nije ograničena u proizvoljnoj okolini tačke x. Neka je dalje, $x = \alpha$, gde je α iracionalan. Tada postoji niz racionalnih brojeva $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ takav da je $\lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = \alpha$. Pri tom je $\lim_{i\to\infty} q_i = +\infty$. Pošto $f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = q_i \to +\infty$, kad $i \to \infty$, a tačke niza $\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}$ pripadaju proizvoljnoj okolini tačke α, to funkcija f nije ograničena. ▶

124. Ako je funkcija f definisana i lokalno ograničena u svakoj tački : a) intervala, b) segmenta; da li je ta funkcija ograničena na datom intervalu tj. segmantu? Navesti odgovarajuće primere.

◀ a) Uopšte rečeno, nije. Na primer, funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ ograničena je u okolini proizvoljne tačke intervala $0 < x < 1$, ali nije ograničena na tom intervalu, jer $f(x_n) \to +\infty$ kad $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $0 < x_n < 1$ za $n \in \mathbb{N}$.

b) Funkcija je ograničena. Za dokaz pretpostavimo suprotno: neka je funkcija neograničena. Tada za bilo koji prirodan broj n postoji $x_n \in [a, b]$, gde je $[a, b]$ segment, dat u uslovu zadatka, tako da je

$$f(x_n) > n.$$

Kako je $a \leq x_n \leq b$ (tj. $\{x_n\}$ je ograničen) to postoji podniz $\{x_{k_n}\} \subset \{x_n\}$, takav da je

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c \in [a, b].$$

Po uslovu, f je lokalno ograničena u okolini bilo koje tačke, tj. postoje takvi $\delta > 0$ i $E > 0$, da je

$$|f(x)| \leq E, \ x \in]c-\delta, c+\delta[.$$

S druge strane, postoji takav broj N, da je $k_n > E$ za $n > N$ i $x_{k_n} \in]c-\delta, c+\delta[$, a tada je $f(x_{k_n}) > k_n > E$. Dobijena protivrečnost dokazuje tvrđenje. ►

125. Pokazati, da je funkcija

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

ograničena na intervalu $-\infty < x < +\infty$.

◄ Jasno, $f(x) > 0$, tj. funkcija je ograničena odozdo. Dalje, iz nejednakosti $(1-x^2)^2 \geq 0$ sledi da je $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$, a pošto je $1+x^4 \geq 1$, to je

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Znači, $0 < f(x) \leq \frac{3}{2}$ $(-\infty < x < +\infty)$. ►

126. Pokazati, da je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

neograničena u proizvoljnoj okolini tačke $x = 0$, međutim nije beskonačno velika kad $x \to 0$.

◄ Neka je $x_n = \frac{2}{n\pi}$. Očigledno je da kad $n \to \infty$ vrednosti x_n pripadaju proizvoljnoj okolini tačke $x = 0$. Navedeno tvrđenje onda proizilazi iz činjenice, da je $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{2n})| = \infty$, a $f(x_{2n-1}) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. ►

127. Ispitati ograničenost funkcije

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

na intervalu $0 < x < \varepsilon$.

◄ Pošto je $0 \leq \sin^2 \frac{\pi}{x} \leq 1$, a funkcija $x \mapsto \ln x$ raste, to je $f(x) \leq \max\{0, \ln \varepsilon\}$, tj. f je ograničena odozgo. Dalje, uzmimo $x_n = \frac{2}{2n+1}$. Tada posle nekog n_0, svi x_n pripadaju intervalu $]0, \varepsilon[$. Pri tom je

$$f(x_n) = \ln \frac{2}{2n+1} = -\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \to -\infty$$

kad $n \to \infty$, tj. f je neograničena odozdo. ►

128. Pokazati da funkcija

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

u oblasti $0 \leq x < +\infty$ ima infimum $m = 0$ i supremum $M = 1$.

◀ Očigledno je

$$0 \leq \frac{x}{x+1}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

Neka je ε proizvoljno i $0 < \varepsilon < 1$. Tada je

$$f(x) = \frac{x}{x+1} < \varepsilon \ za \ 0 < x < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Sledi, $\inf\{f(x) : 0 \leq x < +\infty\} = 0$. Dalje, očigledno je $\frac{x}{x+1} < 1$, za $0 \leq x < +\infty$. S druge strane za ranije navedeno ε je

$$f(x) = \frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon \ za \ x > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

tj. $\sup\{f(x) : 0 \leq x < +\infty\} = 1$. ▶

129. Funkcija f je definisana i rastuća na segmentu $[a,b]$. Čemu su jednaki supremum i infimum te funkcije na $[a,b]$?

◀ Pošto f raste na $[a,b]$, to je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za svako $x \in [a,b]$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i takvo da je $f(a) + \varepsilon < f(b)$. Tada postoji $x' \in [a,b]$, takvo da je

$$f(a) \leq f(x') < f(a) + \varepsilon$$

(na primer, $x' = a$), tj. $\inf\{f(x) : a \leq x \leq b\} = f(a)$. Slično, ako je $f(b) - \varepsilon < f(b)$, tada postoji $x'' \in [a,b]$ takvo da je

$$f(b) - \varepsilon < f(x'') \leq f(b)$$

(na primer $x'' = b$). tj. $\sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} = f(b)$. ▶

130. Odrediti oscilaciju funkcije $f(x) = x^2$ na intervalima:

a) $]1,3[$; b) $]1,9;2,1[$; c) $]1,99;2,01[$; d) $]1,999;2,001[$.

◀ Na svakom od intervala funkcija $f(x) = x^2$ raste, zato postoje konačne granične vrednosti na krajevima intervala. Dodefinišući funkciju na krajevima intervala svojim graničnim vrednostima i koristeći prethodni primer, dobijamo:

a) $M_0 - m_0 = f(3-0) - f(1+0) = 9 - 1 = 8$;

b) $M_0 - m_0 = f(2,1-0) - f(1,9+0) = 4,41 - 3,61 = 0,8$;

c) $M_0 - m_0 = f(2,01-0) - f(1,999+0) = 4,0401 - 3,9601 = 0,08$;

d) $M_0 - m_0 = f(2,001 - 0) - f(1,999 + 0) = 4,004 - 3,996 = 0,008.$ ▶

131. Neka su $m[f]$ i $M[f]$ redom infimum i supremum funkcije f na razmaku $]a, b[$. Dokazati da ako su f_1 i f_2 funkcije, definisane na $]a, b[$, to je

a) $m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2]$; b) $M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2]$.

◀ Dokažimo nejednakost a) (nejednakost b) se dokazuje slično). Označimo

$$m_1 = \inf\{f_1(x) : a < x < b\};\ m_2 = \inf\{f_2(x) : a < x < b\}.$$

Tada je

$$f_1(x) \geq m_1 \ i\ f_2(x) \geq m_2, \qquad (x \in]a, b[).$$

Sabirajući poslednje nejednakosti, dobijamo

$$f_1(x) + f_2(x) \geq m_1 + m_2, \qquad x \in]a, b[,$$

odakle je

$$m[f_1 + f_2] \geq m_1 + m_2 = m[f_1] + m[f_2]. \ ▶$$

132. Pokazati da funkcija

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

nema graničnu vrednost kad $x \to 0$.

◀ Navedeno tvrđenje sledi iz toga, što niz $x_n = \frac{2}{\pi(1+2n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ teži nuli kad $n \to \infty$, a $f(x_n) = (-1)^n$ uopšte nema graničnu vrenost. ▶

133. Pomoću "$\varepsilon - \delta$" rasuđivanja dokazati, da je $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. Popuniti sledeću tablicu:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
δ	?	?	?	?

◀ Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada

$$|x^2 - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \leq |x-2|^2 + 4|x-2| < \varepsilon$$

kad god je

$$0 < |x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon} + 2}.$$

Poslednja nejednakost je tim pre ispunjena, ako je

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+\varepsilon}} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+4\varepsilon+\varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+2)} = \delta(\varepsilon) > |x-2|.$$

Neka je $\varepsilon = \frac{1}{10^n}$. Tada je $\delta(\frac{1}{10^n}) = \frac{1}{4\cdot10^{n}+2}$ i $\delta(10^{-1}) = \frac{1}{42}$; $\delta(10^{-2}) = \frac{1}{402}$; $\delta(10^{-3}) = \frac{1}{4002}$; $\delta(10^{-4}) = \frac{1}{40002}$. ►

134. Na jeziku "$E - \delta$" dokazati da je $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Popuniti sledeću tablicu:

E	10	100	1000	1000
δ	?	?	?	?

◄ Neka je $E > 0$ proizvoljno. Tada je $\frac{1}{(x-1)^2} > E$, kad god je $(x-1)^2 < \frac{1}{E}$ ili

$$0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}} = \delta(E)$$

Odavde nalazimo, da je $\delta(10) = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\delta(100) = \frac{1}{10}$; $\delta(1000) = \frac{1}{10\sqrt{10}}$; $\delta(10000) = \frac{1}{100}$. ►

135. Neka je $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, gde su a_i $(i \in \mathbb{N}_0)$ realni brojevi. Dokazati, da je $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$.

◄ Ne ograničavajući opštost, možemo smatrati da je $a_0 \neq 0$. Za dovoljno veliko $|x|$ imamo

$$|P(x)| = |x|^n \cdot \left|a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right| \geq |x|^n \cdot \frac{|a_0|}{2}.$$

Pošto je $\lim\limits_{x\to\infty} |x|^n \cdot \frac{|a_0|}{2} = +\infty$, to je $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$. ►

136. Neka je

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}; \ a_0, b_0 \neq 0.$$

Dokazati, da je

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & n > m; \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

◄ Neka je $n > m$. Tada je

$$|R(x)| = |x|^{n-m} \cdot \left|\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}}\right| > |x|^{n-m} \cdot \left|\frac{a_0}{2b_0}\right|$$

kad je $|x|$ dovoljno veliko. Na osnovu toga što je $\lim\limits_{x\to\infty} |x|^{n-m} \cdot \left|\frac{a_0}{2b_0}\right| = \infty$, imamo da je $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \infty$. Ako je $n = m$, to je

$$R(x) = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{x^n}} \to \frac{a_0}{b_0}, \ x \to \infty.$$

Na kraju, ako je $n < m$, za dovoljno veliko $|x|$ imamo

$$|R(x)| < \frac{1}{|x|^{m-n}} \cdot \left|\frac{2a_0}{b_0}\right|,$$

odakle sledi, da je $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = 0$. ▶

137. Neka $x \to 0$. Dokazati sledeće jednakosti:

a) $x \sin\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} + o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$; b) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$;

c) $\ln x = o\left(x^{-\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$; d) $\arctan\frac{1}{x} = O(1)$.

◀ Navedene jednakosti slede iz toga što je:

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{x\to+0}\frac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} &= 1; \text{b)} \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{-\ln t}{t^{\varepsilon}} = 0 \ \left(t = \frac{1}{x}\right); \\ \text{c)}\ (1+x)^n &= 1 + nx + C_2^n x^2 + \cdots + x^n \\ &= 1 + nx + \left(C_2^n x + \cdots + x^{n-1}\right)x = 1 + nx + \alpha(x)\cdot x, \end{aligned}$$

gde je $\alpha(x) = C_2^n x + \cdots + x^{n-1} \to 0$ kad $x \to 0$;

d) $\left|\arctan\frac{1}{x}\right| < \frac{\pi}{2}$. ▶

138. Neka $x \to 0$. Izdvojiti glavni član oblika Cx^n (C je konstanta) i odrediti red u odnosu na promenljivu x sledećih funkcija:

a) $2x - 3x^2 + x^5$; b) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$; c) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

d) $\tan x - \sin x$.

◀ a) Iz toga što je

$$2x - 3x^2 + x^5 = 2x + (-3x + x^4)x = 2x + \alpha(x)\cdot x,$$

gde $\alpha(x) \to 0$ kad $x \to 0$, sledi da je

$$2x - 3x^2 + x^5 = 2x + o(x), \text{ tj. } Cx^n = 2x \ (n = 1).$$

b) Iz jednakosti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

sleduje da je

$$Cx = x \ (n = 1), \text{ tj. } \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x.$$

c) Pošto je

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-2x} - (1-x)}{x^2} + \frac{1 - x - \sqrt[3]{1-3x}}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \text{ to je } Cx^n = \frac{1}{2}x^2 (n = 2). \end{aligned}$$

d) Imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2},$$

i zato je $Cx^3=\frac{1}{2}x^3$ $(n=3)$. ▶

139. Neka $x\to+\infty$. Izdvojiti glavni član oblika Cx^n i odrediti red rasta u odnosu na beskonačnu veliku x sledećih funkcija:

a) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; b) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

◀ a) Pošto je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^{-1}}+x^{-\frac{1}{6}}\right)=1,$$

to je $Cx^n=x^{\frac{2}{3}}$ $(n=\frac{2}{3})$.

b) Imamo

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{8}}\sqrt{x^{-4}+\sqrt{x^{-1}+1}}\sim x^{\frac{1}{8}},$$

zato je $Cx^n=x^{\frac{1}{8}}$ $(n=\frac{1}{8})$. ▶

Pri rešavanju nekih od sledećih primera, zameniti beskonačno malu ekvivalentnom funkcijom.

140. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$; $(m,\ n\in\mathbb{N})$.

◀ a) Razlažući po Njutnovoj binomnoj formuli, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(C_2^n m^2-C_2^m n^2\right)x^2+o(x^2)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(C_2^n m^2-C_2^m n^2+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=C_2^n m^2-C_2^m n^2=\frac{mn(n-m)}{2}. \end{aligned}$$

b) Stavljajući $x=1+t$ $(t\to 0$ kad $x\to 1)$ i koristeći princip izostavljanja beskonačno malih, nalazimo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^m-1}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{mt+o(t)}{nt+o(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{mt}{nt}=\frac{m}{n}.$$

c) Neka je $x=1+t$. Tada $t\to 0$ kad $x\to 1$. I onda za limes L, mamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{(1+t)^n-1}-\frac{m}{(1+t)^m-1}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{nt+C_2^n t^2+o(t^2)}-\frac{m}{mt+C_2^m t^2+o(t^2)}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(nC_2^m-mC_2^n)t^2+o(t^2)}{mnt^2+o(t^2)}=\frac{nC_2^m-mC_2^n}{mn}=\frac{m-n}{2}. \end{aligned}$$ ▶

141. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{a}\right)^2\right)$.

◀ Koristeći rezultat primera 2, a) dobijamo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nx^2+\frac{2ax}{n}(1+2+\cdots+(n-1))+\frac{a^2}{n^2}\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nx^2+\frac{2ax}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)=x^2+ax+\frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$ ▶

142 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} 2^2+4^2+\cdots+(2n)^2 &= 4\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}, \\ 1^2+2^2+\cdots+(2n)^2 &= \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} \end{aligned}$$

(prema primeru 2, a)). Oduzimajući od druge prvu jednakost, dobijamo

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(4n^2-1)}{2n(n+1)(2n+1)}=1.$$ ▶

143. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+\cdots+(3n-2)^3}{(1+4+\cdots+(3n-2))^2}$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} B &= 1^3+4^3+\cdots+(3n-2)^3=(3\cdot1-2)^3+(3\cdot2-2)^3+\cdots+(3\cdot n-2)^3 \\ &= 27(1^3+2^3+\cdots+n^3)-54(1^2+2^2+\cdots+n^2)+36(1+2+\cdots+n)-8n \\ &= 27\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-54\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+36\cdot\frac{n(n+1)}{2}-8n, \\ I &= (1+4+\cdots+(3n-2))^2=\frac{n^2(3n-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Pošto je u brojiocu B i imeniocu I najveći stepen od n jednak 4, to je granična vrednost jednaka količniku koeficijenata uz n^4, tj. 3. ▶

Naći granične vrednosti:

144. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}$.

◀ Pretpostavljajući da je $x_0 > 0$, stavimo $x = x_0 + t$. Jasno, $t \to 0$ kad $x \to x_0$. Računajući da je $|t| < x_0$, imamo

$$\sqrt[n]{x_0}\left(1 - \frac{|t|}{x_0}\right) < \sqrt[n]{x_0 + t} = \sqrt[n]{x_0}\sqrt[n]{1 + \frac{t}{x_0}} < \sqrt[n]{x_0}\left(1 + \frac{|t|}{x_0}\right),$$

odakle je

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \lim_{t \to 0} \sqrt[n]{x_0 + t} = \sqrt[n]{x_0}. \text{ ▶}$$

145. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

◀

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1. \text{ ▶}$$

146. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x \to a}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) \\ &= \lim_{x \to a}\left(\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}}\right) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x+a}}\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \text{ ▶} \end{aligned}$$

147. $\lim\limits_{x \to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

◀ Očigledno je

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \to 8} \frac{(9+2x-25)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{(x-8)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)} \\ &= 2\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Napomena. Prilikom rešavanja primera 145-147 korišćen je rezultat primera 144. ▶

148. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

◀ Stavimo

$$\sqrt[n]{1+x}-1=t$$

Tada je $x=(1+t)^n-1$. Računajući da je $|x|<1$, imamo

$$1-|x|<\sqrt[n]{1+x}<1+|x|,$$

odakle je

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1,$$

tj. $t\to 0$ kad $x\to 0$. A tada je:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{nt+o(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{nt}=\frac{1}{n}.\ ▶$$

149. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

◀
$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}+\frac{3-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}}.$$

Koristeći limese

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\frac{1}{6},\quad \lim_{x\to 7}\frac{3-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}=-\frac{1}{27},\quad \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\frac{1}{32},$$

dobijamo

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{32}}=\frac{112}{27}.\ ▶$$

150. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

◀ Stavimo

$$\sqrt[5]{1+5x}-1=t$$

Jasno, $t\to 0$, ako $x\to 0$. Tada je $x=\frac{1}{5}\left((1+t)^5-1\right)$ i

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{5}\left((1+t)^5-1\right)}{t-\frac{1}{5}\left((1+t)^5-1\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}\left(5t+o(t)\right)^2}{t-\frac{1}{5}\left(5t+10t^2+o(t^2)\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+o(t^2)}{-2t^2+o(t^2)}=-\frac{1}{2}.\ ▶
\end{aligned}$$

151. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ $(m,n\in\mathbb{Z})$.

◀ Koristeći rezultat primera 148, imamo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}\left(\sqrt[n]{1+\alpha x}-1\right)+\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to0}\sqrt[m]{1+\beta x}\cdot\alpha\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}+\beta\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{\beta x} = \frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{m}.\end{aligned}$$ ▶

152. Neka je $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ i $m\in\mathbb{Z}$. Dokazati, da je

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

◀ Pošto $P(x)\to0$ kad $x\to0$, to je (prema primeru 148)

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)}\cdot\frac{P(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)}\cdot\lim_{x\to0}\sum_{k=1}^{n}a_kx^{k-1}=\frac{a_1}{m}.\end{aligned}$$ ▶

Naći granične vrednosti:

153. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\quad(m,\,n\in\mathbb{N}\,).$

◀ Stavimo $x=(1+t)^{mn}$. Tada $t\to0$ kad $x\to1$. Onda je

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)^m-1}=\frac{n}{m}\ \text{(prema primeru 140.b)).}$$ ▶

154. $\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$

◀ Stavljajući $1-x=t$ ($t\to0$ kad $x\to1$), dobijamo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})\,(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.\\ &= \lim_{t\to0}\frac{1-\sqrt{1-t}}{t}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{t}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{1-t}}{t}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}\ \text{(prema primeru 148).}\end{aligned}$$ ▶

Rešiti limese u primerima (155-158 osloboditi se korena iz brojioca i preći na izraz sa očiglednom graničnom vrednošću).

155. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right).$

◀ Imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{2x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{4}. \ ▶ \end{aligned}$$

156. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

◀ Dodavanjem i oduzimanjem x, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right) = 1+1=2. \ ▶ \end{aligned}$$

157. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)}-x\right)$.

◀ Stavimo $\frac{1}{x}=t$, tada $t\to+0$ kad $x\to+\infty$ i

$$\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)}-x = \frac{\sqrt[n]{1+P(t)}-1}{t},$$

gde je

$$P(t)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)t+(a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_n)t^2+\cdots+a_1a_2...a_nt^n.$$

Koristeći rezultat primera 152, nalazimo da je tražena granična vrednost jednaka:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}. \ ▶$$

158. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$.

◀

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n+\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n = 0+2^n=2^n. \ ▶ \end{aligned}$$

159. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

◀ Ako sa L označimo traženi limes, onda dižući na n–ti stepen i sređujući slične članove, dobijamo

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{x}\left(nx\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{n-1} + o(x)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} 2\left(n\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{n-1} + \frac{o(x)}{x}\right) = 2n. \ ▶
\end{aligned}
$$

Naći granične vrednosti:

160. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m, n$–celi; $m \neq 0$, $n \neq 0)$.

◀ Stavimo $x = \pi + t$ $(t \to 0)$. Tada je

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(m\pi + mt)}{\sin(n\pi + nt)} = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^m \sin mt}{(-1)^n \sin nt} \\
&= (-1)^{m-n} \cdot \frac{m}{n} \lim_{t\to 0} \frac{\sin mt}{mt} \cdot \frac{nt}{\sin nt} = (-1)^{m-n} \cdot \frac{m}{n}. \ ▶
\end{aligned}
$$

161. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

◀

$$
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.
$$

Na taj način je, $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ kad $x \to 0$. ▶

162. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

◀ Iz nejednakosti

$$
|1 - \cos x| = 2\sin^2 \frac{x}{2} < |x|,
$$

proizilazi, da je

$$
\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad i \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1.
$$

Na taj način je, $\tan x = x + o(x)$, kad $x \to 0$. ▶

163. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

◀

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} - 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} = 2. \ ▶
$$

164. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$

◀ Pošto kad $x \to 0$,

$$1-\cos x = o(x),\ 1-\cos px = o(x),\ \sin px = px + o(x),$$

to je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{px+o(x)} = \frac{1}{p}. \ ▶$$

165. Dokazati jednakosti:

a) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$; b) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$ $(a \neq \frac{2n-1}{2}\pi;\ n \in \mathbb{Z})$.

◀ a) Imamo

$$0 \leq |\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq |x-a|,$$

odakle je $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$.

b) Slično,

$$0 \leq |\cos x - \cos a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}\right| \leq |x-a|$$

tj. $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

c)

$$\lim_{x\to a} \tan x = \frac{\lim\limits_{x\to a} \sin x}{\lim\limits_{x\to a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a,$$

ako je $\cos a \neq 0$, tj. ako je $a \neq \frac{2n-1}{2}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ▶

Naći granične vrednosti:

166. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

◀ Očigledno,

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} = \cos a$$

(korišćeno je da $\cos x \to \cos b$, kad $x \to b$). ▶

167. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cot x-\cot a}{x-a}$

◀ Koristeći formulu sabiranja kotangensa, nalazimo:

$$\lim_{x\to a} \frac{\cot x - \cot a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)\sin x \sin a} = -\frac{1}{\sin^2 a}\ (a \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}). \ ▶$$

168. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$

◀ Dovodeći brojilac na proizvod, imamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-2\sin\frac{x}{2}\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos(a+x)\right)=-\cos a. \ ▶
\end{aligned}$$

169. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}$

◀ Slično prethodnom primeru je za $a\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\frac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left((\cot(a+2x)-\cot(a+x))-(\cot(a+x)-\cot a)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{-\sin x}{\sin(a+2x)\sin(a+x)}+\frac{\sin x}{\sin(a+x)\sin a}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(a+x)}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2\cos(a+x)}{\sin a\cdot\sin(a+2x)}\right)=\frac{2\cos a}{\sin^3 a}. \ ▶
\end{aligned}$$

170. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

◀ Rastavljajući brojilac i imenilac na činioce dobijamo:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(1+\sin x)(2\sin x-1)}{(\sin x-1)(2\sin x-1)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1+\sin x}{\sin x-1}=-3. \ ▶
\end{aligned}$$

171. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$.

◀ Rastavljajući brojilac na činioce, imamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x\left(\tan^2 x-\tan^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x\left(\tan x+\tan\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x\left(\tan x+\tan\frac{\pi}{3}\right)\frac{-1}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}}=-24. \ ▶
\end{aligned}$$

172. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$.

◀ Posle očiglednih transformacija nalazimo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan^2 a - \tan^2 x}{1-\tan^2 a \tan^2 x} - \tan^2 a\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2}\left(\tan^4 a - 1\right) = \tan^4 a - 1 = -\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}. \end{aligned}$$ ▶

173. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

◀ Racionalisanjem imenioca dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+x\sin x-\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}; \end{aligned}$$

ako $x\to 0$, to $1+x\sin x \to 1$, a tada (prema primeru 144) $\sqrt{1+x\sin x} \to \sqrt{1} = 1$. Slično, $\sqrt{\cos x} \to 1$ kad $x\to 0$. Dalje, $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2}$ kad $x \to 0$.

Sleduje,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}} = \frac{4}{3}.$$ ▶

174. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

◀ Oduzimanjem i dodavanjem brojiocu jedinicu, imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x\left(\sqrt{\cos x}+1\right)} + \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Ovde je korišćena činjenica da $\sqrt[n]{\cos x} \to 1$ kad $x \to 0$, a to sleduje iz primera 165 i 144. ▶

175. Dokazati, da je

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

◀ Zaista,

$$\begin{aligned} L(x) &= \left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right| = \left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \\ &\le 2\left|\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right| < \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \varepsilon \end{aligned}$$

za $x > \frac{1}{4\varepsilon^2} = E(\varepsilon)$, što je i trebalo dokazati. ▶

Dokazati sledeća tvrđenja:

A) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ $(a>0)$; B) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x = \ln x_0$; C) $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} = a^b$, pod uslovom da postoje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a$ $(a>0)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$.

◀ A) Dovoljno je razmotriti slučaj $a>1$. Imamo

$$\left|a^x - a^{x_0}\right| = a^{x_0}\left|a^{x-x_0}-1\right|.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$, to za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji takvo n_0 da je

$$1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

Tada za $|x-x_0| < \frac{1}{n_0}$ imamo $1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x-x_0} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$, tj.

$$\left|a^x - a^{x_0}\right| = a^{x_0}\left|a^{x-x_0}-1\right| < \varepsilon$$

za $|x-x_0| < \frac{1}{n_0}$.

B) Imamo

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, -\frac{1}{n-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n}$$

za $n>1$. Na taj način, za $n>1$ je

$$-\frac{1}{n-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan broj, koji nije veći od $\frac{1}{2}$. Tada postoji n_0, da je

$$-\varepsilon < \ln\left(1-\frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon.$$

Ako uzmemo $-\frac{1}{n_0} < \frac{x-x_0}{x_0} < \frac{1}{n_o}$, to za razliku $\ln x - \ln x_0 = \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)$ dobijamo sledeću ocenu:

$$-\varepsilon < \ln\left(1-\frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon$$

ili $|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon$, ako je $|x-x_0| < x_0\varepsilon$.

C) Saglasno uslovu u tački **B)**, $v(x)\ln u(x) \to b\ln a$ kad $x \to x_0$. A tada prema **A)** imamo

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{b\ln a} = a^b = \left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}. \;\blacktriangleright$$

Naći granične vrednosti:

176. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$.

◄ Saglasno tvrđenjima **A)-C)**, imamo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln\frac{x+2}{2x+1}}.$$

Kako je $\ln\frac{x+2}{2x+1} < 0$ za dovoljno veliko x, a $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$, to je tražena granična vrednost jednaka 0. ►

Napomena. Rešenja primera 177-182, 191, 198, 199, 200, 209, su zasnovana na prostom oslobađanju neodređenosti 1^∞.

Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$. Tada prema tvrđenju **C)** dobijamo

$$\lim_{x\to x_0} u^v = \lim_{x\to x_0}\left((1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}.$$

177. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

◄ U ovom slučaju je $u = \frac{x^2+1}{x^2-2}$; $v = x^2$; $(u-1)v = \frac{3x^2}{x^2-2}$. Sleduje,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^3. \;\blacktriangleright$$

178. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$.

◄ Slično prethodnom imamo

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x^2\cot^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2} = e. \;\blacktriangleright$$

179. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$.

◀ Očigledno,

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\cdot\cos\pi x}=e^{-1}. \ ▶$$

180. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

◀ Imamo,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)}}=e^0=1. \ ▶$$

181. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

◀ Prema napomeni o oslobađanju neodređenosti oblika 1^∞, pri izračunavanju granične vrednosti eksponencijalno-stepenog izraza u^v imamo

$$(u-1)v=\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^3 x};$$

Pošto je za $x\to 0$

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{x^3}{3},\ 1+\sin x\sim 1,\ \sin^3 x\sim x^3,$$

to je $\lim\limits_{x\to 0}(u-1)v=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$. Na taj način je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}. \ ▶$$

182. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

◀ Kako je $\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+1+o\left(\frac{1}{x}\right)$ kad $x\to\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=1$, to je

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))x}=e. \ ▶$$

183. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

◀ Prema tvrđenju **C**), imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1.$$

Znači, $\ln(1+x) = x + o(x)$ kad $x \to 0$. ►

184. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

◄ Izvlačeći ispred zagrade u imeniocu i brojiocu najstarije stepene i koristeći tvrđenje **C**), nalazimo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x + \ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{5}. \ ►$$

185. $\lim\limits_{h\to0} \frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

◄ Prema svojstvu logaritma i tvrđenju **B**) dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h\to0} \frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2} \\ &= \lim_{h\to0} \frac{1}{h^2}\log\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right) = -\frac{\log e}{x^2}\cdot\lim_{h\to0}\ln\left(\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right) = -\frac{\log e}{x^2}. \ ► \end{aligned}$$

186. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

◄ Koristeći asimptotske formule (primeri 168 i 183), dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to0} \frac{\ln\left(1-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)\right)}{\ln\left(1-\frac{b^2x^2}{2}+o(x^2)\right)} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{b^2x^2}{2}+o(x^2)} = \lim_{x\to0}\frac{a^2x^2}{b^2x^2} = \frac{a^2}{b^2}. \ ► \end{aligned}$$

187. a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$; b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^\mu-1}{x}$ $(\mu\in\mathbb{R})$.

◄ a) Neka je $a^x-1=t$. Tada $t\to0$ kad $x\to0$, zato je

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \ln a.$$

Znači, $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ kad $x\to0$ $(e^x = 1+x+o(x))$.

b) Očigledno,

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x} = \mu,$$

jer, $\mu\ln(1+x)\to0$ kad $x\to0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (prema

tvrđenju B) i primerima 187, a); 183). Na taj način je $(1+x)^\mu = 1+\mu x+o(x)$ kad $x \to 0$. ▶

188. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^\mu x}{x^2}$.

◀ Koristeći rezultat prethodnog primera, dobijamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^\mu x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+(\cos x-1))^\mu - 1}{\cos x - 1} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\mu}{2}. \ ▶$$

189. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a}$ ($a>0$); c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax^2}\cos^{2a}x-1}{x^2}$ $(a \neq 0)$.

◀ a) Imamo

$$\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}.$$

Prema primerima 187.a) i 188 nalazimo, da je tražena granična vrednost jednaka $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Posle očiglednih transformacija dobijamo

$$\frac{a^x-x^a}{x-a} = a^a \cdot \frac{a^{x-a}-1}{x-a} - a^{a-1}\frac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a - 1}{\frac{x-a}{a}}.$$

Granična vrednost prvog sabirka (prema primeru 187.a)) je $a^a \ln a$. Granična vrednost drugog sabirka (prema primeru 187.b)) je a^a. Sleduje,

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a} = a^a \ln a - a^a = a^a \ln \frac{a}{e}.$$

c) Imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax^2}\cos^{2a}x-1}{x^2} = \frac{(e^{ax^2}-1)\cos^{2a}x+\cos^{2a}x-1}{x^2} \\ &= \frac{e^{ax^2}-1}{ax^2} a\cos^{2a}x - \frac{1-\cos^{2a}x}{x^2}. \end{aligned}$$

Pošto je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax^2}-1}{ax^2} \cdot a\cos^{2a}x = a \text{ i } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^{2a}x}{x^2} = a,$$

to je granična vrednost celog izraza jednaka 0. ▶

190. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

◀ Predstavimo funkciju $\varphi(x) = \frac{x^x - a^a}{x-a}$ u obliku zbira dva sabirka:

$$\varphi(x) = \frac{x^x - x^a}{x-a} + \frac{x^a - a^a}{x-a} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Očigledno je,

$$\varphi_1(x) = \frac{e^{a \ln x}\left(e^{(x-a)\ln x} - 1\right)}{(x-a)\ln x} \cdot \ln x.$$

Pošto, kad $x \to a$,

$$e^{a \ln x} \to a^a, \quad \frac{e^{(x-a)\ln x} - 1}{(x-a)\ln x} \to 1 \text{ i } \ln x \to \ln a,$$

to je $\lim\limits_{x\to a} \varphi_1(x) = a^a \ln a$. Dalje,

$$\lim_{x\to a} \varphi_2(x) = \lim_{x\to a} \frac{a^a((1+\frac{x-a}{a})^a - 1)}{\frac{x-a}{a}\cdot a} = a^a \lim_{x\to a} \frac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a - 1}{\frac{x-a}{a}} \cdot \frac{1}{a} = a^a.$$

Konačno dobijamo da je

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a} = a^a \ln a + a^a = a^a \cdot \ln(ae). \ ▶$$

191. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\sin x \cos \alpha x}{1+\sin x \cos \beta x}\right)^{\cot^2 x}$.

◀ Tražimo granicu eksponencijalno-stepenog izraza u^v; imamo za $x \to 0$

$$\begin{aligned}(u-1)v &= \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{1+\sin x\cos\beta x} \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3}{\left(1 + (x+o(x))(1 - \frac{\beta^2 x^2}{2} + o(x^2))\right)(x^2 + o(x^2))} \\ &= \frac{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}.\end{aligned}$$

Sleduje,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2}{x^2}} = e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}. \ ▶$$

192. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

◀

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^{\alpha})}{\sin(\pi x^{\beta})} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi((x^{\alpha}-1)+1)}{\sin \pi((x^{\beta}-1)+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi(x^{\alpha}-1)}{\sin \pi(x^{\beta}-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\pi(x^{\alpha}-1)}{\pi(x^{\beta}-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\alpha}-1}{(1+t)^{\beta}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha t + o(t)}{\beta t + o(t)} = \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Korišćen je rezultat rešenja primera 187.b)). ▶

193. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}$.

◀ Stavljajući $\sin^2(\pi 2^x) = t$, dobijamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{1}{2}\ln(1-t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{-\frac{t}{2} + o(t)} = -2.$$

(Korišćena je formula $\ln(1-t) = -t + o(t)$). ▶

194. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}$.

◀ Stavljajući $x - a = t$ i koristeći rezultat primera 187.b) dobijamo

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}} = \lim_{t\to 0} a^{\alpha-\beta}.\frac{(1+\frac{t}{a})^{\alpha}-1}{(1+\frac{t}{a})^{\beta}-1} = a^{\alpha-\beta}.\lim_{t\to 0} \frac{\alpha\cdot\frac{t}{a} + o(t)}{\beta\cdot\frac{t}{a} + o(t)} = \frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}. \ ▶$$

195. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a > 0)$.

◀ Koristeći rezultat primera 187.a) nalazimo

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2} = \lim_{h\to 0} a^{x-h}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)^2 = a^x \ln^2 a. \ ▶$$

196. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

◀ Koristeći drugu značajnu graničnu vrednost posle očiglednih transformacija nalazimo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \left(\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b}}\right)^{-b} \left(\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a}}\right)^{-a} = e^{-a-b}. \ ▶ \end{aligned}$$

197. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right)$ $(x > 0)$.

◀ Imamo (187.a))

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\frac{1}{n^2+n}} \cdot \frac{n^2}{n^2+n} = \ln x. \ ▶$$

198. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\, b>0)$

◀ Slično prethodnom primeru imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^n} \\ &= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}\right)} = e^{\frac{1}{2}\ln(ab)} = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$ ▶

199. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\, b>0,\, c>0)$.

◀ Označimo $f(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}$. Očigledno, $f(x)\to 1$ kad $x\to 0$. Tada je

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}}$$

Pošto je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} &= \frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\left(a\cdot\frac{a^x-1}{x}+b\cdot\frac{b^x-1}{x}+c\cdot\frac{c^x-1}{x}\right) \\ &= \frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c} = \ln\left(\left(a^a b^b c^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}}\right), \end{aligned}$$

to je tražena granična vrednost $L=\left(a^a b^b c^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}}$. ▶

200. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\, b>0)$.

◀ Imamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}},\ \text{gde je } f(x)=\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\to 1,$$

jer je $\lim\limits_{x\to 0} a^{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 0} b^{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0} b^x=1$ (prema tvrđenju A). Pošto je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}{x(a^x+b^x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x+b^x}\left(\frac{a^x-1}{x^2}x+\frac{b^x-1}{x^2}x-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\ln a+\ln b), \end{aligned}$$

to je tražena granična vrednost jednaka $e^{-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$. ▶

201. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

◀ Pošto prema primeru 187.a) imamo

$$\begin{aligned} a^{x^2}-b^{x^2} &= x^2\ln\frac{a}{b}+o(x^2),\\ (a^x-b^x)^2 &= \left(x\ln\frac{a}{b}+o(x)\right)^2 = x^2\ln^2\frac{a}{b}+o(x^2),\ \text{to je} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln\frac{a}{b}+o(x^2)}{x^2\ln^2\frac{a}{b}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln\frac{a}{b}}{x^2\ln^2\frac{a}{b}}=\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}.\ ▶$$

202. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

◀

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x-x^a}-1}{a^x-x^a}\cdot a^{x^a}.$$

Pošto je $\lim\limits_{x\to a}x^a=\lim\limits_{x\to a}e^{a\ln x}=e^{a\ln a}=a^a$ (tvrđenje **C**)) i $\lim\limits_{x\to a}a^{x^a}=a^{a^a}$ (tvrđenje **A**)), to je

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x-x^a}-1}{a^x-x^a}\cdot a^{x^a}=a^{a^a}\ln a.\ ▶$$

203. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

◀ Polazeći od asimptotskih formula primera 183, nalazimo,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln2+\ln\left(1+2^{-x}\right)\right)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln2+2^{-x}+o(2^{-x})\right)\left(\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=3\ln2=\ln8.\ ▶ \end{aligned}$$

204. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}$ $(a>1,\ k>0)$.

◀ Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$ (primer 25) to je istovremeno i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{a^n}=0$. Sledi, za dato $\varepsilon>0$ postoji takav prirodan broj N, da je za sve $n>N$ ispunjena nejednakost $\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon$. Neka je $x>N+1$; stavimo $n=[x]$ (celi deo od x). Tada je $n>N$ i $n\le x<n+1$; pošto je onda $0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon$, to je tvrđenje dokazano. ▶

205. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0$ $(a>1,\ \varepsilon>0)$.

◄ Stavimo $x^\varepsilon = t$. Tada je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t}$. Prema jednakosti (primer 29) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, imamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a(n+1)}{n} = 0$. Neka je $\varepsilon_1 > 0$ proizvoljno . Tada postoji takav prirodan broj N, da je za $n > N$: $0 < \frac{\log_a(n+1)}{n} < \varepsilon_1$. Za $t > N+1$ stavimo $n = [t]$. Tada je $n > N$ i $n \le t < n+1$, pa je onda

$$0 < \frac{\log_a t}{t} < \frac{\log_a(n+1)}{n} < \varepsilon_1, \text{ tj. } \lim_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t} = 0,$$

a samim tim i $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0$. ►

Naći granične vrednosti:

206. $\lim\limits_{x\to+\infty} ((x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x)$.

◄ Polazeći od svjstva logaritama, tvrđenja B) i druge značajne granične vrednosti, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+\infty} ((x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{(x+2)^{x+2}x^x}{(x+1)^{2(x+1)}} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}(x+2)}{(1+\frac{1}{x})^x(x+1)}\right) = 0. \end{aligned}$$ ►

207. $\lim\limits_{x\to0+} \left(\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right)$ $(a>1)$.

◄ Primetimo da je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0+} \frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} &= \lim_{x\to0+} \frac{1+\frac{\ln a}{\ln x}}{1-\frac{\ln a}{\ln x}} = 1. \text{ Onda je} \\ L &= \lim_{x\to0+} \left(\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right) \\ &= \lim_{x\to0} \frac{\ln a^2\ln(x\ln a)}{\ln\frac{x}{a}}\cdot\ln\left(\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)^{\frac{1}{\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1}}\right) = \ln a^2. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili jednakost

$$\lim_{x\to0+} \frac{\ln(x\ln a)}{\ln\frac{x}{a}} = \lim_{x\to0+} \frac{\ln(x\ln a)}{\ln(x\ln a)-\ln(a\ln a)} = 1.$$ ►

208. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right)$.

◀ Kako funkcije $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ i $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$ teže jedinici kad $x\to+\infty$, to na osnovu formula

$$\ln f=\ln(1+(f-1))=f-1+o(f-1),$$

$$\text{i } \ln\varphi=\varphi-1+o(\varphi-1), x\to+\infty$$

imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f-1}{(\varphi-1)^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{8}. \end{aligned}$$ ▶

209. $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}2\left(e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)\frac{x^2+1}{x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to0}2\left(\frac{x}{x+1}+o(x)\right)\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}2\left(\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{(x^2+1)o(x)}{x}\right)}=e^2 \end{aligned}$$

jer je $e^{\frac{x}{x+1}}=1+\frac{x}{x+1}+o(x)$, kad $x\to0$. ▶

210. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

◀ Stavimo $\sin x=1-t$. Tada $t\to0$ kad $x\to\frac{\pi}{2}$. Sledi,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin\alpha x)(1-\sin\beta x)}}=\lim_{t\to0}\frac{1-(1-t)^{\alpha+\beta}}{\sqrt{(1-(1-t)\alpha)(1-(1-t)\beta)}}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{(\alpha+\beta)t+o(t)}{\sqrt{(\alpha t+o(t))(\beta t+o(t))}}=\lim_{t\to0}\frac{(\alpha+\beta)t+o(t)}{\sqrt{\alpha\beta t^2+o(t^2)}}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{\alpha+\beta+\frac{o(t)}{t}}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{1+\frac{o(t^2)}{\alpha\beta t^2}}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \end{aligned}$$ (primer 187.b)). ▶

Prilikom rešavanja primera 211-215 koristiti formule
$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$, a takođe i formule hiperboličke trigonometrije.

211. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x}$.

◀ Na osnovu primera 187.a), imamo

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1.$$

Odavde je $\sinh x = x + o(x)$, kad $x \to 0$. Na osnovu a) nalazimo:

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sinh^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Na taj način je, $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ kad $x \to 0$.

Koristeći rezultat rešenja a) i tvrđenja A), dobijamo:

c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} \cdot \frac{1}{\cosh x} = 1. \ ▶$$

212. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh^2 x}{\ln(\cosh 3x)}$.

◀ Prema rezultatu rešenja prethodnog primera, imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2 x}{\ln(\cosh 3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + o(x))^2}{\ln\left(1 + \frac{9}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + o(x))^2}{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{9}{2}x^2} = \frac{2}{9}. \ ▶$$

213. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sinh\sqrt{x^2+x} - \sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x}$.

◀ Iz tvrđenja A) sledi, da je $\lim\limits_{t\to 0} \cosh t = \cosh t_0$, zato posle očiglednih transformacija dobijamo:

$$L = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sinh\sqrt{x^2+x} - \sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\sinh \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}{2} \cosh \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}{\cosh x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cosh \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}{2}}{\cosh x} \cdot 2\sinh \frac{x}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}} = 2\sinh \frac{1}{2}. \ ▶$$

214. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln\cosh x)$.

◀ Prema tvrđenju B), imamo

$$\lim_{x\to +\infty} (x - \ln\cosh x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln e^x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln \frac{2}{1 + e^{-2x}} = \ln 2. \ ▶$$

215. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\tanh x}$.

◀ Koristeći rezultate 187.a) i 211.b), dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\tanh x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{\sin 2x}-1}{2x}\cdot 2-\frac{e^{\sin x}-1}{x}}{\frac{\tanh x}{x}}=1. \ ▶$$

216. Dokazati da je

$$\lim_{x\to x_0}\arctan x=\arctan x_0.$$

◀ Neka je $x_0>0$ i $x>0$. Stavimo $\arctan x-\arctan x_0=t$. Tada za proizvoljno $\varepsilon>0$ imamo:

$$|\arctan x-\arctan x_0|=|t|\le|\tan t|=\left|\frac{x-x_0}{1+xx_0}\right|<|x-x_0|<\varepsilon,$$

ako je $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. Na taj način jednakost je dokazana za $x_0>0$. Ako je $x_0<0$, to se dokaz svodi na razmatrani slučaj, jer je $\arctan(-x)=-\arctan x$. Tačnost navedenog tvrđenja za $x_0=0$ proizilazi iz očigledne nejednakosti

$$0\le|\arctan x-\arctan x_0|=|\arctan x|<|x|. \ ▶$$

217. Dokazati, da je

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{arccot} x=\operatorname{arccot} x_0.$$

◀ Polazeći od identičnosti

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2},$$

koja važi za sve realne vrednosti, dobijamo

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{arccot} x=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan x_0=\operatorname{arccot} x_0. \ ▶$$

218. Dokazati,

$$\lim_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0 \ (-1\le x_0\le 1).$$

◀ Primetimo, da ako je $0\le x\le 1$, to je $\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, a ako je $0<x\le 1$, to je $\arcsin x=\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Zato za $x\in[0,1[$ imamo

$$\lim_{x\to x_0}\arcsin x=\lim_{x\to x_0}\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arctan\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}=\arcsin x_0.$$

U tački $x = 1$ imamo (primer 217):

$$\lim_{x\to 1-} \arcsin x = \lim_{x\to 1-} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2} = \arcsin 1.$$

Slučaj $-1 \leq x_0 \leq 0$ svodi se na već razmatrani, jer je $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Pošto su za tačku $x_0 = 0$ leva i desna granična vrednost jednake nuli, to je dokaz završen. ▶

219. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0$ $(-1 \leq x_0 \leq 1)$.

◀ Tvrđenje sledi iz prethodnog primera i identičnosti

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

220. Dokazati da je

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$.

◀ a) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada iz nejednakosti $x > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = E(\varepsilon)$ proizilazi, da je $\arctan x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, tj. $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon$, za svako $x > E(\varepsilon)$.

b) Imamo

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\lim_{x\to+\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

c) Koristeći da je $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, dobijamo

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

d) Slično, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. ▶

221. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{x}$ $(a \neq 0)$.

◀ Pošto je $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = 1$, to je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{ax} \cdot a = a. \ ▶$$

222. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{x}$ $(a \neq 0)$.

◀ Iz toga što je $\lim\limits_{x\to 0} \arctan x = 0$, sledi da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{\tan(\arctan ax)} \cdot a = a. \ ▶$$

223. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$.

◀ Pošto je $\lim\limits_{h\to 0}(\arctan(x+h)-\arctan x)=0$, to je

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h\to 0}\frac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\arctan(x+h)-\arctan x\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(1+x^2+hx)} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$ ▶

224. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)$.

◀ Imamo da $\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\to 0$ kad $x\to\infty$, sledi

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{1-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$ ▶

225. Naći:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$.

◀ Oslobađajući se korena iz brojioca imamo: a)

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}} \\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right)|x|} = -1 \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}} = 1.$$ ▶

226. a) $\lim\limits_{x\to 1-0}\arctan\frac{1}{1-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1+0}\arctan\frac{1}{1-x}$.

◀ a) Stavimo $\frac{1}{1-x}=\tan t$. Tada $\tan t\to +\infty$ kad $x\to 1-0$, a kako je $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, to $t=\arctan\frac{1}{1-x}\to\frac{\pi}{2}$ kad $x\to 1-0$.

b) Pri prethodnoj smeni $\tan t\to -\infty$ kad $t\to 1+0$. Odavde sledi, da je $t=\arctan\frac{1}{1-x}\to -\frac{\pi}{2}$ kad $x\to 1+0$. ▶

227. a) $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

◀ a) Kad $x\to -0$, to $\frac{1}{x}\to -\infty$, a $e^{\frac{1}{x}}\to 0+$, zato je $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$.

b) Ako sada $x \to +0$, to $\frac{1}{x} \to +\infty$ i $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \to 0$, tj. tražena granična vrednost je 0. ►

Naći:

228. $\lim\limits_{x\to -0} x \cdot \sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}$.

◄ Pošto je

$$0 \le \left| x \cdot \sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}\right| \le |x|$$

za sve x iz oblasti definisanosti, to je

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|} = 0. \;►$$

229. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$.

◄ Stavimo $\frac{1}{x} = y$. Pošto je $y = [y] + r$, $0 \le r < 1$, to je

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{y\to\infty} \frac{y-r}{y} = 1. \;►$$

230. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

◄ Zapisujući niz $y_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ u obliku $y_n = \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n + n\right)\right)$, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n + n\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0. \;► \end{aligned}$$

231. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

◄ Slično prethodnom primeru imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi + n\pi\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = 1. \;► \end{aligned}$$

232. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n \text{ puta}} x$.

◄ Neka je $\sin x \ge 0$ (za $\sin x < 0$) postupamo slično. Ako je

$$a_n = \underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n \text{ puta}} x,$$

$$\text{to je } 0 \le a_n = \sin a_{n-1} \le a_{n-1} \le 1.$$

Odavde sledi monotonost i ograničenost, a znači i konvergencija niza $\{a_n\}$. Označimo $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i pređimo na graničnu vrednost u jednakosti $a_n = \sin a_n$, dobijamo jednačinu $l = \sin l$, iz koje nalazimo da je $l = 0$. ►

233. Ako je

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A \; i \; \lim_{x\to A} \psi(x) = B,$$

da li odavde sledi da je

$$\lim_{x\to a} \psi\left(\varphi\left(x\right)\right) = B?$$

Razmotriti primer: $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ za $x = \frac{p}{q}$, p i q su uzajamno prosti brojevi i $\varphi(x) = 0$ za x iracionalno; $\psi(x) = 1$ za $x \ne 0$ i $\psi(x) = 0$ za $x = 0$, pri čemu $x \to 0$.

◄ Iz uslova primera sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji takvo $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, da je

$$|\psi(u) - B| < \varepsilon \tag{1}$$

ako je

$$0 < |u - A| < \sigma \tag{2}$$

tj. nejednakost (1) je zadovoljena za sve vrednosti u iz σ–okoline tačke A, isključujući samu tačku A. Dalje saglasno uslovu zadatka, za proizvoljno $\sigma > 0$ i za σ iz nejednakosti (2), postoji takvo $\delta_1(\sigma(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon) > 0$, da za sve x koji zadovoljavaju uslov

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \tag{3}$$

funkcija $u = \varphi(x)$ ispunjava nejednakost

$$|\varphi(x) - A| < \sigma, \tag{4}$$

pri čemu se ne isključuje slučaj kada je $\varphi(x) = A$. No za $u = \varphi(x) = A$ funkcija $\psi(u) = \psi(\varphi(x))$ može biti uopšte ne definisana ili pak definisana ali da je $\psi(A) \ne \lim\limits_{u\to A} \psi(u)$. U oba slučaja nejednakost (3) ne obezbeđuje zadovoljenje nejednakosti (1). Da bi iz uslova $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{u\to A} \psi(x) = B$ proizilazila jednakost $\lim\limits_{x\to a} \psi(\varphi(x)) = B$ dovoljno je da bude: $\varphi(x) \ne A$ za $x \ne a$. U navedenom primeru taj uslov nije ispunjen. ►

234. Neka su za sve $x \in \left]x_0, x_0 + 1\right]$, gde je x_0 fiksirano, ispunjeni uslovi:

1) $P_{nk}(x) \ge 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$; **2)** $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x) = 1$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk}(x) = 0$ za svako fiksirano k; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = l$.

Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = l$, gde je $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x)u_k(x)$.

◀ Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Iz uslova 4) sledi postojanje takvog broja $N = N(\varepsilon, x) > 0$, da je $|u_n(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $n > N$. Iz istog uslova sledii postojanje broja $M > 0$ takvog da je $|u_n(x)| \le M$, $|u_n(x) - l| \le 2M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz uslova 3) proizilazi postojanje takvog broja $n_0 = n_0(\varepsilon, x) > N$, da je $P_{nk} < \frac{\varepsilon}{4NM}$ $(k = 1, 2, ..., N)$ za sve $n > n_0$. Iz tih nejednakosti i uslova 1) i 2) teoreme sledi nejednakost:

$$\begin{aligned} |t_n - l| &= \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)u_k(x) - l\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)\right| \le \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)\,|u_k(x) - l| \\ &= P_{n1}(x)\,|u_1(x) - l| + P_{n2}(x)\,|u_2(x) - l| + \cdots + P_{nn}(x)\,|u_n(x) - l| \\ &< \frac{\varepsilon}{4NM}\cdot 2NM + \frac{\varepsilon}{2}\left(P_{nN+1}(x) + \cdots + P_{nn}(x)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

za sve $n > n_0$. Sledi, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = l$. ▶

235. Dokazati Košijevu teoremu: ako je funkcija f definisana na razmaku $]a, +\infty[$ i ograničena na svakom konačnom intervalu $]a, b[$, to je

a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x+1) - f(x)\right);$$

b)
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \ge c > 0),$$

pretpostavljajući da granične vrednosti sa desnog dela jednakosti postoje.

c) Dokazati da ako je

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x+1) - f(x)\right) = +\infty$$

i f je ograničena odozdo na svakom konačnom intervalu $]a, b[$,to je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

◀ a) Za dokaz primenimo primer 234, stavljajući pri tom, da je

$$P_{n1}(x) = \frac{x+1}{x+n}, \; P_{nk}(x) = \frac{1}{x+n}$$

$(k = 2, 3, ..., n)$, $0 < x_0 < x \le x_0 + 1$, $x_0 > a$,

$$u_1(x) = \frac{f(x+1)}{x+1}, \; u_n(x) = f(x+n) - f(x+n-1), \; (n \in \mathbb{N}).$$

Tada je

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)u_k(x) = \frac{f(x+n)}{x+n}.$$

Svi uslovi teoreme su ispunjeni, zato je

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n)}{x+n} = \lim_{n\to+\infty} (f(x+n) - f(x+n-1)) = l.$$

Pošto l ne zavisi od x, to iz poslednje jednakosti sledi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (f(x+l) - f(x)) = l.$$

b) Kako je $f(x) \geq c > 0$, to je definisana funkcija $F(x) = \ln f(x)$. Neka je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l$. Tada prema a) i mogućnosti graničnog prelaza na eksponent stepena, dobijamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln f(x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln f(x+1) - \ln f(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l.\end{aligned}$$

c) Za proizvoljno $E > 0$ postoji takav broj $x_0 > 0$, da je za $x > x_0$: $f(x+1) - f(x) > 2E$. Odavde sledi, $f(x+n) - f(x) > 2nE$ i $\frac{f(x+n)}{x+n} > \frac{f(x)+2nE}{x+n}$. Kako je $f(x) \geq c > 0$ za $x_0 < x \leq x_0 + 1$ to postoji takav broj n_0, da je $\frac{f(x+n)}{x+n} > E$ za sve $n > n_0$,tj. ako je $t = x+n$, $x_0 < x \leq x_0+1$, $n > n_0$ to je $\frac{f(t)}{t} > E$, što je ekvivalentno navedenom tvrđenju. ▶

236. Dokazati, da ako je: 1) funkcija f definisana u oblasti $x > a$; 2) ograničena u svakoj oblasti $a < x < b$;
3) postoji konačan ili beskonačan $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^m} = l$, to je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{m+1}} = \frac{l}{m+1}.$$

◀ Neka je l konačan. Tada iz uslova teoreme sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n) - f(x+n-1)}{(x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}} = \frac{l}{m+1}.$$

Primenjujući primer 234, stavljajući pri tom da je

$$P_{n1}(x)=\frac{(x+1)^{m+1}}{(x+n)^{m+1}},\, P_{nk}(x)=\frac{(x+k)^{m+1}-(x+k-1)^{m+1}}{(x+n)^{m+1}}$$

$(k=2,3,...,n)$, $0<x_0<x\leq x_0+1$, $x_0>a$;

$$u_1(x)=\frac{f(x+1)}{(x+1)^{m+1}},\; u_n(x)=\frac{f(x+n)-f(x+n-1)}{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}}\; (n=2,3,...),$$

dobijamo $t_n=\frac{f(x+n)}{(x+n)^{m+1}}$. Svi uslovi primera 234 su ispunjeni, zato je

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)}{(x+n)^{m+1}}=\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\frac{l}{m+1},$$

a pošto granična vrednost $\frac{l}{m+1}$ ne zavisi od x, to je poslednja jednakost ekvivalentna tome da je $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t^{m+1}}=\frac{l}{m+1}$. Neka je sada $l=+\infty$. Tada iz uslova sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}}{f(x+n)-f(x+n-1)}=0,$$

a pošto niz $\left\{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, raste i teži ka $+\infty$, to i niz $\{f(x+n)-f(x+n-1)\}_{n=1}^{\infty}$ ima tu osobinu. Stavimo

$$P_{n1}(x)=\frac{f(x+1)}{f(x+n)},\; P_{nk}(x)=\frac{f(x+k)-f(x+k-1)}{f(x+n)}$$

$(k=2,3,...,n)$, $0<x_0<x\leq x_0+1$, $x_0>a$,

$$u_1(x)=\frac{(x+1)^{m+1}}{f(x+1)},\; u_n(x)=\frac{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}}{f(x+n)-f(x+n-1)},\; (n=2,3,...)$$

i primenom primera 234, dobijamo da je

$$t_n=\sum_{k=1}^{n}P_{nk}(x)u_k(x)=\frac{(x+n)^{m+1}}{f(x+n)}\to 0,\; n\to\infty,$$

odakle sledi dokaz tvrđenja. ▶

237. Dokazati, da je

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x;$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x.$$

◄ a) Neka je $x\neq 0$ (za $x=0$ jednakost je očigledna). Dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x=e^x.$$

b) Imamo $(x>0)$

$$\begin{aligned} X_n &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\\ &= 1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\ &< 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=Y_n. \end{aligned}$$

Neka je $n>k$. Tada iz nejednakosti

$$X_n>1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)+\cdots+\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)$$

kad $n\to\infty$ dobijamo

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}=Y_k.$$

Pošto niz Y_k raste, to je za proizvoljno n zadovoljena nejednakost

$$X_n<Y_n<e^x$$

odakle zbog $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=e^x$,za $x>0$ imamo $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=e^x$. Neka je sada x proizvoljan po znaku. Tada razmatrajuči razliku:

$$\begin{aligned} Y_n-X_n=\frac{x^2}{2!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{x^3}{3!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)+\cdots\\ +\frac{x^k}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)..\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)+\ldots+x^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{n^n}\right) \end{aligned}$$

i uzimajući u obzir nejednakost

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leq\frac{k(k-1)}{2n}\ (k<n),$$

koja se lako dokazuje metodom indukcije, dobijamo ocenu

$$\begin{aligned}|Y_n - X_n| \le & \frac{|x|^2}{2!}\cdot\frac{2\cdot 1}{2n} + \frac{|x|^3}{3!}\cdot\frac{3\cdot 2}{2n} + \cdots \\ & + \frac{|x|^k}{k!}\cdot\frac{k(k-1)}{2n} + \cdots + \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2n} + |x|^n\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{n^n}\right) \\ = & \frac{|x|^2}{2!}\left(1+|x|+\frac{|x|^2}{2!}+\cdots+\frac{|x|^k}{k!}+\cdots+\frac{|x|^{n-3}}{(n-3)!}\right) + |x|^n\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{n^n}\right).\end{aligned}$$

Neka je $E > 0$ proizvoljno. Tada za $| x |\le E$ imamo

$$Y_{n+3} = 1+|x|+\frac{|x|^2}{2!}+\cdots+\frac{|x|^k}{k!}+\cdots+\frac{|x|^{n-3}}{(n-3)!} < e^{|x|} < e^E,$$

i za razliku važi ocena

$$|Y_n - X_n| < \frac{E^2}{2n}e^E + E^n\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{n^n}\right).$$

Na taj način je $\lim\limits_{n\to\infty}(Y_n - X_n) = 0$ tj. $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \lim\limits_{n\to\infty} X_n = e^x$. ▶

238. Dokazati, da je

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

◀ Imamo (primer 35)

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}\quad (0<\theta_n<1),$$

odakle je

$$\begin{aligned}\theta_n &= \frac{e-y_n}{\frac{1}{n\cdot n!}} = n\cdot n!\,(e-y_n) \\ &= n\cdot n!\left(1+1++\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}-y_n\right) \\ &= n\cdot n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right) = \frac{n}{n+1}+\frac{n\cdot\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\to 1,\end{aligned}$$

kad $n\to\infty$. Na osnovu toga, dobijamo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = \lim_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi n! y_n + \frac{2\pi\theta_n}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi\theta_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}}{\frac{2\pi\theta_n}{n}}\cdot 2\pi\theta_n = 2\pi.\end{aligned}$$ ▶

Nacrtati grafik funkcije

239. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ $(x > 0)$.

◀ Ako je $0 < x \leq 1$, to je $1 < \sqrt[n]{1+x^n} \leq \sqrt[n]{2}$ i pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, to je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} = 1$$

Ako je $1 < x < +\infty$, to je $\sqrt[n]{1+x^n} = x \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1}$ i $\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1} \to 1$ kad $n \to \infty$; zato je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} = x.$$

Na taj način je

$$y = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ x, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Crtanje grafika ostavlja se čitaocu. ▶

240. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x \geq 0)$.

◀ Imamo

$$1 \leq \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} < \sqrt[n]{3}, \ ako\ 0 \leq x \leq 1;$$

$$x < \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = x\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n+1} < x\sqrt[n]{3}, \ ako\ 1 < x < 2;$$

$$\frac{x^2}{2} < \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \frac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1} < \frac{x^2}{2}\sqrt[n]{3}, \ za\ x \geq 2.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$, to konačno imamo

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ x, & 1 < x < 2; \\ \frac{x^2}{2}, & 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Crtanje grafika ostavljamo čitaocu. ▶

241. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x\tan^{2n}\frac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\tan^{2n}\frac{\pi x}{4}+1}$ $(x \geq 0)$.

◀ Kako je $0 \leq \tan^2\frac{\pi x}{4} < 1$ ako $0 \leq x < 1$ i $4k-1 < x < 4k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, to je

$$\lim_{n\to\infty} \tan^{2n}\frac{\pi x}{4} = 0 \ i\ y = \sqrt{x}.$$

Ako je $\tan^{2n}\frac{\pi x}{4} > 1$ $(4k-3 < x < 4k-2,\ 4k-2 < x < 4k-1,\ k \in \mathbb{N})$, to je

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{x + \frac{\sqrt{x}}{\tan^{2n}\frac{\pi x}{4}}}{1 + \frac{1}{\tan^{2n}\frac{\pi x}{4}}} = x.$$

Na kraju, ako je $\tan^{2n}\frac{\pi x}{4} = 1$ ($x = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$) to je

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x}\right)$$

Sada je lako nacrtati grafik funkcije i to se ostavlja čitaocu. ▶

242. $y = \lim\limits_{n\to\infty} sgn\left|\sin^2(n!\pi x)\right|$.

◀ Ako je $x = \frac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi, to je $n!x = n!\frac{p}{q}$ ceo broj za $n > q$ i onda je za sve $n > q$:

$$\sin^2(n!\pi x) = 0,$$

tj. $y = 0$, ako je x racionalan broj. Ako je x iracionalan broj, to, pošto je $n!x \neq$celog broja, zaključujemo da je

$$\sin^2(n!\pi x) > 0,$$

i zato je $y = sgn\left|\sin^2(n!\pi x)\right| = 1$ za iracionalne x. ▶

243. Nacrtati krivu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1$$

◀ Pošto je $0 < \frac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,|y|^n)} \leq 2$, za $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ i $|x| + |y| \neq 0$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,\,|y|^n)}} = 1$ (primer 28) i sledi,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = \lim_{n\to\infty} \max\left(|x|,|y|\right) \sqrt[n]{\frac{|x|^n + |y|^n}{\max\left(|x|^n, |y|^n\right)}} = \max\left(|x|;|y|\right),$$

tj. $\max\ (|x|;|y|) = 1$ i grafik funkcije je kontura kvadrata sa temenima u tačkama $(\pm1,\pm1)$, jer tačke $A\left(\pm1,|y|\right), |y| \leq 1, B\left(|x|,\pm1\right), |x| \leq 1$ pripadaju grafiku. ▶

244. Kosa asimptota krive $y = f(x)$ kad $x \to +\infty$ naziva se prava $y = kx + b$, za koju je

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (kx+b)\right) = 0. \qquad (1)$$

Koristeći ovu definiciju izvesti potreban i dovoljan uslov postojanja asimptote.

◀ **Neophodnost.** Neka je prava $y = kx + b$ kosa asimptota funkcije $y = f(x)$, kad $x \to +\infty$. Tada iz definicije sledi da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b}{x} = k, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b. \qquad (3)$$

Dovoljnost. Pokažimo da su jednakosti (2) i (3) dovoljni uslovi. Stvarno, nalaženjem k iz (2) i zamenjivanjem u (3) dobijamo b. No tada iz (3) sledi (1), tj. jednakosti (2)-(3) su dovoljni uslovi. Slično se razmatra slučaj kad $x \to -\infty$. ▶

Naći sledeće granične vrednosti:

245. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x^{m+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$.

◀ Označimo

$$y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Tada je (primer 237.b)) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^x$, zato je

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^{m+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (y_{2n} - y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{2n} - \lim_{n\to\infty} y_n = e^x - e^x = 0. \ ▶ \end{aligned}$$

246. $\lim\limits_{n\to\infty} \left((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})\right)$, ako $|\, x \,| < 1$.

◀ Množeći i deleći izraz sa $1 - x$, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \ ▶$$

247. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$, $x \neq 0$.

◀ Množeći i deleći sa $2^n \sin\frac{x}{2^n}$ brojilac i imenilac izraza čiju graničnu vrednost tražimo, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}. \ ▶ \end{aligned}$$

248. Neka je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

gde je $\psi(x)>0$ i $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m\in\mathbb{N})$ kad $n\to\infty$, tj. $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ za $m\in\mathbb{N}$ i $n>N(\varepsilon)$. Dokazati, da je

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}(\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn}))\\ &= \lim_{n\to\infty}(\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha(_{nn})) \end{aligned}$$

pretpostavljajući da granična vrednost u desnom delu jednakosti postoji.

◀ Pošto je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$ i $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$, to za svako $\varepsilon>0$ postoji $N=N(\varepsilon)$ tako da je za $n>N$

$$1-\varepsilon<\frac{\varphi(\alpha_{mn})}{\psi(\alpha_{mn})}<1+\varepsilon,\ (m=1,2,...,n),$$

odakle, zbog uslova $\psi(x)>0$, imamo

$$1-\varepsilon<\frac{\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})}{\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})}<1+\varepsilon$$

Polazeći od ove nejednakosti i iz uslova postojanja granične vrednosti desnog dela date jednakosti zaključujemo da granična vrednost brojioca postoji i jednaka je graničnoj vrednosti imenioca. ▶

Koristeći tvrđenje prethodnog primera, naći:

249. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

◀ Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1}{\frac{k}{3n^2}}=1$ (primer 148), i $\frac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$ kad $n\to\infty$, to je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{6}.\ ▶$$

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}$.

◀ Ovde je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{ka}{n^2}}{\frac{ka}{n^2}}=1$ i $\frac{ka}{n^2}\rightrightarrows 0$ kad $n\to\infty$, zato imamo

$$\lim_{n\to\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{an(n+1)}{2n^2}=\frac{a}{2}.\ ▶$$

251. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$ $(a>1)$.

◀ Imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{k}{n^2}}-1}{\frac{k}{n^2}\ln a}=1$ (primer 188), $\frac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$ kad $n\to\infty$. Na taj način je,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\ln a}{n^2}=\ln a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\ln a. ▶$$

252. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

◀ Imamo

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}{\frac{k}{n^2}}=1$ i $\frac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$, kad $n\to\infty$, to je

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}}\cdot=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}}=e^{\frac{1}{2}}. ▶$$

253. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

◀ Lako se proverava da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)}{-\frac{k^2a^2}{2n^3}}=1$ i $\frac{k^2a^2}{2n^3}\rightrightarrows 0$ kad $n\to\infty$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2}{2n^3}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{2\cdot 6\cdot n^3}}=e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

U primerima 252 i 253 prešli smo na graničnu vrednost eksponenta stepena na osnovu trvđenja A). ▶

254. Niz x_n zadat je jednakostima

$$x_1=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\ldots,x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n\text{ korena}},\ (a>0).$$

Naći $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

◀ Primetimo da je

$$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} \quad (n = 2, 3, ..).$$

Primenom metoda matematičke indukcije, dobijamo da je niz rastući i ograničen odozgo, na primer brojem $A > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$. Sledi, prema poznatoj teoremi, imamo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \geq 0$, pri čemu je $l = \sqrt{a + l}$, odakle nalazimo da je $l = \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$. ▶

255. Niz y_n definisan je pomoću niza x_n relacijama:

$$y_0 = x_0, \; y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

gde je $|\alpha| < 1$. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

◀

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \alpha y_0; \\ x_2 &= y_2 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= y_n + \alpha y_{n-1} + \alpha^2 y_{n-2} + \cdot + \alpha^{n-1} y_1 + \alpha^n y_0; \end{aligned}$$

Oduzimanjem od poslednje jednakosti očigledmu jednakost

$$\frac{b}{1-\alpha} = b + \alpha b + \alpha^2 b + \cdots + \alpha^{n-1} b + \alpha^n b + \frac{b\alpha^{n+1}}{1-\alpha},$$

dobijamo

$$x_n - \frac{b}{1-\alpha} = (y_n - b) + \alpha(y_{n-1} - b) + \cdots + \alpha^n (y_0 - b) - \frac{b\alpha^{n+1}}{1-\alpha},$$

odakle s obzirom na nejednakost $|1-\alpha| > 1 - |\alpha|$ imamo

$$\left| x_n - \frac{b}{1-\alpha} \right| \leq |y_n - b| + |\alpha|\,|y_{n-1} - b| + \cdots + |\alpha^n|\,|y_0 - b| + \frac{|b|\,|\alpha|^{n+1}}{1-|\alpha|}.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, onda za $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n > n_0$

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}(1 - |\alpha|).$$

Dalje, iz uslova $|\alpha| < 1$ sledi da postoji N, tako da je za $n > N$ ispunjena nejednakost $|\alpha|^{n+1-n_0} < \frac{\varepsilon}{n_0 6M}$, gde je $M = \sup\{|y_i|\}_{i=1}^{\infty}$ i $|\alpha|^{n+1} < \frac{\varepsilon(1-|\alpha|)}{3|b|}$.

Sledi,

$$\begin{aligned}\left|x_n - \frac{b}{1-\alpha}\right| &< \frac{\varepsilon}{3}(1-|\alpha|)\left(1+|\alpha|+\cdots+|\alpha|^{n-n_0}\right) + \frac{\varepsilon}{n_0 6M}\cdot 2Mn_0 + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

za sve $n > N$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-\alpha}$. ►

256. Niz $\{x_n\}$ je definisan na sledeći način :

$$x_0 = 1,\ x_n = \frac{1}{1+x_n}\ (n \in \mathbb{N}).$$

Naći $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

◄ Razmotrimo razliku između x_n i korena jednačine $x = \frac{1}{1+x}$. Imamo

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \frac{x_0 - x}{(1+x)(1+x_0)},\ x - x_2 = -\frac{x_0 - x}{(1+x)^2(1+x_0)(1+x_1)}, \ldots, \\ x - x_n &= \frac{(-1)^{n-1}(x_0 - x)}{(1+x)^n(1+x_0)(1+x_1)\ldots(1+x_{n-1})}.\end{aligned}$$

Kako je $0 < x_n < 1$ (laka provera), to je $|x - x_n| \le \frac{|x_0 - x|}{|x+1|^n}$.

Koreni jednačine $x = \frac{1}{1+x}$ su brojevi $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ i pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge 0$, to se negativni koren odbacuje. U poslednjoj nejednakosti stavimo $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, dobijamo

$$\left|x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \le \frac{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|^n} < \varepsilon \text{ za } n > N = N(\varepsilon),$$

tj. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ►

257. Niz funkcija $y_n = y_n(x)$ $(0 \le x \le 1)$ definisan je na sledeći način:

$$y_1 = \frac{x}{2},\ y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2}\ (n = 2, 3, ..).$$

Naći $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

◄ Neposrednim proveravanjem je $-\frac{1}{8} < y_2 < \frac{1}{2}$. Ako pretpostavimo, da je $-\frac{1}{8} < y_n < \frac{1}{2}$, to je $-\frac{1}{8} < y_{n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_n^2}{2} < \frac{1}{2}$, tj. $-\frac{1}{8} < y_n < \frac{1}{2}$ za sve $n > 2$. Razmotrimo razliku među y_n i korena jednačine $y = \frac{x}{2} - \frac{y^2}{2}$;

$$\begin{aligned} y-y_1 &= -\frac{y^2}{2}; & (1)\\ y-y_2 &= -\frac{1}{2}\left(y^2-y_1^2\right) = -\frac{1}{2}\left(y-y_1\right)\left(y+y_1\right) = \frac{1}{2^2}y^2\left(y+y_1\right);\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y-y_n &= \frac{(-1)^n}{2^n}y^2\left(y+y_1\right)\left(y+y_2\right)\dots\left(y+y_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Samo se jedan od korena jednačine a to je $y = \sqrt{1+x}-1$ nalazi u istim granicama kao i članovi niza $\{y_n\}$, pri čemu je

$$|y+y_n| \le \left|\sqrt{1+x}-1\right| + |y_n| \le \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{2} \le 1.$$

Zato iz (1) sleduje da je $|y-y_n| < \frac{1}{2^n} \to 0$ kad $n \to \infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{1+x}-1$. ▶

258. Niz funkcija $y_n = y_n(x)$, $(0 \le x \le 1)$ definisan je na sledeći način:

$$y_1 = \frac{x}{2},\ y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}\ (n = 2, 3, \dots).$$

Naći $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

◀ Imamo

$$y_2 > y_1 = \frac{x}{2}\ i\ y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}.$$

Sledi, ako je $y_n > y_{n-1}$ to je $y_{n+1} > y_n$, tj. niz raste. Dalje, lako se pokazuje da je niz $\{y_n\}$ ograničen odozgo brojem 1. Zato niz $\{y_n\}$ ima konačnu graničnu vrednost l. Prelaskom na graničnu vrednost u jednakosti

$$y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2},$$

nalazimo

$$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2}.$$

Odavde je $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$. Kako granična vrednost nije veća od 1, to je $l = 1 - \sqrt{1-x}$. ▶

259. Neka je $x > 0$ i

$$y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})\ (n \in \mathbb{N})$$

Dokazati, da ako je $y_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$), to niz y_n konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}$.

◀ Saglasno uslovu,

$$y_1 = y_0(2 - xy_0),\; 2 - xy_0 > 0, 1 - xy_0 > -1.$$

Pošto je $y_0 > 0$, $x > 0$, to je $1 - xy_0 < 1$, sledi, $| 1 - xy_0 |< 1$. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - y_1 &= \frac{1}{x} - 2y_0 + xy_0^2; \\ 1 - xy_1 &= 1 - 2xy_0 + x^2y_0^2 = (1 - xy_0)^2; \\ 1 - xy_2 &= (1 - xy_1)^2 = (1 - xy_0)^{2^2}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 - xy_n &= (1 - xy_0)^{2^n}. \end{aligned}$$

Odavde

$$\lim_{n\to\infty}(1 - xy_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - xy_0)^{2^n} = 0,$$

pošto je $|1 - xy_0| < 1$ i $x > 0$; pa je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}$. ▶

260. Za nalaženje $y = \sqrt{x}$, gde je $x > 0$, primenjuje se sledeći proces: $y_0 > 0$ proizvoljno,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right)\; (n \in \mathbb{N}).$$

Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}$.

◀ Polazeći od formule

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2 \quad (n \geq 1)$$

$$\text{dobijamo } \frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}}\right)^{2^n}$$

$$\text{i pošto je } \left|\frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}}\right| < 1$$

$$\text{to je } \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}}\right)^{2^n} = 0.$$

Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji N takvo da je za sve $n > N$

$$\left|\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}}\right| = \frac{1}{\left|1 + \frac{2\sqrt{x}}{y_n - \sqrt{x}}\right|} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x} + \varepsilon}$$

$$\text{ili } \frac{2\sqrt{x}}{\varepsilon}+1<\left|1+\frac{2\sqrt{x}}{y_n-\sqrt{x}}\right|\le 1+\frac{2\sqrt{x}}{|y_n-\sqrt{x}|}$$

tj. $|y_n-\sqrt{x}|<\varepsilon$ za sve $n>N$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\sqrt{x}$. ▶

261. Ako je $\omega_h[f]$ oscilacija funkcije f na segmentu $|x-\xi|\le h$ $(h>0)$, to se broj

$$\omega_0[f]=\lim_{h\to 0}\omega_h[f]$$

naziva oscilacijom funkcije f u tački ξ. Odrediti oscilaciju funkcije f u tački $x=0$, ako je:

a) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$; b) $f(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\cos^2\frac{1}{x}$; c) $f(x)=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$;

d) $f(x)=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$; e) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$; f) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

g) $f(x)=(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

◀ Saglasno definiciji oscilacije funkcije u tački, imamo:

a)

$$\begin{aligned}\omega_h[f] &= \sup_{|x|\le h}\left\{\sin\frac{1}{x}\right\}-\inf_{|x|\le h}\left\{\sin\frac{1}{x}\right\}=1-(-1)=2;\\ \omega_0[f] &= \lim_{h\to 0}\omega_h[f]=\lim_{h\to 0}2=2;\end{aligned}$$

b)

$$\omega_h[f]=\sup_{|x|\le h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\}-\inf_{|x|\le h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\}\ge\sup_{\frac{1}{|k|\pi}\le|x|\le h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\}=k^2\pi^2,$$

gde je k ceo broj, takav da je $|k|\pi\ge\frac{1}{h}$. Zato je $\omega_h[f]=+\infty$; $\omega_0[f]=+\infty$.

c)

$$\begin{aligned}0 &\le \omega_h[f]=\sup_{|x|\le h}\left\{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\right\}-\inf_{|x|\le h}\left\{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\right\}\\ &\le 3h-(-3h)=6h,\ \omega_h[f]=0,\ \omega_0[f]=0.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\omega_h[f] &= \sup_{|x|\le h}\left\{\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right\}-\inf_{|x|\le h}\left\{\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1;\\ \omega_0[f] &= \lim_{h\to 0}\omega_h[f]=\lim_{h\to 0}1=1;\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\omega_h[f] &= \sup_{|x|\le h}\left\{\frac{|\sin x|}{x}\right\} - \inf_{|x|\le h}\left\{\frac{|\sin x|}{x}\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{|\sin x|}{x} - \left(-\frac{|\sin x|}{x}\right)\right) = 2;\\ \omega_0[f] &= \lim_{h\to 0}\omega_h[f] = 2;\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\omega_h[f] &= \sup_{|x|\le h}\left\{\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}\right\} - \inf_{|x|\le h}\left\{\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{h}}} - \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}\right) = 1-0 = 1 = \omega_0[f];\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}\omega_h[f] &= \sup_{|x|\le h}\left\{(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right\} - \inf_{|x|\le h}\left\{(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right\} = \lim_{h\to 0}\left((1+h)^{\frac{1}{h}} - (1+h)^{-\frac{1}{h}}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left((1+h)^{\frac{1}{h}} - \frac{1}{(1+h)^{\frac{1}{h}}}\right) = e - \frac{1}{e} = 2\sinh 1 = \omega_0[f]. \ \blacktriangleright\end{aligned}$$

262. Odrediti

$$l = \underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \ i \ L = \overline{\lim}_{x\to 0} f(x);$$

ako je:

a) $f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$; b) $f(x) = (2-x^2)\cos\frac{1}{x}$;

c) $f(x) = \left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$.

◀ a) Pošto je

$$\inf\left\{\sin^2\frac{1}{x}\right\} = 0 \ za \ x = x_n = -\frac{1}{n\pi} \ (n\in\mathbb{N}),$$

$$\text{a } \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x_n} = \inf\left\{\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right\} = -1, \text{ to je}$$

$$l = \underline{\lim}_{x\to 0}\left(\sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sin^2 n\pi + \frac{2}{\pi}\arctan(-n\pi)\right) = -1.$$

Slično,

$$\sup\left\{\sin^2\frac{1}{x}\right\} = 1,$$

za $x = x_n = \frac{2}{\pi(1+2n)}$, $n \in \mathbb{N}$, i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x_n} = \sup \left\{ \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x} \right\} = 1.$$

Zato je

$$\begin{aligned} L &= \overline{\lim_{x\to 0}} \left(\sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sin^2 \frac{\pi(1+2n)}{2} + \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\pi(1+2n)}{2} \right) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

b) Imamo

$$\inf \left\{ \cos \frac{1}{x} \right\} = -1 \text{ za } x = x_n = -\frac{1}{(2n-1)\pi} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ i } \lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{x_n} = -1,$$

kao i $\lim\limits_{x\to 0} (2 - x^2) = 2$, te je

$$l = \underline{\lim_{x\to 0}} (2 - x^2) \cos \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2} \right) \cos(2n-1)\pi = -2.$$

Slično nalazimo da je

$$L = \overline{\lim_{x\to 0}} (2 - x^2) \cos \frac{1}{x} = 2.$$

c) Pokažimo najpre da je

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \ln(1+\alpha) < \alpha.$$

Zaista, za racionalno $\alpha = r$ ta nejednakost važi (primer 38). Ako je α iracionalan, tada postoji niz racionalnih brojeva r_n koji konvergira ka α. Prelaskom na graničnu vrednost u već dokazanoj nejednakosti (uzimajući u obzir monotonost funkcije $t \mapsto \ln(1+t)$)

$$\frac{r_n}{1+r_n} < \ln(1+r_n) < r_n,$$

dobijamo traženu nejednakost. Dalje, neka je $0 < t \le \frac{1}{\ln 2} - 1$. Tada je

$$2 = e^{\ln 2} < e^{\frac{1}{1+t}} < (1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} < e.$$

Odavde sledi da je

$$\sup_{0<t\leq 1}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \text{ i } \inf_{0<t\leq 1}(1+t)^{\frac{1}{t}}=2.$$

Kako je zatim

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)}} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin^2\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{n}}}=e;\\ \text{i } \lim_{n\to\infty}\left(1+\cos^2(n\pi)\right)^{\frac{1}{\cos^2 n\pi}} &= \lim_{n\to\infty}(1+1)=2, \text{ to je}\end{aligned}$$

$$L=\overline{\lim_{x\to 0}}\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}}=e;\ l=\underline{\lim_{x\to 0}}\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}}=2. \ ▶$$

1.5 Grafičko predstavljanje funkcija

1⁰ Grafik funkcije. Neka je funkcija $y=f(x)$ definisana na skupu X. Skup parova $(x,f(x))$, gde $x\in X$, naziva se grafikom funkcije $y=f(x)$.

Grafik funkcije $y=f(x)$ crta se u koordinatnoj ravni tako što se u njoj tačke $(x_i,f(x_i))$ $(i=1,2,...,n)$ spoje linijom vodeći računa o položaju grafika između susednih tačaka.

2⁰ Asimptote grafika funkcije. Kaže se da je prava $x=a$ vertikalna asimptota grafika funkcije $y=f(x)$, ako je bar jedna od graničnih vrednosti $\lim_{x\to a-0} f(x)$ ili $\lim_{x\to a+0} f(x)$ jednaka $+\infty$ ili $-\infty$. Prava $y=kx+b$ je kosa asimptota grafika funkcije $y=f(x)$ kad $x\to+\infty$, ako je $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, gde je $\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$.

Slično se definiše i kosa asimptota kad $x\to-\infty$.

Da bi grafik funkcije $y=f(x)$ kad $x\to+\infty$ imao kosu asimptotu $y=kx+b$, potrebno je i dovoljno da postoje sledeće dve granične vrednosti $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ i $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$.

Ako je funkcija $f(x)$ predstavljena u obliku $f(x)=g(x)+\alpha(x)$, gde je $\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ $\left(\lim_{x\to-\infty}\alpha(x)=0\right)$, onda se kaže da su funkcije f i g asimptotski jednake kad $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

3⁰ Konveksnost funkcije. Neka je funkcija f definisana na intervalu $]a,b[$. Kaže se da je grafik funkcije $y=f(x)$ na intervalu $]a,b[$ konveksan (konkavan), ako je za sve $x_1,x_2\in]a,b[$ i za proizvoljno $\alpha\in[0,1]$:

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

$$\left(f\left(\alpha x_1+(1-\alpha)\, x_2\right) \geq \alpha f\left(x_1\right)+(1-\alpha)\, f\left(x_2\right)\right)$$

4^0 Za dobijanje što tačnijeg grafika funkcije treba ispitati sledeće: **1)** oblast definisanosti, nule funkcije, parnost i neparnost, ose simetrije; **2)** intervale stalnog znaka i monotonost funkcije; **3)** asimptote grafika funkcije; 4) ponašanje funkcije na krajevima intervala definisanosti.

5^0 Rešeni zadaci.

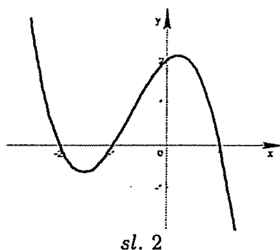
Nacrtati grafike celih racionalnih funkcija:

263. $y=\left(1-x^2\right)(2+x)$.

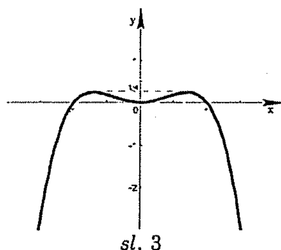
◄ Oblast definisanosti je $X=]-\infty,+\infty[$; nule funkcije su: $x=\pm 1$; $x=-2$; $y>0$, ako je $-\infty<x<-2$; $-1<x<1$, $y<0$, ako je $-2<x<-1$; $1<x<+\infty$. Koristeći tablicu vrednosti funkcije

x	-3	-2	$-1,5$	-1	$-6,5$	0	1	$1,5$
y	8	0	$-6,625$	0	$1,125$	2	0	$-4,375$

crtamo njen grafik (**sl.2**). ►



sl. 2



sl. 3

264. $y=x^2-x^4$.

◄ Oblast definisanosti je $X=]-\infty,+\infty[$; nule funkcije: $x=\pm 1$; $x=0$; funkcija je parna. Grafik funkcije je na (**sl.3**). ►

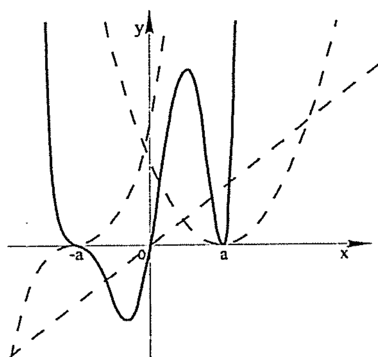
265. $y=x\,(a-x)^2\,(a+x)^3\ (a>0)$.

◄ Najpre crtamo grafike funkcija:

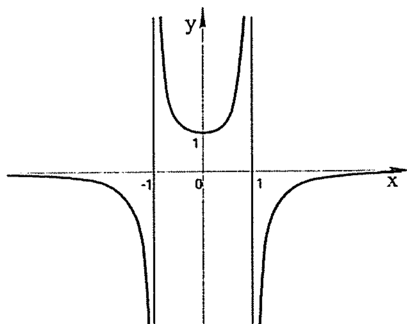
$$y=x,\ y=(a-x)^2,\ y=(a+x)^3$$

Zatim pomnožimo odgovarajuće ordinate. Koristeći vrednost funkcije u

tačkama $y\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{9a^6}{4}$, $y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{27a^6}{64}$, crtamo grafik funkcije (sl.4). ▶



sl. 4



sl. 5

Nacrtati grafike razlomljenih racionalnih funkcija:

266. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

◀ Oblast definisanosti: $-\infty < x < -1, -1 < x < 1, 1 < x < +\infty$. Funkcija je parna. Ako je $|x| < 1$, onda je $y > 0$; ako je $-\infty < x < -1, 1 < x < +\infty$, onda je $y < 0$.

Pošto je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$, to je $y = 0$ asimptota grafika funkcije. Na osnovu toga i tablice vrednosti funkcije

x	0	$\frac{1}{2}$	$x \to 1-0$	$x \to +0$	2	3	$x \to +\infty$
y	1	$\frac{4}{3}$	$y \to +\infty$	$y \to -\infty$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$	$y \to -0$

crtamo njen grafik. (sl.5). ▶

267. $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

◀ $X := -\infty < x < -2, -2 < x < 1, 1 < x < +\infty$. Nule funkcije: $x = -1$, $x = 2$. Za ispitivanje znaka funkcije rešimo nejednačine

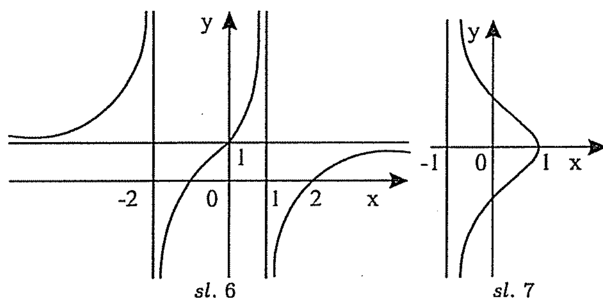
$$y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \gtrless 0.$$

Ako je $-\infty < x < -2$, to je $y > 0$. Slično za $-2 < x < -1$ imamo $y < 0$; ako je $-1 < x < 1$ to je $y > 0$; za $1 < x < 2$ sledi da je $y < 0$; na kraju za $2 < x < +\infty$, $y > 0$. Dalje je $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to-2\pm0} y = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to1\pm0} y = \pm\infty$. Sledi, $y = 1$ je horizontalna asimptota, a prave $x = -2$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote.

Na osnovu tablice vrednosti funkcije

x	-5	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4
y	$\frac{14}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{27}{7}$	$-\frac{7}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{9}$

crtamo njen grafik (sl.6). ▶



sl. 6 *sl.* 7

Nacrtati grafike iracionalnih funkcija:

268. $y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

◀ Funkcija je definisana, ako je $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$, tj. ako je $-1 < x \leq 1$. Grafik funkcije je simetričan u odnosu na osu Ox, kao i $y \to \pm\infty$, kad $x \to -1+0$, znači prava $x = -1$ je vertikalna asimptota grafika funkcije. Uzimajući u obzir rečeno kao i vrednosti funkcije u nekoliko tačaka

x	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	$\pm\sqrt{7}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$	± 1	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$	0

crtamo grafik funkcije (sl.7). ▶

269. $y = \pm x\sqrt{100 - x^2}$.

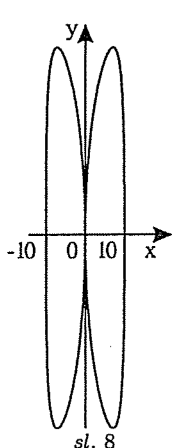
◀ Očigledno, funkcija je definisana za $|x| \leq 10$ i simetrična u odnosu na koordinatne ose. Iz jednakosti

$$y = \pm\sqrt{2500 - (x^2 - 50)^2}$$

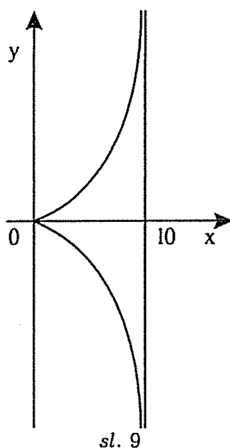
nalazimo da je najmanja vrednost funkcije jednaka -50 za $x = \pm\sqrt{50}$, a najveća vrednost $+50$ za iste vrednosti argumenta. Koristeći tablicu

x	0	2	4	6	$\sqrt{50}$	8	10
y	0	$2\sqrt{96} \approx 19,6$	$4\sqrt{84} \approx 36,6$	48	50	48	0

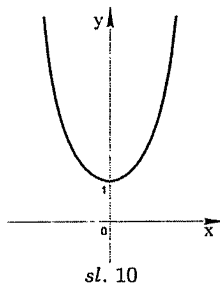
crtamo grafik funkcije (sl.8). ►



sl. 8



sl. 9



sl. 10

270. $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$. **(cisoida)**

◄ Iz nejednakosti $\frac{x}{10-x} \geq 0$ nalazimo oblast definisanosti $X: 0 \leq x < 10$. Grafik funkcije je simetričan u odnosu na osu Ox.

Dalje, $y(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 10-0} y = \pm\infty$; $kx - x\sqrt{\frac{x}{10-x}} > 0$ za $0 < x < \frac{10k^2}{k^2+1}$, gde je $k > 0$ proizvoljno. Sledi, u okolini koordinatnog početka grafik pripada proizvoljnom uglu sa kracima $y = kx$ i $y = 0$, tj. dodiruje apscisnu osu u koordinatnom početku. Na osnovu toga i tablice

x	0	2	4	6	8
y	0	± 1	$\pm 4\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 3,26$	$\pm 6\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 7,34$	± 16

crtamo grafik funkcije (sl.9). ►

271. Nacrtati grafik složene eksponencijalne funkcije $y = e^{y_1}$ ako je:
a) $y_1 = x^2$; b) $y_1 = -x^2$; c) $y_1 = \frac{1}{x}$; d) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; e) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$;
f) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

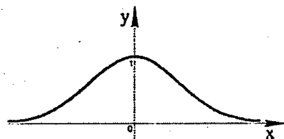
◄ a) Funkcija $y = e^{x^2}$ je definisana za sve vrednosti x; parna je: $y(-x) = y(x)$, raste za $x > 0$, opada za $x < 0$. Sledi, najmanja vrednost funkcije je 1 za $x = 0$. Na osnovu toga i tablice vrednosti funkcije

x	0	1	2
y	1	e	e^4

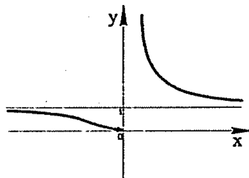
crtamo njen grafik (sl.10).

b) Funkcija $y = e^{-x^2}$ je definisana za $-\infty < x < +\infty$; parna je i opada

ako se x udaljava od koordinatnog početka. Zatim je $y > 0$ za sve x i $\lim_{x\to\pm\infty} y = 0$, tj. prava $y = 0$ je asimptota kad $x \to \pm\infty$ (**sl.11**).



sl. 11



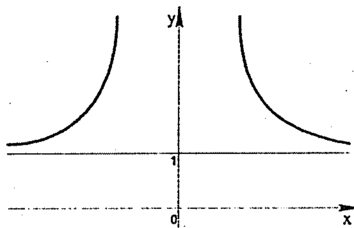
sl. 12

c) Funkcija $y = e^{\frac{1}{x}}$ je definisana za $-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$. Ako je $x_1 < x_2$, onda je $e^{\frac{1}{x_1}} < e^{\frac{1}{x_2}}$, pa funkcija opada. Iz relacija

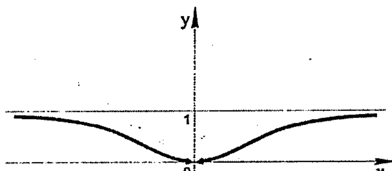
$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

sledi, da je $y = 1$ asimptota funkcije kad $x \to \pm\infty$, a $x = 0$ asimptota kad $x \to +0$ (**sl.12**).

d) Funkcija $y = e^{\frac{1}{x^2}}$ je definisana za $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$; parna je. Pošto je $\lim_{x\to\pm 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$ i $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$ sledi, prava $y = 0$ je asimptota kad $x \to \pm\infty$ a prava $x = 0$ je asimptota za $x \to \pm 0$. Neposredno sledi da funkcija opada za $|x| \to \infty$ kao i da je $y > 1$ za sve x. Nalazeći vrednost funkcije u nekoliko tačaka crtamo grafik funkcije (**sl.13**).



sl. 13



sl. 14

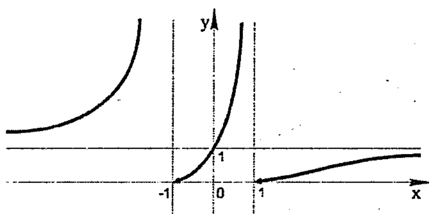
e) Za funkciju $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ je $X : -\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$. Funkcija je parna i $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$, $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Izračunavanjem vrednosti funkcije u nekoliko tačaka, crtamo grafik funkcije (**sl.14**).

f) Funkcija $y = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$ je definisana za sve $x \neq \pm 1$. Dalje je,

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = 1, \quad \lim_{x\to-1-0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = +\infty, \quad \lim_{x\to-1+0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = 0,$$

tj. $y = 1$ je asimptota kad $x \to \infty$; $x = -1$ kad $x \to -1-0$ i $x = 1$ kad $x \to 1-0$. S obzirom da funkcija $y = \frac{2x}{1-x^2}$ raste, takva je i funkcija $y = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$. Na osnovu rečenog crtamo grafik date funkcije (**sl.15**). ►



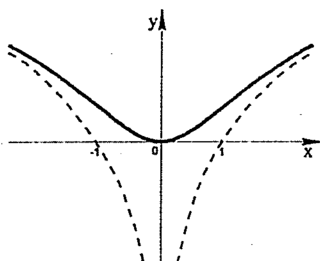
sl. 15

272. Nacrtati grafik složene logaritamske funkcije $y = \ln y_1$, ako je:
a) $y_1 = 1 + x^2$; b) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$; c) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$;
d) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; e) $y_1 = 1 + e^x$.

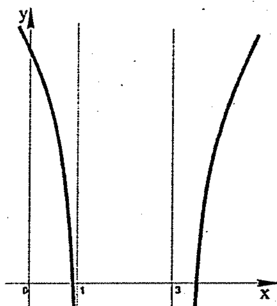
◄ a) Funkcija $y = \ln\left(1+x^2\right)$ je definisana za sve vrednosti x, parna je i rastuća za $|x| \to \infty$. Iz nejednakosti $kx - \ln\left(1+x^2\right) = kx - x^2 \ln\left(1+x^2\right) > kx - x^2 e > 0$, ispunjene za $0 < x < \frac{k}{e}$ i proizvoljno k, sledi, da grafik dodiruje osu Ox u koordinatnom početku. Dalje,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(1+x^2\right) - 2\ln|x|\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{1+x^2}{x^2} = 0,$$

tj. funkcije $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ i $x \mapsto 2\ln|x|$ su asimptotski jednake kad $|x| \to \infty$. Polazeći od toga crtamo grafik funkcije (**sl.16**).



sl. 16



sl. 17

b) Oblast definisanosti funkcije

$$y = \ln\left((x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right)$$

nalazimo, rešavanjem nejednačine

$$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 > 0.$$

Ako je $-\infty < x < 1$ i $3 < x < +\infty$, izraz $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ je pozitivan, a za $1 < x < 3$ negativan. Iz jednakosti

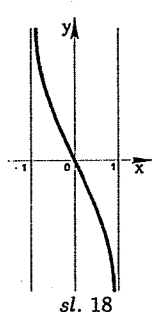
$$\lim_{x\to 1-0} y = -\infty, \quad \lim_{x\to 3+0} y = -\infty$$

sledi, prave $x = 1$ i $x = 3$ su asimptote kad $x \to 1-0$ i $x \to 3+0$ respektivno (**sl.17**).

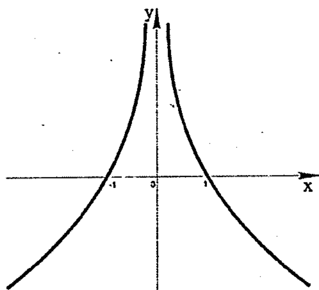
c) Iz nejednakosti $\frac{1-x}{1+x} > 0$ proističe, da je funkcija $y = \ln\frac{1-x}{1+x}$ definisana za $|x| < 1$. Pošto je $y_1 = \frac{1-x}{1+x} = -1+\frac{2}{1+x}$ opadajuća na intervalu $-1 < x < 1$, to je takva i data funkcija. Imamo,

$$\lim_{x\to 1-0} \ln\frac{1-x}{1+x} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1+0} \ln\frac{1-x}{1+x} = +\infty,$$

odakle sledi, $x = 1$ je vertikalna asimptota kad $x \to 1-0$, a $x = -1$ je asimptota kad $x \to -1+0$. Polazeći od toga i činjenice da je $y(0) = 0$, crtamo grafik funkcije (**sl.18**).



sl. 18



sl. 19

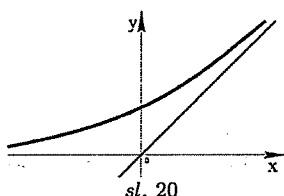
d) Ako je $y_1 = \frac{1}{x^2}$, to je $y = -2\ln|x|$, odakle se vidi da je funkcija y parna kao i da je $\lim_{x\to 0}(-2\ln|x|) = +\infty$. Sledi, $x = 0$ je vertikalna asimptota kad $x \to \pm 0$. Smatrajući da je grafik funkcije $y_1 = \ln x$ poznat, lako crtamo grafik date funkcije (**sl.19**).

e) Ako x raste od $-\infty$ do $+\infty$, to funkcija $y_1 = 1 + e^x$ raste od 1 do $+\infty$. Sledi, funkcija $y = \ln(1+e^x)$ je definisana i rastuća na celoj brojnoj pravoj. Iz relacija

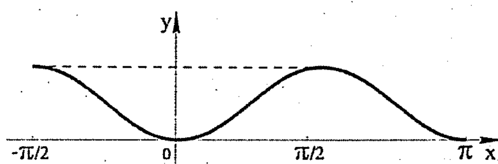
$$\lim_{x\to -\infty} \ln(1+e^x) = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} (\ln(1+e^x) - x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\frac{1+e^x}{e^x} = 0$$

sledi, da je $y = 0$ asimptota kad $x \to -\infty$, a $y = x$ kad $x \to +\infty$. Sada je

lako nacrtati grafik funkcije (sl.20). ►



sl. 20



sl. 21

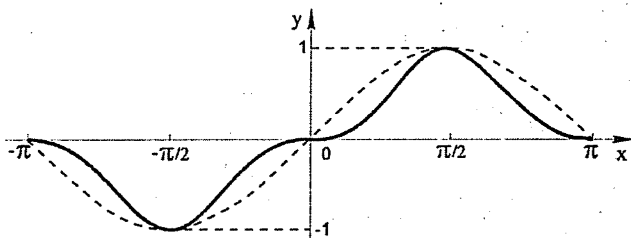
Nacrtati grafike trigonometrijskih funkcija:

273. $y = \sin^2 x$.

◄ Vidimo da je $y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ i da je period funkcije jednak π, na osnovu čega lako crtamo grafik, (**sl.21**). ►

274. $y = \sin^3 x$.

◄ Za svaku fiksiranu vrednost x uzmimo treći stepen ordinate grafika funkcije $y = \sin x$; dobijamo ordinatu grafika funkcije $y = \sin^3 x$(**sl.22**). ►



sl. 22

275. $y = \sin x \sin 3x$

◄ Koristeći jednakost $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, dobijamo

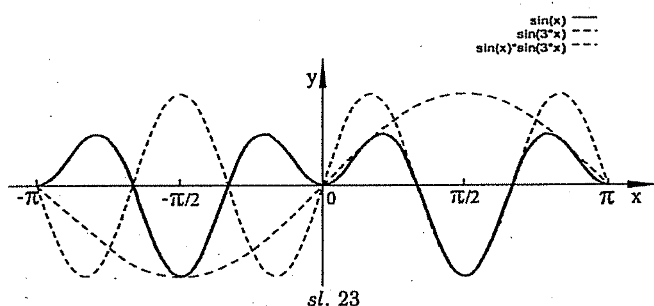
$$y = 3\sin^2 x - 4\sin^4 x = 4\left(\frac{9}{64} - \left(\sin^2 x - \frac{3}{8}\right)^2\right).$$

Lako je videti da je

$$-1 \leq 4\left(\frac{9}{64} - \left(\sin^2 x - \frac{3}{8}\right)^2\right) \leq \frac{9}{16},$$

pri čemu je donja granica dostignuta, ako je $\sin^2 x = 1$, tj. za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a gornja, ako je $\sin^2 x = \frac{3}{8}$, tj. za $x = \pm \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Najpre crtamo grafike funkcija $y = \sin x$ i $y = \sin 3x$, a zatim uzimajući u

obzir dobijeno, crtamo grafik proizvoda (sl.23). ▶



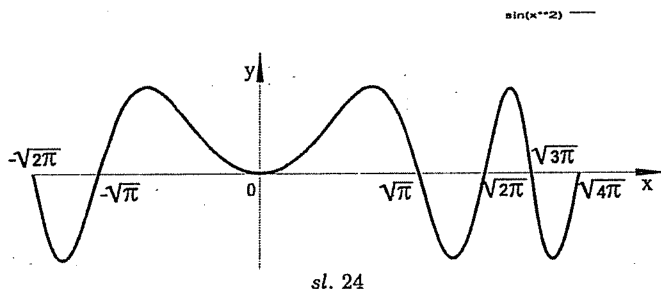
sl. 23

276. $y = \sin x^2$.

◀ Funkcija je parna. Iz jednakosti $\sin x^2 = 0$ nalazimo nule funkcije $x = \pm\sqrt{k\pi}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Iz toga što je

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}} = 0,$$

sledi, da rastojanje između uzastopnih nula teži nuli sa rašćenjem k. Na osnovu toga i činjenice da je $|y| \leq 1$, crtamo grafik funkcije (sl.24). ▶



sl. 24

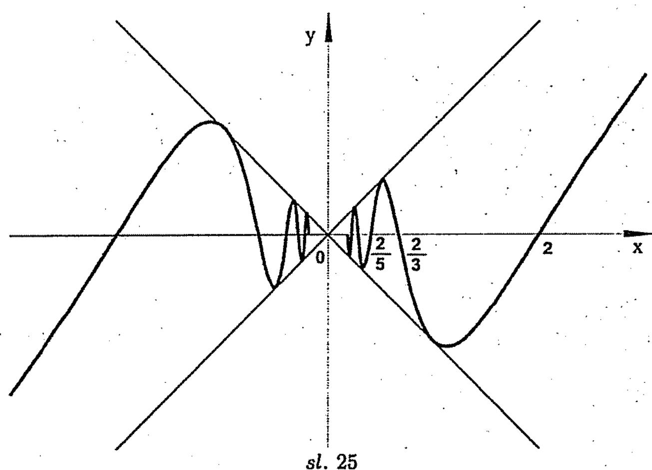
277. $y = x\cos\frac{\pi}{x}$.

◀ Funkcija je definisana za $0 < |x| < +\infty$. Ako stavimo $y(0) = \lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{\pi}{x} = 0$, to dobijamo funkciju definisanu za sve x. Pošto je $-\left(x\cos\frac{\pi}{x}\right) = -x\cos\frac{\pi}{-x}$, to je funkcija y neparna. Nule funkcije su:

$$x = 0,\ x = \frac{2}{1+2k}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Imamo $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cos\frac{\pi}{x}}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cos\frac{\pi}{x} - x\right) = 0$, sledi, $y = x$ je asimptota grafika funkcije kad $x \to \infty$. Ako najpre nacrtamo grafike funkcija

$y = x$ i $y = \cos\frac{\pi}{x}$, onda prema dobijenim informacijama lako crtamo grafik date funkcije (**sl.25**). ▶



sl. 25

278. $y = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$.

◀ Primetimo da je za $x > 0$

$$x \leq x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) \leq 3x,$$

gde znak jednakosti važi: sleva za $x = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Ako je $x < 0$, to je

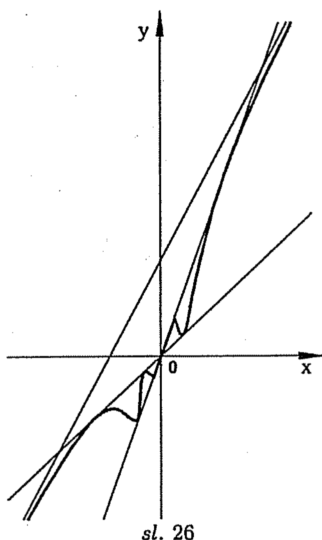
$$3x \leq x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) \leq x,$$

a znak jednakosti je postignut redom u tačkama $x = -\frac{2}{(4k+3)\pi}$ i $x = -\frac{2}{(4k+1)\pi}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Dalje je,

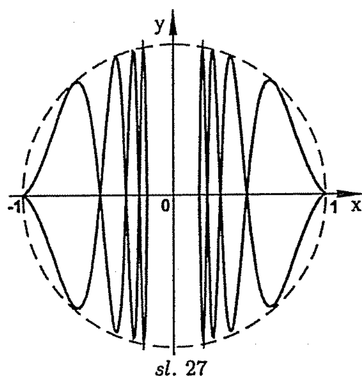
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)}{x} = 2, \quad \lim_{x\to\infty}\left(x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) - 2x\right) = 1,$$

tj. $y = 2x + 1$ je asimptota grafika funkcije kad $x \to \infty$. Na osnovu te

informacije, crtamo grafik funkcije (**sl.26**) ►



sl. 26



sl. 27

279. $y = \pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.

◄ Funkcija je definisana za $-1 \le x < 0,\ 0 < x \le +1$. Grafik je simetričan u odnosu na obe ose, zato je dovoljno nacrtati grafik funkcije

$$y = +\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x},\ 0 < x \le 1.$$

Očigledno je

$$-\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x} \le \sqrt{1-x^2},\ 0 < x \le 1,$$

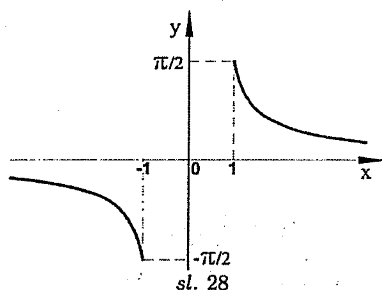
pri čemu je znak jednakosti postignut sleva i zdesna respektivno u tačkama $x = \frac{2}{4k+3}$ i $x = \frac{2}{4k+1}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Pored toga sledi da je grafik funkcije sadržan u jediničnom krugu sa centrom u koordinatnom početku. Polazeći od toga crtamo grafik funkcije (**sl.27**). ►

Nacrtati grafike inverznih trigonometrijskih funkcija:

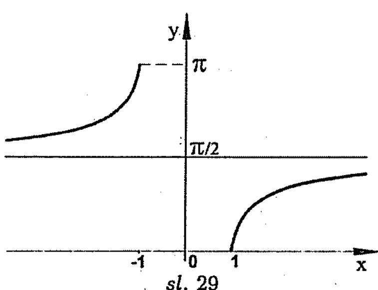
280. $y = \arcsin\frac{1}{x}$.

◄ Funkcija je definisana za $\left|\frac{1}{x}\right| \le 1$, tj. ako je $|x| \ge 1$. Iz jednakosti $y(-x) = -y(x)$ sledi, da je funkcija neparna, a iz definicije arkussinusa sledi njena ograničenost $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, gde je $y(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$. Dalje, $y \to 0$ kad $x \to \infty$, sledi, $y = 0$ je asimptota grafika funkcije kad $x \to \infty$.

Na kraju primetimo da funkcija opada u oblasti definisanosti (sl.28). ▶



sl. 28



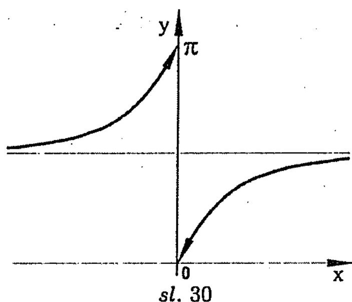
sl. 29

281. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

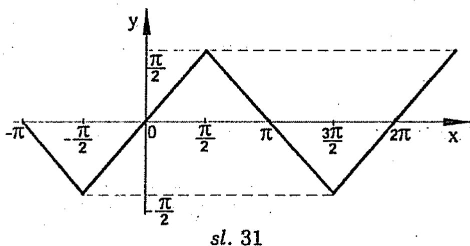
◀ Funkcija je definisana za $|x| \geq 1$ i raste na svakom od intervala definisanosti. Ako $|x|$ neograničeno raste, to $\arccos \frac{1}{x}$ teži ka $\frac{\pi}{2}$, znači $y = \frac{\pi}{2}$ je asimptota kad $x \to \infty$ (sl.29). ▶

282. $y = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$.

◀ Funkcija je definisana za sve $x \neq 0$ i raste na svakom od intervala definisanosti. Ako $|x| \to +\infty$, to $\operatorname{arccot} \frac{1}{x} \to 0$. Ako $x \to -0$, onda $\operatorname{arccot} \frac{1}{x} \to \pi - 0$ i $\operatorname{arccot} \frac{1}{x} \to +0$ kad $x \to +0$ (sl.30). ▶



sl. 30



sl. 31

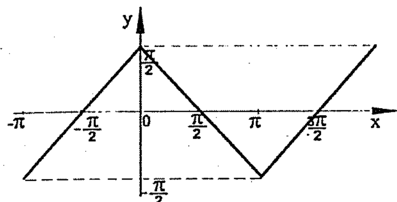
283. $y = \arcsin(\sin x)$.

◀ Pošto je $\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x)$ to je funkcija periodična sa periodom 2π. Iz definicije arcussinusa sledi da je $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Dalje, $\sin y = \sin x$, tj. $y = x$ za $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ i $y = \pi - x$ ako je $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}$ (sl.31). ▶

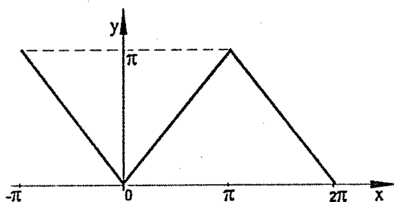
284. $y = \arcsin(\cos x)$.

◀ Funkcija ima period 2π i $|y| \leq \frac{\pi}{2}$. Imamo, $\sin y = \cos x$, $\sin y - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, odakle sledi $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ i $y = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uzimajući u obzir da je $|y| \leq \frac{\pi}{2}$, imamo $y = -x + \frac{\pi}{2}$ za $0 \leq x \leq \pi$ i $y = x + \frac{\pi}{2}$

za $-\pi \leq x < 0$ (**sl.32**). ▶



sl. 32



sl. 33

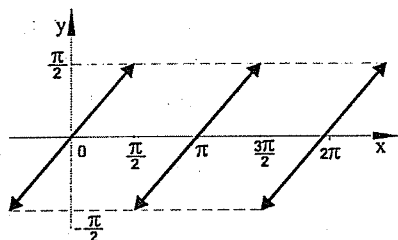
285. $y = \arccos(\cos x)$.

◀ Funkcija je periodična sa periodom 2π i $0 \leq y \leq \pi$.

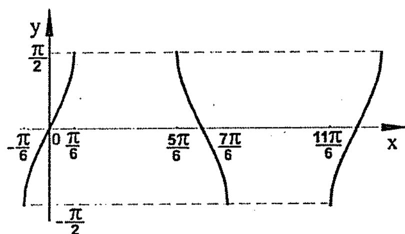
Imamo $\cos y = \cos x$, odakle sledi $y = x + 2k\pi$ ili $y = -x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pošto je $0 \leq y \leq \pi$, to je $k = 0$ i $y = x$, za $0 \leq x \leq \pi$ i $y = -x$, ako je $-\pi \leq x < 0$. Koristeći periodičnost funkcije, crtamo grafik (**sl.33**). ▶

286. $y = \arctan(\tan x)$.

◀ S obzirom da je funkcija periodična sa periodom π i $|y| < \frac{\pi}{2}$, to iz definicije arcustangensa sledi, $\tan y = \tan x$, tj. $y = x$ za $|x| < \frac{\pi}{2}$. Sada koristeći periodičnost crtamo grafik funkcije (**sl.34**). ▶



sl. 34



sl. 35

287. $y = \arcsin(2\sin x)$.

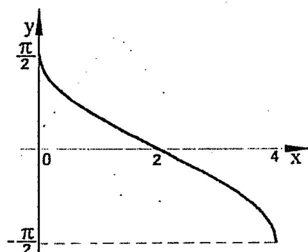
◀ Funkcija je definisana za $|2\sin x| \leq 1$, tj. ako je $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Lako se proverava neparnost i periodičnost funkcije sa periodom 2π. Na osnovu toga crtamo grafik funkcije (**sl.35**). ▶

288. Nacrtati grafik funkcije $y = \arcsin y_1$, ako je:

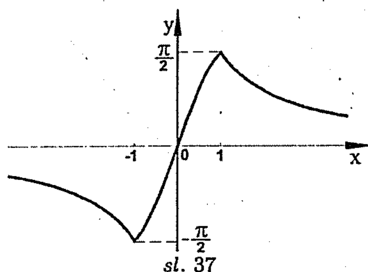
$$\text{a) } y_1 = 1 - \frac{x}{2}; \text{ b) } y_1 = \frac{1-x}{1+x};$$
$$\text{c) } y_1 = \frac{2x}{1+x^2}; \text{ d) } y_1 = e^x.$$

◀ a) $y = \arcsin\left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Funkcija je definisana za $-1 \leq 1 - \frac{x}{2} \leq 1$, tj.

ako je $0 \le x \le 4$. Ako se x menja od 0 do 4 to y opada od $\frac{\pi}{2}$ do $-\frac{\pi}{2}$, pri čemu je $y = 0$ za $x = 2$ (**sl.36**).



sl. 36



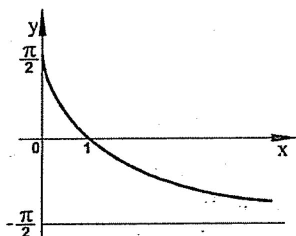
sl. 37

b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Funkcija je neparna i definisana za sve vrednosti promenljive x. Stavimo $x = \tan \frac{t}{2}$, $|t| < \pi$, tada je $y = \arcsin(\sin t)$, $|t| < \pi$. Odatle je (primer 238)

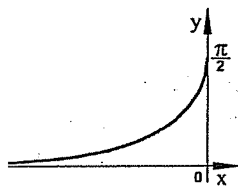
$$y = \begin{cases} t = 2\arctan t, & |x| < 1; \\ \pi - t = \pi - 2\arctan t, & |x| > 1. \end{cases}$$

Pošto je $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$, to je $y = 0$ asimptota kad $x \to \infty$ (**sl.37**).

c) $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$. Rešavanjem nejednakosti $-1 \le \frac{1-x}{1+x} \le 1$, nalazimo da je funkcija definisana, ako je $0 \le x < +\infty$. Ako se x menja od 0 do $+\infty$ to funkcija opada od $\frac{\pi}{2}$ do $-\frac{\pi}{2}$, tj. $y = -\frac{\pi}{2}$ je asimptota grafika funkcije kad $x \to +\infty$ (**sl.38**).



sl. 38.



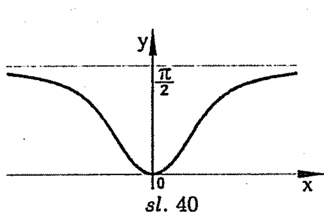
sl. 39

d) $y = \arcsin e^x$. Funkcija je definisana za $-\infty < x \le 0$ i u tom razmaku raste od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Sledi, $y = 0$ je asimptota grafika funkcije kad $x \to -\infty$ (**sl.39**). ►

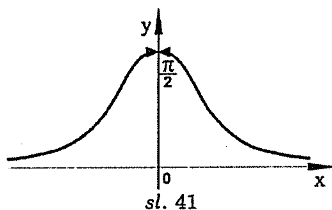
289. Nacrtati grafik funkcije $y = \arctan y_1$, ako je:
a) $y_1 = x^2$; b) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; c) $y_1 = \ln x$; d) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$;

◄ a) $y = \arctan x^2$. Funkcija je definisana za $|x| < \infty$, parna je i raste od 0 do $\frac{\pi}{2}$ ako se x menja od 0 do $+\infty$. Prava $y = \frac{\pi}{2}$ je asimptota grafika

kad $x \to \infty$ (**sl.40**).



sl. 40



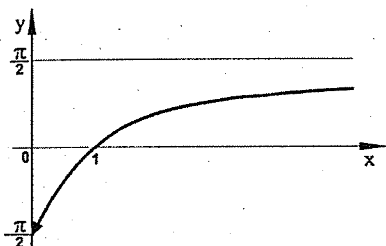
sl. 41

b) $y = \arctan \frac{1}{x^2}$. Funkcuja je parna i definisana za sve vrednosti promenljive x izuzev $x = 0$. Ako x raste od 0 do $+\infty$, onda y opada od $\frac{\pi}{2}$ do 0, tj. $y = 0$ je asimptota kad $x \to \infty$ (**sl.41**).

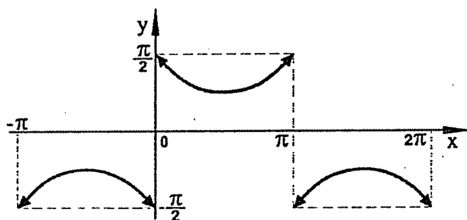
c) $y = \arctan(\ln x)$. Funkcija je definisana, ako je $-\infty < \ln x < +\infty$, tj. za $0 < x < +\infty$. Dalje, y raste na $]0, +\infty[$. Imamo,

$$\lim_{x \to +0} \arctan(\ln x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan(\ln x) = \frac{\pi}{2}.$$

Odavde sledi da je $y = \frac{\pi}{2}$ asimptota kad $x \to +\infty$ (**sl.42**).



sl. 42



sl. 43

d) $y = \arctan \frac{1}{\sin x}$. Funkcija je definisana za $k\pi < x < (k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, neparna je i periodična sa periodom 2π. Na razmaku $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ funkcija opada od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{4}$, a na razmaku $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ raste od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$. Uzimajući u obzir neparnost i periodičnost funkcije, crtamo njen grafik (**sl.43**). ▶

290. Odrediti vertikalne ose simetrije funkcija:

a) $y = ax^2 + bx + c$; b) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ $(0 < a < b)$;

c) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$; d) $y = a + b\cos x$.

◀ Grafik funkcije $y = f(x)$ simetričan je u odnosu na vertikalnu osu $x = x_0$, ako je $f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$ za sve x iz oblasti definisanosti funkcije f.

a) Iz uslova simetrije dobijamo $-2axx_0 - bx \equiv 2axx_0 + bx$, odatle je $x_0 = -\frac{b}{2a}$, tj. $x = -\frac{b}{2a}$ je osa simetrije.

b) Zapišimo uslov simetrije u obliku

$$\frac{1}{(x_0-x)^2}+\frac{1}{(1-x_0+x)^2}\equiv\frac{1}{(x_0+x)^2}+\frac{1}{(1-x_0-x)^2},$$

odakle, pretpostavljajući da je imenilac različit od nule, dobijamo

$$x_0\left((1-2x_0)^2+2(1-2x_0)\left(x_0^2-x^2\right)+\left(x_0^2-x^2\right)^2\right)\equiv(1-x_0)\left(x_0^2-x^2\right)^2.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene razlike $x_0^2-x^2$ dobijamo sistem:

$$\begin{array}{ll}\left(x_0^2-x^2\right)^2: & x_0=1-x_0;\\ x_0^2-x^2: & 2x_0(1-2x_0)=0;\\ \left(x_0^2-x^2\right)^0: & x_0(1-2x_0)^2=0,\end{array}$$

iz koga sledi $x_0=\frac{1}{2}$; znači osa simetrije je prava $x=\frac{1}{2}$.

c) Slično prethodnom primeru imamo

$$\sqrt{a+x_0-x}+\sqrt{b-x_0+x}\equiv\sqrt{a+x_0+x}+\sqrt{b-x_0-x}.$$

Oslobađanjem od iracionalnosti, dobijamo $2x(a-b)\equiv-4x_0x$, tj. $x_0=\frac{b-a}{2}$, odnosno, $x=\frac{b-a}{2}$ je osa simetrije.

d) Imamo $a+b\cos(x_0-x)\equiv a+b\cos(x_0+x)$, tj. $2\sin x_0\sin x\equiv 0$, odakle sledi da su prave $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ose simetrije. ▶

291. Odrediti centar simetrije grafika sledećih funkcija:

a) $y=ax+b$; b) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$; c) $y=ax^3+bx^2+cx+d$;

d) $y=y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$; e) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

◀ Tačka $M(x_0,y_0)$je centar simetrije grafika funkcije $y=f(x)$, ako je za sve x iz domena funkcije

$$y_0\equiv\frac{1}{2}\left(f(x_0-x)+f(x_0+x)\right).$$

a) Uslov simetrije glasi: $2y_0\equiv a(x_0-x)+b+a(x_0+x)+b$. Odavde se dobija $y_0\equiv ax_0+b$, gde je x_0 proizvoljno. Dakle, $M(x_0,ax_0+b)$ je centar simetrije.

b) Iz uslova simetrije

$$2y_0\equiv\frac{ax_0+b-ax}{cx_0+d-cx}+\frac{ax_0+b+ax}{cx_0+d+cx}$$

dobijamo

$$2y_0\left((cx_0+d)^2-c^2x^2\right)\equiv 2(ax_0+b)(cx_0+d)-2acx^2.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene x imamo:

$$x^2: \quad -2y_0c^2 = -2ac;$$
$$x^3: \quad 2y_0(cx_0+d)^2 = 2(ax_0+b)(cx_0+d).$$

Odavde se dobija $y_0 = \frac{a}{c}$, $x_0 = -\frac{d}{c}$, tj. $M\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

c) Imamo

$$\begin{aligned} 2y_0 &\equiv a(x_0-x)^3 + b(x_0-x)^2 + c(x_0-x) + d + a(x_0+x)^3 \\ &+b(x_0+x)^2 + c(x_0+x) + d, \\ y_0 &= ax_0^3 + 3ax_0x^2 + bx_0^2 + bx^2 + cx_0 + d. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene x dobijamo

$$x_0 = -\frac{b}{3a}, \ y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d.$$

Analogno se nalazi centar simetrije i u preostala dva primera. ►

292. Dokazati, da ako je grafik funkcije $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ simetričan u odnosu na dve vertikalne ose $x = a$ i $x = b$ $(b > a)$, onda je funkcija f periodična.

◄ Zapišimo uslov simetrije:

$$f(a-t) \equiv f(a+t) \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{1}$$

$$f(b-x) \equiv f(b+x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

U jednakosti (2) stavimo $b - x = a - t$. Tada je

$$f(a-t) \equiv f(t+2b-a). \tag{3}$$

Iz jednakosti (1) i (3) dobijamo

$$f(t+2b-a) \equiv f(a+t) \tag{4}$$

Neka je $a + t = x$. Tada iz (4) konačno dobijamo

$$f(x+2b-2a) \equiv f(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

odakle i sledi periodičnost funkcije f, gde je $2b - 2a$ period. ►

293. Dokazati, da ako je grafik funkcije $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ simetričan u odnosu na dve tačke $A(a, y_0)$ i $B(b, y_1)$ $(b > a)$,to je funkcija f jednaka zbiru linearne i periodične funkcije. Specijalno, ako je $y_0 = y_1$, onda je funkcija f periodična.

◀ Zapišimo uslov simetrije

$$f(a-t)+f(a+t)=2y_0 \quad (-\infty<t<+\infty) \tag{1}$$

$$f(b-x)+f(b+x)=2y_1 \quad (-\infty<x<+\infty) \tag{2}$$

Stavljajući u (2) $b-x=a-t$, dobijamo

$$f(a-t)+f(t+2b-a)=2y_1. \tag{3}$$

Iz jednakosti (1) i (3) proističe, da je

$$f(t+2b-a)=f(a+t)+2f(y_1-y_0)$$

Ako u poslednjoj jednakosti stavimo $a+t=x$, to konačno dobijamo

$$f(x+2b-2a)=f(x)+2(y_1-y_0) \tag{4}$$

Očigledno, ako je $y_1=y_0$, funkcija f je periodična sa periodom $T=2(b-a)$.

U jednakosti (4) stavimo

$$f(x)=\varphi(x)+\frac{y_1-y_0}{b-a}(x-a)+y_0 \tag{5}$$

gde je φ neka funkcija. Tada dobijamo

$$\begin{aligned}&\varphi(2b-2a+x)+\frac{y_1-y_0}{b-a}(2b-2a+x-a)+y_0\\ =\;&\varphi(x)+\frac{y_1-y_0}{b-a}(x-a)+y_0+2(y_1-y_0),\end{aligned}$$

odakle sledi, da je $\varphi(x+2b-2a)=\varphi(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, tj. funkcija f je predstavljena kao zbir linearne i periodične funkcije (5). ▶

294. Dokazati, da ako je grafik funkcije $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ simetričan u odnosu na tačku $A(a,y_0)$ i pravu $x=b$ $(b\neq a)$, to je funkcija f periodična.

◀ Iz uslova zadatka slede jednakosti:

$$f(a-x)+f(a+x)=2y_0;\; f(b-t)=f(b+t)$$

Stavljajući $b-t=a-x$, dobijamo jednakost

$$f(a-x)=f(2b-a+x),$$

koja u saglasnosti sa prvom jednakošću daje uslov:

$$f(2b-a+x)+f(a+x)=2y_0.$$

Zamenjujući $a+x$ sa x, imamo

$$f(2b-2a+x)=-f(x)+2y_0.$$

Dalje, ako umesto x uzmemo $2b-2a+x$ dobijamo

$$f(4b-4a+x)=-f(2b-2a+x)+2y_0=-(-f(x)+2y_0)+2y_0=f(x),$$

što i dokazuje periodičnost funkcije f, gde je period jednak $4b-4a$. ►

295. Nacrtati grafik funkcije $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, ako je $f(x+1)=2f(x)$ i $f(x)=x(1-x)$ za $0\le x\le 1$.

◄ Za prirodan broj n imamo

$$f(x+n)=2f(x+n-1)=2^2f(x+n-2)=\cdots=2^nf(x).$$

Odavde je $f(x)=2^{-n}f(x+n)$. Zamenjivanjem x sa $x-n$, dobijamo

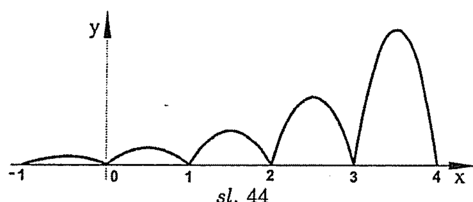
$$f(x-n)=2^{-n}f(x),$$

sledi, $f(x+n)=2^nf(x)$ za $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Pošto je $f(x)=x(1-x)$ za $0\le x\le 1$, to se smenom $t=x+n$, dobija $f(t)=2^n(t-n)(n+1-t)$, $n\le t\le n+1$ ili $f(x)=2^n(x-n)(n+1-x)$, $n\le x\le n+1$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$Odavde imamo

$$f(x)=\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2^{-1}(x+1)(-x), & -1\le x\le 0;\\ x(1-x), & 0\le x\le 1;\\ 2(x-1)(2-x), & 1\le x\le 2;\\ 2^2(x-2)(3-x), & 2\le x\le 3;\\ 2^3(x-3)(4-x), & 3\le x\le 4;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Sada lako crtamo grafik (sl.44) ►



sl. 44

296. Nacrtati grafik funkcije $y = f(x)$ $(- < x < +\infty)$, ako je $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$ i $f(x) = 0$ za $0 \le x \le \pi$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned}
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f(x+\pi) &= f(x) + \sin x;\\
f(x+2\pi) &= f(x+\pi) + \sin(x+\pi) = f(x) + \sin x - \sin x = f(x)\\
f(x+3\pi) &= f(x+2\pi) + \sin(x+2\pi) = f(x) + \sin x;\\
f(x+4\pi) &= f(x+3\pi) + \sin(x+3\pi) = f(x) + \sin x - \sin x = f(x)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Znači

$$f(x+n\pi) = \begin{cases} f(x), & n = 2k; \\ f(x) + \sin x, & n = 2k-1. \end{cases} \qquad (1)$$

Zamenjujući u jednakosti $f(x) = f(x+\pi) - \sin x$, x sa $x - \pi$, dobijamo

$$f(x-\pi) = f(x) + \sin x.$$

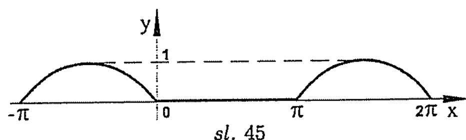
Rasuđujući kao na početku, dobijamo jednakost (1) i za cele brojeve n.

Neka je $x + n\pi = t$. Tada, ako je $0 \le x \le \pi$, to je $n\pi \le t \le (n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ i $f(x) = 0$. Sledi,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ -\sin t, & n = 2k-1, \end{cases}$$

$$n\pi \le t \le (n+1)\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Sada crtamo grafik funkcije (sl.45). ▶



sl. 45

297. Nacrtati grafik funkcije $y = f(x)$, zadate parametarski, ako je

a) $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$; b) $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t^2}$; c) $x = 10\cos t$, $y = \sin t$ (elipsa),

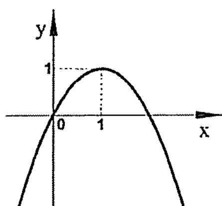
d) $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ (hiperbola), e) $x = 5\cos^2 t$, $y = 3\sin^2 t$;

f) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (cikloida), g) $x = \sqrt[t+1]{t}$, $y = \sqrt[t]{t+1}$ $(t > 0)$.

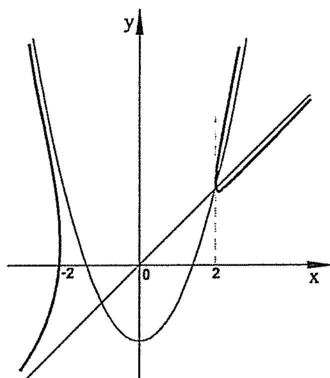
◀ a) Pošto je $y(-t) = y(t)$, to je $t = 0$, tj. $x = 1$ je osa simetrije. Sastavljajući tablicu

t	0	1	2	3	$t \to +\infty$
x	1	0	-1	-2	$x \to -\infty$
y	1	0	-3	-8	$y \to -\infty$

i uzimajući u obzir simetričnost, crtamo grafik funkcije (sl.46).



sl. 46



sl. 47

b) Iz nejednakosti $|x| = \left|t + \frac{1}{t}\right| \geq 2$ proističe, da je funkcija definisana, ako je $-\infty < x \leq -2$ i $2 \leq x < +\infty$. Primetimo da je $y - x = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \to \mp 0$ kad $t \to \pm\infty$, tj. kad $x \to \pm\infty$. Sledi, $y = x$ je asimptota kad $x \to \infty$.

Dalje, $y = x^2 - 2 - t^2 + t$ i $y - x^2 + 2 \to \pm 0$ kad $t \to \pm 0$, tj. kad $x \to \pm\infty$. Zato je $y = x^2 - 2$ asimptota grafika funkcije kad $x \to \infty$. Na osnovu toga i tablice

t	$-\frac{1}{n}$	$-n$	$\frac{1}{n}$	n
x	$-\left(n + \frac{1}{n}\right)$	$-\left(n + \frac{1}{n}\right)$	$n + \frac{1}{n}$	$n + \frac{1}{n}$
y	$n^2 - \frac{1}{n}$	$-n + \frac{1}{n^2}$	$n^2 + \frac{1}{n}$	$n + \frac{1}{n^2}$

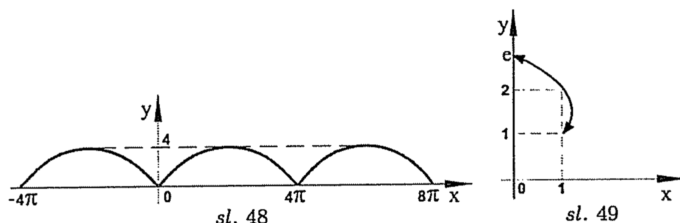
crtamo grafik funkcije (sl.47).

c) Oblast definisanosti je $0 \leq x \leq 5$, a oblast vrednosti $0 \leq y \leq 3$. Pošto je $\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, grafik funkcije predstavlja segment prave $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, koji se nalazi između tačaka $M_0\,(0,3)$ i $M_1\,(5,0)$.

d) Funkcija je definisana za $-\infty < x < +\infty$, ograničena $0 \leq y \leq 4$ i periodična sa periodom 2π po parametru t. Sastavimo tablicu

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$	$\pi - 2$	$\frac{3\pi}{2} - \sqrt{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2} + \sqrt{2}$	$3\pi + 2$	$\frac{7\pi}{2} + \sqrt{2}$	4π
y	0	$2 - \sqrt{2}$	2	$2 + \sqrt{2}$	4	$2 + \sqrt{2}$	2	$2 - \sqrt{2}$	0

i nacrtajmo grafik funkcije (sl.48).



sl. 48 sl. 49

e) Sastavimo tablicu

t	$t=\frac{1}{n}\to 0$	1	$t=n\to\infty$
x	$x\to +0$	1	$x\to 1+0$
y	$y\to e-0$	2	$y\to 1+0$

i nacrtajmo grafik funkcije (sl.49).

Na sličan način crtamo grafike funkcija u slučajevima f) i g). ►

298. Nacrtati grafike implicitnih funkcija:

a) $x^2-xy+y^2=1$ (elipsa); b) $x^3+y^3-3xy=0$ (Dekartov list);

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (parabola); d) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ (astroida); e) $\sin x=\sin y$;

f) $\cos\left(\pi x^2\right)=\cos\pi y$; g) $x^y=y^x$ $(x>0,\ y>0)$; h) $x-|x|=y-|y|$.

◄ a) Crtanje grafika ostavljamo čitaocu.

b) Uzimanjem smene $\frac{y}{x}=t$, dobijamo

$$x=\frac{3t}{t^3+1},\ y=\frac{3t^2}{t^3+1}.$$

Na osnovu tablice se uveravamo

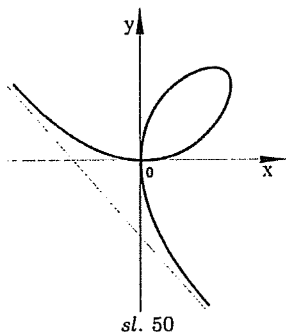
t	$\frac{1}{n}\to +0$	$n\to\infty$	$-\frac{1}{n}\to -0$	$-n\to-\infty$	$\frac{-n}{n+1}\to -1+0$
x	$\frac{3n^2}{n^3+1}\to +0$	$\frac{3n}{n^3+1}\to +0$	$\frac{-3n^2}{n^3-1}\to -0$	$\frac{3n}{n^3-1}\to +0$	$\frac{-3n(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3}\to -\infty$
y	$\frac{3n}{n^3+1}\to +0$	$\frac{3n^2}{n^3+1}\to +0$	$\frac{3n}{n^3-1}\to +0$	$\frac{-3n^2}{n^3-1}\to -0$	$\frac{3n^2(n+1)}{n^3+1}\to +\infty$

da je grafik funkcije simetričan u odnosu na pravu $y=x$ kao i to da ako $t=\frac{y}{x}\to -1$, onda $|x|\to\infty$ i $|y|\to\infty$.

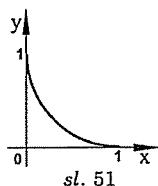
Zatim, iz očigledne jednakosti

$$x+y=\frac{3xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{3\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

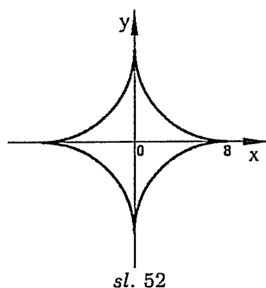
proističe, da $x+y \to 1$ kad $t = \frac{y}{x} \to -1$. Sledi, $y+x+1=0$ je asimptota (**sl.50**).



sl. 50



sl. 51



sl. 52

c) Očigledno je $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Izračunavanjem vrednosti funkcije u nekoliko tačaka crtamo grafik funkcije (**sl.51**).

d) Grafik funkcije je simetričan u odnosu na obe ose. Zapišimo jednačinu u parametarskom obliku:

$$x = 8\cos^3 t, \ y = 8\sin^3 t.$$

Ako je $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, to je $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 8$. Najpre crtamo grafik funkcije za $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, a zatim, koristeći simetričnost, crtamo grafik za $\frac{\pi}{2} < t \le 2\pi$ (**sl.52**).

e) Rešavanjem date jednačine, nalazimo familiju pravih

$$y = x + 2\pi n; \ y = -x + (2n+1)\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Grafik funkcije je grafik te familije.

f) Slično prethodnom primeru imamo familiju parabola

$$y = \pm x^2 + 2n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Grafik funkcije je grafik te familije.

g) Neka je $y = x^t$ $(t > 0)$. Tada je

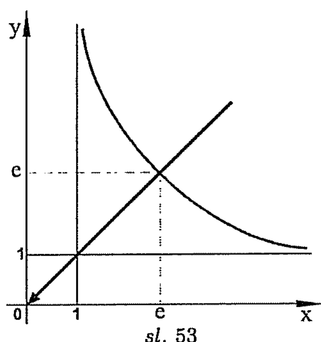
$$x = t^{\frac{1}{t-1}}, \ y = t^{\frac{t}{t-1}} \ t > 0, \ t \ne 1.$$

Ako je $t = 1$, to je $y = x$ rešenje jednačine. Sledi, grafik ima dve grane.

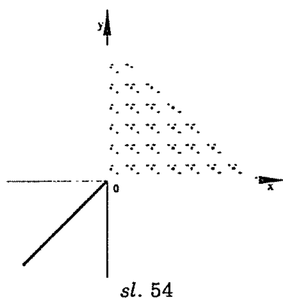
Na osnovu tablice

t	$\frac{1}{n} \to +0$	$n \to \infty$	$\frac{n}{n+1} \to 1+0$	$\frac{n}{n+1} \to 1-0$
x	$n^{\frac{n}{n-1}} \to +\infty$	$n^{\frac{n}{n-1}} \to 1-0$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e-0$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e+0$
y	$n^{\frac{n}{n-1}} \to 1+0$	$n^{\frac{n}{n-1}} \to +\infty$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e+0$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e-0$

i toga što je grafik simetričan u odnosu na pravu $y = x$ (koja je i sama deo grafika) crtamo grafik funkcije (sl.53).



sl. 53



sl. 54

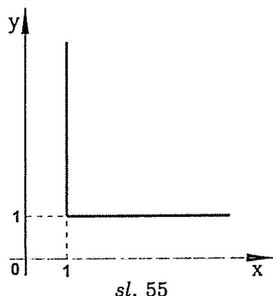
h) Neka je $x \geq 0$, $y \geq 0$. Tada dobijamo identičnost. Ako je $x \leq 0$, $y > 0$, to je $x = 0$, ako je zatim $x < 0$, $y < 0$, onda je $y = x$. Za $x > 0$, $y \leq 0$ imamo $y = 0$. Na kraju, ako je $x = 0$, to je $y = 0$ i obrnuto. Sledi, grafik se sastoji iz svih tačaka prvog kvadranta i iz pravih $x = 0$, $y = x$ i $y = 0$ (sl.54). ▶

299. Nacrtati grafike implicitnih funkcija:

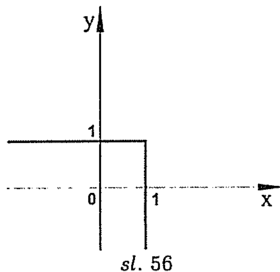
a) $\min(x, y) = 1$; b) $\max(x, y) = 1$;

c) $\max(|x|, |y|) = 1$;d) $\min(x^2, y) = 1$.

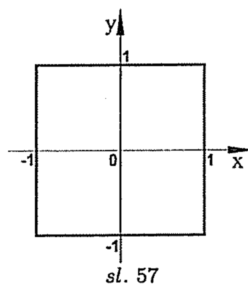
◀ a) Tačka $A(1, y)$ pripada grafiku za sve $y \geq 1$, a takođe tačka $B(x, 1)$ pripada grafiku za sve $x \geq 1$ sl.55.



sl. 55



sl. 56



sl. 57

b) Očigledno, tačke $A(1, y)$, $y \leq 1$ i $B(x, 1)$, $x \leq 1$ pripadaju grafiku (sl.56).

c) Tačke $A(1, |y|)$, $|y| \leq 1$; $B(-1, |y|)$, $|y| \leq 1$; $C(|x|, 1)$, $|x| \leq 1$; $D(|x|, -1)$, $|x|$ 1 pripadaju grafiku funkcije (sl.57).

d) Pošto tačke $A(1, y)$, $y \geq 1$ i $B(x^2, 1)$, $x^2 \geq 1$ pripadaju grafiku, to je grafik isti, kao u slučaju a), ako je $x \geq 1$. Za $x \leq -1$ grafik crtamo na osnovu toga što je funkcija parna. ▶

300. Nacrtati grafike funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ u polarnom koordinatnom sistemu, ako je:

a) $\rho = \varphi$ (**Arhimedova spirala**); b) $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$ (**hiperbolička spirala**);

c) $\rho = \frac{\varphi}{\varphi+1}$ $(0 \leq \varphi < +\infty)$; d) $\rho = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (**logaritamska spirala**);

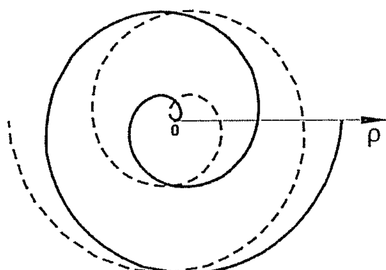
e) $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$ (**kardioida**); f) $\rho = 10\sin 3\varphi$ (**trolist**);

g) $\rho^2 = 36\cos 2\varphi$ (**Bernulijeva lemniskata**); h) $\varphi = \frac{\rho}{\rho-1}$ $(\rho > 1)$;

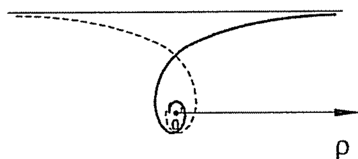
i) $\varphi = 2\pi \sin\rho$.

◀ a) Ako φ raste od 0 do $+\infty$ onda ρ neograničeno raste. Slično, ako ugao φ opada od 0 do $-\infty$ to ρ opada od 0 do $-\infty$ (**sl.58**).

b) Ako ugao φ monotono teži nuli, tada ρ neograničeno raste. S obzirom da je $y = \rho\sin\varphi = \pi\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to \pi$, to kriva asimptotski teži pravoj, paralelnoj osi Ox, na rastojanju π od nje. Pri rašćenju ugla φ kriva obilazi koordinatni početak (**sl.59**). Slično crtamo grafik i za $-\infty < \varphi \leq 0$.



sl. 58



sl. 59

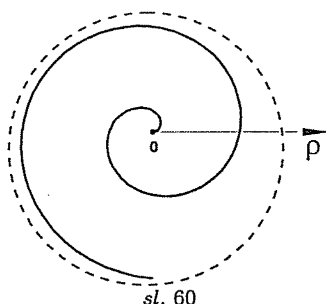
c) Ako $\varphi \to +\infty$, onda $\rho \to 1 - 0$, sledi, kružnica $\rho = 1$ je asimptota grafika funkcije kad $\varphi \to +\infty$ (**sl.60**).

d) Pri neograničenom rašćenju ugla φ $(0 \leq \varphi < +\infty)$ radijus ρ takođe neograničeno raste, a pri opadanju ugla φ od 0 do $-\infty$, radijus ρ opadajuće teži nuli i nikada je ne dostižući (**sl.61**).

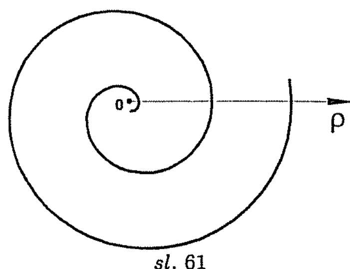
e) Imamo tablicu

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	4	$2+\sqrt{2}$	2	$2-\sqrt{2}$	0	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	4

i sada crtamo grafik (**sl.62**).



sl. 60

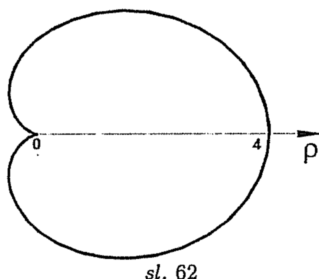


sl. 61

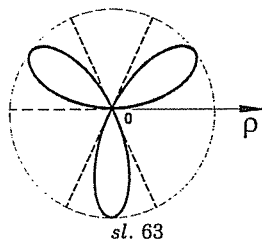
f) Funkcija je periodična sa periodom $\frac{2\pi}{3}$ i $0 \leq |\rho| \leq 10$.

φ	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{8\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{3}$
ρ	0	5	$5\sqrt{3}$	10	$5\sqrt{3}$	5	0	-5	$-5\sqrt{3}$	-10	$-5\sqrt{3}$	-5	0

Na osnovu periodičnosti crtamo grafik (**sl.63**).



sl. 62



sl. 63

g) Funkcija $\rho^2 = 36\cos 2\varphi$ je definisana, ako je $\cos 2\varphi \geq 0$, tj. ako je $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ i $\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, simetrična je u odnosu na poluprave $\varphi = 0, \varphi = \pi, \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{2}$. Na osnovu toga i tablice vrednosti funkcije

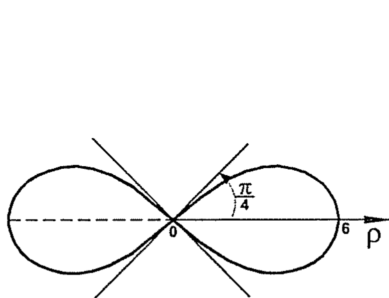
φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	6	$3\sqrt[4]{12}$	$3\sqrt[4]{8}$	3	0

crtamo grafik funkcije (**sl.64**).

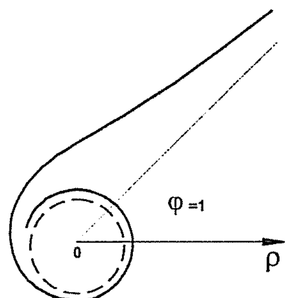
h) Iz jednakosti $\varphi = \frac{\rho}{\rho-1}$ $(\rho > 1)$imamo $\rho = \frac{\varphi}{\varphi-1}$, odakle sledi da $\rho \to +\infty$ ako $\varphi \to 1+0$, tj. prava $\varphi = 1$ je asimptota grafika funkcije. Polazeći od tablice vrednosti

φ	$1+\frac{1}{n}$	n
ρ	$n+1$	$\frac{n}{n-1}$

funkcije, crtamo njen grafik (sl.65).



sl. 64



sl. 65

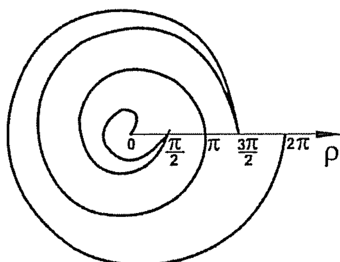
i) $\varphi = 2\pi \sin\rho$. Funkcija je periodična po ρ sa periodom 2π. Ako je $0 \le \rho < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \le \rho < \pi, \pi \le \rho < \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le \rho < 2\pi$, to su granice za φ date respektivno nejednakostima: $0 \le \varphi < 2\pi; 2\pi \ge \varphi > 0; 0 \ge \varphi > -2\pi; -2\pi \le \varphi < 0$ (sl.66). ►

301. Nacrtati u polarnom koordinatnom sistemu grafike sledećih funkcija: a) $\varphi = 4\rho - \rho^2$; b) $\varphi = \frac{12\rho}{1+\rho^2}$; c) $\rho^2 + \varphi^2 = 100$.

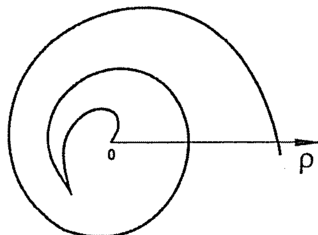
◄ a) Imamo $\varphi = 4\rho - \rho^2 = 4-(\rho-2)^2$. Ako ρ raste od nule do 2, onda ugao φ raste od 0 do 4; ako ρ raste od 2 do $+\infty$, tada ugao φ opada od 4 do $-\infty$. Sastavljanjem tablice

ρ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6	$\rho \to +\infty$
φ	0	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{15}{4}$	4	$\frac{15}{4}$	3	0	-5	-12	$\varphi \to -\infty$

vrednosti funkcije, crtamo njen grafik (sl. 67).



sl. 66



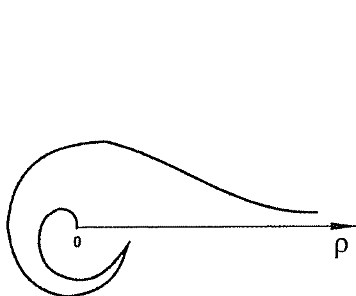
sl. 67

b) Ako ρ raste od 0 do 1, onda φ raste od 0 do 6; ako zatim ρ raste od 1 do $+\infty$, tada φ opada od 6 do 0. Polupravа $\varphi = 0$ je asimptota grafika funkcije (sl. 68).

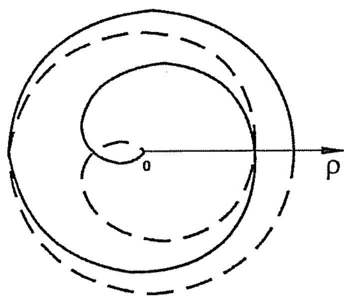
c) Grafik funkcije $\rho^2 + \varphi^2 = 100$ je simetričan u odnosu na poluprave $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$. Oblast definisanosti je dat sa $|\varphi| \le 10$. Na osnovu toga i tablice vrednosti funkcije

φ	0	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$	$\pi \approx 3,14$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$	$2\pi \approx 6,28$	$\frac{5\pi}{2}$	3π	10
ρ	10	$9,88$	$9,50$	$8,82$	$7,78$	$6,20$	$3,36$	0

crtamo grafik funkcije (sl. **69**). ▶



sl. 68

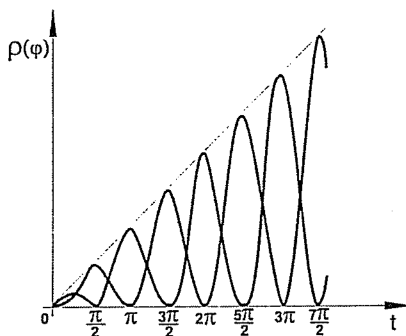


sl. 69

302. Nacrtati u polarnim koordinatama ρ i φ grafik funkcije, date parametarski ($t \geq 0$ je parametar):

$$\begin{cases} \varphi = t\cos^2 t; \\ \rho = t\sin^2 t. \end{cases}$$

◀ Najpre nacrtajmo grafike funkcija $\varphi = t\cos^2 t$ i $\rho = t\sin^2 t$ u ravnima (t, φ) i (t, ρ) respektivno (sl.**70**).

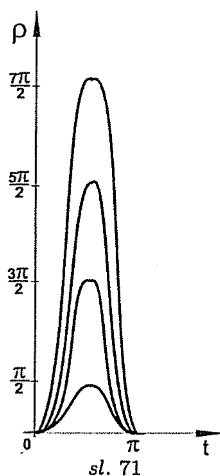


sl. 70

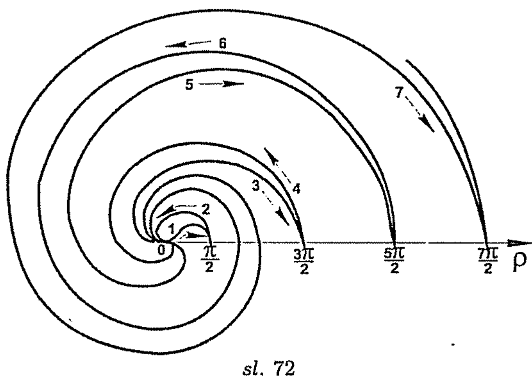
Ciframa k ($k = 1, 2, ..$) ćemo označiti grafike funkcija $\rho = \rho(\varphi)$, kada parametar t pripada intervalu $\frac{\pi}{2}(k-1) \leq t < k\frac{\pi}{2}$. Pri tom će strelica označavati smer kretanja tačke $M(\varphi, \rho)$ pri rašćenju parametra.

Ako su u ravni (t, ρ) svi grafici funkcija $\rho_k = t\cos^2 t$, $(k-1)\pi \leq t \leq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ smešteni u intervalu $]0, \pi[$ (sl.**71**), to se lako uveravamo da je $\rho_{k+1} >$

ρ_k $(k = 1, 2, ..)$ $t \in]0, \pi[$, $\rho_k\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} - t\right) < \rho_k\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} + t\right)$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Na osnovu dobijenih podataka crtamo grafik funkcije $\rho = \rho(\varphi)$ **(sl.72).** ►



sl. 71



sl. 72

303. Naći intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a > 0).$$

◄ Neka $\alpha \in [0, 1]$, i neka su x_1 i x_2 proizvoljni realni brojevi. Tada je

$$\begin{aligned} & \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \\ = \;& a\left(\alpha x_1^3 + (1-\alpha) x_2^3 - (\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)^3\right) + b\left(\alpha - \alpha^2\right)(x_1 - x_2)^2 \\ = \;& a\left(\alpha - \alpha^2\right)(x_1 - x_2)^2 \left((1+\alpha) x_1 + (2-\alpha) x_2 + \frac{b}{a}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

ako $x = \min\{x_1, x_2\}$ zadovoljava nejednakost

$$(1+\alpha) x + (2-\alpha) x + \frac{b}{a} \geq 0$$

tj. nejednakost

$$3x + \frac{b}{a} \geq 0.$$

Odatle nalazimo da je $x \geq -\frac{b}{3a}$. Na taj način, ako je $x \geq -\frac{b}{3a}$, funkcija je konveksna. Slično se pokazuje da je funkcija konkavna, za $x \leq -\frac{b}{3a}$. ►

1.6 Neprekidnost funkcije

1^0 **Neprekidnost funkcije u tački.** Funkcija f, definisana na intervalu $]a,b[$, naziva se neprekidnom u tački $x_0 \in]a,b[$, ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

tj. ako $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ takvo, da je za $|x - x_0| < \delta$ ispunjena nejednakost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ako u tački x_0 jednakost (1) nije ispunjena, to se x_0 naziva **tačkom prekida** funkcije f.

Funkcija f, definisana na poluintervalu $]a, x_0]$ ($[x_0, b[$), naziva se neprekidnom sleva (zdesna) u tački x_0, ako je

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Ako je funkcija f neprekidna u svakoj tački intervala $]a,b[$, a u tačkama a i b neprekidna respektivno sleva i zdesna, to se ona naziva neprekidnom na $[a,b]$.

Razlikuju se tačke prekida **prve vrste**, za koje postoje jednostrani limesi

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ i } f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

i tačke prekida **druge vrste**-sve ostale. Razlika

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

se naziva skokom funkcije u tački x_0.

Ako je ispunjena jednakost $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, to se tačka prekida x_0 naziva otklonjivom.

Ako je bar jedan od limesa $f(x_0 - 0)$ ili $f(x_0 + 0)$ jednak simbolu ∞, to se x_0 naziva tačkom beskonačnog prekida.

Ako je zadovoljena jednakost $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ (ili $f(x_0 + 0) = f(x_0)$), to se kaže da je funkcija f neprekidna sleva (zdesna) u tački x_0. Za neprekidnost funkcije f u tački x_0 potrebna je i dovoljna jednakost tri broja: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

2^0 **Neprekidnost elementarnih funkcija.** Ako su funkcije f i g neprekidne u tački $x = x_0$, to su funkcije

$$f \pm g; \; f \cdot g; \; \frac{f}{g} \; (g(x_0) \neq 0)$$

takođe neprekidne u tački $x = x_0$.

Specijalno: a) cela racionalna funkcija

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

je neprekidna u proizvoljnoj tački x; b) razlomljena racionalna funkcija

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$

neprekidna je za sve vrednosti x za koje je imenilac različit od nule.

Uopšte osnovne elementarne funkcije

$$x \mapsto x^n, \; x \mapsto \sin x, \; x \mapsto \cos x, \; x \mapsto \tan x, \; x \mapsto a^x,$$

$$x \mapsto \log_a x, \; x \mapsto \arcsin x, \; x \mapsto \arccos x, \; x \mapsto \arctan x, \ldots$$

neprekidne su u svim tačkama[5] gde su definisane.

Opštiji rezultat je: ako je funkcija f neprekidna u tački $x = x_0$ a funkcija g u tački $y = y_0 = f(x_0)$, to je funkcuja $g \circ f$ neprekidna u tački $x = x_0$.

3^0 Osnovne teoreme o neprekidnim funkcijama. Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ onda je: 1) f je ograničena na tom segmentu; 2) dostiže na njemu infimum m i supremum M (Vajerštrasova teorema); 3) uzima na svakom intervalu $]\alpha, \beta[\subset [a, b]$ sve vrednosti između $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ (Košijeva teorema). Specijalno, ako je $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, onda postoji γ $(\alpha < \gamma < \beta)$, tako da je $f(\gamma) = 0$.

4^0 Rešeni zadaci.

304. Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$ i $\varepsilon = 0,001$. Za vrednosti $x_0 = 0,1; 0,01; 0,001$; naći pozitivan broj $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ takav da iz nejednakosti $|x - x_0| < \delta$ sleduje nejednakost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Može li se za dato $\varepsilon = 0,001$ naći takvo $\delta > 0$, koje bi odgovaralo svim vrednostima x_0 iz intervala $]0, 1[$, tj. tako da kad god je $|x - x_0| < \delta$, da bude $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, za bilo koje $x_0 \in]0, 1[$?

◄ Pošto je $x > 0$ i $x_0 > 0$, to iz nejednakosti

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{x x_0} \leq \frac{|x - x_0|}{x_0 (x_0 - |x - x_0|)} < \varepsilon$$

nalazimo, da je

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} = \delta(\varepsilon, x_0) \approx 0,001 x_0^2.$$

---

[5] Prim. prevodioca: Pravilnije je pisati: funkcija $x \mapsto x^n, \ldots$ nego samo funkcija $x^n, \ldots$

Tada: a) $\delta \approx 10^{-5}$; b) $\delta \approx 10^{-7}$; c) $\delta \approx 10^{-9}$.

Pretpostavimo sada, da za $\varepsilon = 0,001$ postoji konstantno $\delta > 0$, koje odgovara svim $x_0 \in]0,1[$. Tada za $x = x_0 - \frac{\delta}{2}$ imamo da je $|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$, dok je nejednakost

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{\frac{\delta}{2}}{x_0^2 - \frac{x_0\delta}{2}} < \varepsilon$$

ispunjena samo za $\frac{\delta}{4} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{4}\right)^2 + \frac{\delta}{2\varepsilon}} < x_0 < 1$ i, sleduje, nije ispunjena za

$$0 < x_0 < \frac{\delta}{4} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{4}\right)^2 + \frac{\delta}{2\varepsilon}}.$$

Na taj način, $\delta > 0$, koje bi odgovaralo svim $x_0 \in]0,1[$ ne postoji. ►

305. Neka se za neko $\varepsilon > 0$ može naći takav broj $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, da bude $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ako je $|x - x_0| < \delta$.

Može li se tvrditi da je funkcija f neprekidna u tački x_0, ako: a) skup pozitivnih ε je konačan; b) skup pozitivnih ε čine razlomci oblika $\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

◄ a) Ako je skup pozitivnih ε konačan, onda među njima postoji najmanji ε_0. Tada za $\forall \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ već ne mora da postoji broj $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, koji se zahteva u definiciji neprekidnosti funkcije. Dakle, ne može se tvrditi da je funkcija neprekidna.

b) Funkcija f je neprekidna, jer za $\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N : \forall n > N, \varepsilon = \frac{1}{2^n} < \varepsilon_1$. A svako $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ iz definicije neprekidnosti, koje odgovara pozitivnom ε, odgovara takođe i svakom $\varepsilon_1 > \varepsilon$. ►

306. Neka je data funkcija $f(x) = x + 0,001[x]$. Pokazati, da se za svako $\varepsilon > 0,001$ može izabrati takvo $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, da bude $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, kad god je $|x' - x| < \delta$, a za $0 < \varepsilon \leq 0,001$ i proizvoljno x to nije moguće. U kojim tačkama funkcija f ima prekid?

◄ Pošto se bilo koja dva broja x i x' mogu predstaviti u obliku $x = n + q$, $x' = n' + q'$, gde $q, q' \in [0,1[$ a $n, n' \in \mathbb{Z}$ to je

$$|x - x'| = |n - n' + q - q'| \geq |n - n'| - |q - q'| \geq |[x] - [x']| - 1,$$

odakle sledi

$$|[x] - [x']| \leq |x - x'| + 1.$$

Uzmimo $\varepsilon > 0,001$. Tada je

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |x - x' + 0,001([x] - [x'])| \leq |x - x'| + 0,001|[x] - [x']| \\ &\leq |x - x'| + 0,001(|x - x'| + 1) = 1,001|x - x'| + 0,001 < \varepsilon, \end{aligned}$$

ako je

$$0<\left|x-x'\right|<\frac{\varepsilon-0,001}{1,001}=\delta\left(\varepsilon,x\right).$$

Neka je $0<\varepsilon\leq 0,001$. Tada, ako uzmemo $x=n$, $x'=n-1+\frac{k}{k+1}$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$, to je

$$\left|f\left(x\right)-f\left(x'\right)\right|=\frac{1}{k+1}+0,001>\varepsilon\ \left(k\in\mathbb{N}\right),$$

a u isto vreme je $|x-x'|=\frac{1}{k+1}\to 0$ kad $k\to\infty$, tj. za $\forall\delta>0$: $|f(x)-f(x')|>\varepsilon$. Sleduje, funkcija f ima prekid u tačkama $x=n$ $(n\in\mathbb{N})$.

Ako je pak $x=n+q$, $x'=n+q'$ $(0<q<1, 0<q'<1)$, to je za $\forall\varepsilon>0$

$$\left|f\left(x\right)-f\left(x'\right)\right|=\left|x-x'\right|<\varepsilon,$$

kad god je $|x-x'|<\delta=\varepsilon$, što daje neprekidnost funkcije f na svakom intervalu $n<x<n+1$ $(n\in\mathbb{N})$. ►

307. Neka za svako $\delta>0$ postoji $\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$, takvo da je $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ kad god je $|x-x_0|<\delta$. Sleduje li odatle neprekidnost funkcije f u tački $x=x_0$? Koje svojstvo funkcije je opisano navedenim nejednakostima?

◄ Ne sleduje. Na primer $f(x)=\left(1+(x-x_0)^2\right)sgn(x-x_0)$. Tada za svako $\delta>0$ postoji x takvo da je $|x-x_0|<\delta$ i onda je

$$\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|=1+\left(x-x_0\right)^2<1+\delta^2=\varepsilon=\varepsilon\left(\delta,x_0\right),$$

tj. uslovi dati u zadatku su ispunjeni. Međutim, $|f(x)-f(x_0)|\geq 1$ za sve x i, sleduje, razlika $|f(x)-f(x_0)|$ ne može biti manja od ε, ako je $0<\varepsilon<1$.

Formulisani uslov u zadatku obezbeđuje samo ograničenost funkcije u tački $x=x_0$. ►

308. Pomoću "ε–δ" rasuđivanja dokazati neprekidnost sledećih funkcija:

a) $x\mapsto ax+b$; b) $x\mapsto x^2$; c) $x\mapsto x^3$; d) $x\mapsto\sqrt{x}$; e) $x\mapsto\sqrt[3]{x}$; f) $x\mapsto\sin x$; g) $x\mapsto\cos x$; h) $x\mapsto\arctan x$.

◄ a) Neka je $\varepsilon>0$. Tada je za bilo koje $x_0\in\mathbb{R}$

$$\left|(ax+b)-(ax_0+b)\right|=|a|\,|x-x_0|<\varepsilon,$$

ako je $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{|a|}=\delta(\varepsilon,x_0)$.

b) Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno. Tada je

$$\left|x^2-x_0^2\right|=\left|\left(x-x_0\right)^2+2x_0\left(x-x_0\right)\right|\leq\left|x-x_0\right|^2+2\left|x_0\right|\left|x-x_0\right|<\varepsilon,$$

ako je samo $|x - x_0| < \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon} - |x_0| = \delta(\varepsilon, x_0)$.

c) Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Imamo

$$\left|x^3 - x_0^3\right| = \left|x^2 + xx_0 + x_0^2\right| |x - x_0|.$$

Neka je sada $|x - x_0| < 1$. Tada je $|x| \leq |x_0| + 1$, i zato je

$$\left|x^3 - x_0^3\right| \leq \left(3|x_0|^2 + 3|x_0| + 1\right) |x - x_0| < \varepsilon,$$

ako je

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3|x_0|^2 + 3|x_0| + 1} = \delta(\varepsilon, x_0).$$

d) Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ imamo

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon, \quad (x_0 > 0),$$

ako je $|x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0} = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Ako je $x_0 = 0$, onda je očigledno $\delta(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2$.

e) Imamo

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}\right| &= \frac{|x - x_0|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{|x - x_0|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x_0}}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt[3]{x_0^2}}{4}} \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{\frac{3\sqrt[3]{x_0^2}}{4}} < \varepsilon, \quad (x_0 \neq 0),\end{aligned}$$

ako je $|x - x_0| < \frac{3\sqrt[3]{x_0^2}}{4}\varepsilon = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Ako je $x_0 = 0$, tada je $\delta(\varepsilon, x_0) = \varepsilon^3$.

f)

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin\frac{x - x_0}{2} \cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0| < \varepsilon,$$

kad god je $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

g)

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2 \sin\frac{x - x_0}{2} \sin\frac{x + x_0}{2}\right| < |x - x_0| < \varepsilon,$$

ako je $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

h) Neprekidnost funkcije $x \mapsto \arctan x$ u tački $x = x_0 = 0$ sledi iz nejednakosti

$$|\arctan x - \arctan 0| = |\arctan x| \leq |x| < \varepsilon,$$

ako je $|x-0| = |x| < \delta = \varepsilon$. Neka je $|x_0| > 0$ i $|h| = |x - x_0| < |x_0|$. Ako je

$$\arctan(x_0 + h) - \arctan x_0 = t, \text{ to je } \tan t = \frac{h}{1 + x_0^2 + x_0 h},$$

a pošto je $|t| < |\tan t|$ za $|t| < \frac{\pi}{2}$, to je

$$|\arctan(x_0+h) - \arctan x_0| = |t| < |\tan t|$$

$$= \left|\frac{h}{1+x_0^2+x_0 h}\right| < \frac{|h|}{1+x_0^2-|h|\,|x_0|} < \varepsilon,$$

ako je $|h| = |x - x_0| < \frac{(1+x_0^2)\varepsilon}{1+|x_0|\varepsilon} = \delta(\varepsilon, x_0)$. ►

Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

309. a) $f_1(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$, za $x \neq 0$ i $f_1(0) = 1$; b) $f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}$, za $x \neq 0$ i $f_2(0) = 1$.

◄ a) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. S obzirom da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, onda postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tako da je $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ ako je $|x| < \delta$. Tada je (primer 21, a))

$$\left|\left|\frac{\sin x}{x}\right| - 1\right| \leq \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

ako je $|x| < \delta$, tj. f_1 je neprekidna funkcija u tački $x = 0$. Neprekidnost za $x \neq 0$ je očigledna.

b) Imamo,

$$\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f_2(+0),$$

$$\lim_{x\to-0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to-0} \frac{\sin x}{-x} = -1 = f_2(-0).$$

Pošto je $f_2(+0) \neq f_2(-0)$, to je funkcija prekidna u tački $x = 0$. ►

310. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, ako je $x \neq 0$ i $f(0)$ proizvoljno.

◄ Uzmimo nizove $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $x_n' = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Pošto je

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} x_n' = 0 \text{ a}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to\infty} f(x_n') \text{ to } \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

ne postoji, što znači da funkcija u 0 ima prekid druge vrste. U ostalim tačkama je neprekidna. ▶

311. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, za $x \neq 0$ i $f(0) = 0$.

◀ Neprekidnost funkcije f u tački $x = 0$ sledi iz toga što je $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$ kad god je $|x| < \delta = \varepsilon$. U tačkama koje su različite od nule neprekidnost je očigledna. ▶

312. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, ako je $x \neq 1$ i $f(1)$ proizvoljno.

◀ Pošto je $f(1-0) = 1 \neq 0 = f(1+0)$, to funkcija ima prekid u 1. ▶

313. $f(x) = x\ln x^2$, za $x \neq 0$ i $f(0) = \alpha$.

◀ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim\limits_{x\to 0} 2x\ln|x| = 0$ (primer 205). Odatle sledi neprekidnost funkcije u nuli ako je $\alpha = 0$, tj prekid u nuli za $\alpha \neq 0$. U ostalim tačkama funkcija je neprekidna. ▶

314. $f(x) = [x]$.

◀ Ako je $k < x < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ to je $f(x) = [x] = k$ i sledi f je neprekidna u svakoj tački različitoj od celog broja. Ako je $x_0 = k$ onda za $x = k - 1 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, imamo da za svako $\delta > 0$ postoji α $(0 < \alpha < 1)$ tako da je $|x_0 - x| = |1 - \alpha| < \delta$, iako je $|[x] - [x_0]| = 1$, tj. funkcija f ima prekid u tački $x = x_0 = k$, gde je $k \in \mathbb{Z}$. ▶

Odrediti tačke prekida i ispitati njihov karakter, ako je:

315. $y = \frac{x}{(1+x)^2}$.

◀ $\lim\limits_{x\to -1-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0} y = -\infty$, tj. $x = -1$ je tačka beskonačnog prekida. ▶

316. $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$.

◀ Funkcija nije definisana u tačkama $x = -1, 0, +1$. Pošto je

$$\lim_{x\to -1\pm 0} y(x) = \lim_{x\to -1\pm 0} \frac{x-1}{x+1} = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1, \quad \lim_{x\to 1} y(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0,$$

to su $x = 0$ i $x = 1$ tačke otklonjivog prekida, a $x = -1$ je tačka beskonačnog prekida. ▶

317. $y = \frac{x}{\sin x}$.

◀ S obzirom da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \text{ a } \lim_{x\to k\pi\mp 0} \frac{x}{\sin x} = \mp(-1)^k\infty, \quad (k = \pm 1, \pm 2, ..),$$

to je $x = 0$ otklonjiv prekid, a $x = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ tačke beskonačnog prekida. ▶

318. $y = \cos^2 \frac{1}{x}$.

◀ Uzmimo nizove: $x_n = \frac{1}{n\pi}$ i $x'_n = \frac{2}{\pi(1+2n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Imamo da oba niza teže nuli kad $n \to \infty$, međutim $\cos^2 \frac{1}{x_n} \to 1$ a $\cos^2 \frac{1}{x'_n} \to 0$, kad $n \to \infty$, što znači da $\lim\limits_{x \to 0} \cos^2 \frac{1}{x}$ ne postoji, tj. $x = 0$ je tačka prekida druge vrste. ▶

319. $y = \arctan \frac{1}{x}$.

◀ $\lim\limits_{x \to +0} \arctan \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$, jer je za $t > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$

$$\arctan t > \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Slično pokazujemo da je $\lim\limits_{x \to -0} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$. Sleduje, $x = 0$ je tačka beskonačnog prekida. ▶

320. $y = \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x}$.

◀ Iz nejednakosti $\left|\sqrt{x} \arctan \frac{1}{x}\right| \le \sqrt{x}\frac{\pi}{2}$ sleduje, da je

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x} = 0$$

što znači da je $x = 0$ tačka otklonjivog prekida. ▶

321. $y = e^{x+\frac{1}{x}}$.

◀ Pošto je $\lim\limits_{x \to +0} e^{x+\frac{1}{x}} = +\infty$, to je $x = 0$ prekid druge vrste. ▶

322. $y = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

◀ Imamo

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x \to \pm 0} \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}} \cdot \frac{1-x}{x} = \mp\infty,$$

tj. $x = 0$ je tačka beskonačnog prekida.

Dalje je,

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1,$$

zato je $x = 1$ prekid prve vrste. ▶

Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

323. $y = sgn\,(\sin x)$.

◀ Za $n\pi < x < (n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ funkcija je neprekidna kao konstantna. Ispitajmo tačke $x_0 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Neka je $x = n\pi + \delta$ $(0 < \delta < \pi)$. Tada je

$$|sgn\,(\sin n\pi) - sgn\,(\sin(n\pi + \delta))| = 1 > \varepsilon,$$

ako je $0 < \varepsilon < 1$. Sleduje, $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ su prekidi prve vrste. ▶

324. $y = x - [x]$.

◀ Pošto je prvi sabirak neprekidna funkcija, a drugi ima prekide prve vrste u tačkama $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ (primer 314), to data funkcija ima u tim tačkama prekide prve vrste. ▶

325. $y = x[x]$.

◀ Ako je $n < x < n+1$, gde $n \in \mathbb{Z}$ tada je $y = nx$, tj. za te vrednosti promenljive funkcija je neprekidna. Za ispitivanje neprekidnosti u celobrojnim tačkama $x = n$ uzmimo $x = n - h$, $0 < h < 1$. Pošto je

$$\begin{aligned} f(n) &= n[n] = n^2,\ f(n-0) = \lim_{h\to+0} f(n-h) \\ &= \lim_{h\to+0} (n-h)[n-h] = n(n-1), \end{aligned}$$

to su tačke $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ prekidi prve vrste. ▶

326. $y = [x]\sin\pi x$.

◀ Ako je $n < x < n+1$, gde $n \in \mathbb{Z}$ tada je $y = n\sin\pi x$, tj. za te vrednosti promenljive funkcija je neprekidna. Neka je sada $n-\frac{1}{2} < x < n+\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$\begin{aligned} -|n-1|\,|\sin\pi x| &\le -|[x]\sin\pi x| \le [x]\sin\pi x \\ &\le |[x]\sin\pi x| \le |n|\,|\sin\pi x|. \end{aligned}$$

S obzirom da je

$$\lim_{x\to n}(-|n-1|\,|\sin\pi x|) = \lim_{x\to n}|n|\,|\sin\pi x| = 0,$$

to je $\lim_{x\to n}[x]\sin\pi x = 0 = y(n)$, što znači neprekidnost funkcije u celobrojnoj vrednosti n. Funkcija je dakle neprekidna u svakoj tački domena. ▶

327. $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

◀ Uzimajući za $x \neq 0$ smenu $\frac{1}{x} = t$, dobijamo $y = [t]$, odakle sledi da su tačke $t = k = \frac{1}{x}$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$ prekidi prve vrste (primer 314). Ostaje da ispitamo tačku $x = 0$. Pošto je $\lim_{x\to+0}\left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$ (sledi iz primera 229), to je 0 tačka beskonačnog prekida. ▶

328. $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$.

◀ Imamo,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{1}{k}+0} x\left[\frac{1}{x}\right] &= \frac{1}{k}(k-1);\ \lim_{x\to\frac{1}{k}-0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{k}\cdot k = 1;\ (k = \pm1, \pm2, ..), \\ \lim_{x\to0} x\left[\frac{1}{x}\right] &= 1 \text{ (prema primeru 229).} \end{aligned}$$

Dakle, tačke $x = k$, $(k = \pm 1, \pm 2, ..)$ su prekidi prve vrste, dok je $x = 0$ otklonjiv prekid. ▶

329. $y = \left[\frac{1}{x^2}\right] sgn\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

◀ Moguće tačke prekida su

$$x = 0;\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{k}};\; x = \pm\frac{1}{k}\; (k \in \mathbb{N}).$$

Uzmimo nizove: $x_n = \frac{2}{1+4n}$ i $x_n' = \frac{2}{3+4n}$. Očigledno je da oba niza teže nuli kad $n \to \infty$, međutim $y(x_n) = 2n+4n^2 \to +\infty$ i $y(x_n') = -\left(2+6n+4n^2\right) \to -\infty$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$ ne postoji. Zato je 0 tačka prekida druge vrste. Pokažimo da je tačka $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$ prekid prve vrste (za ostale dokaz je sličan). Imamo,

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 0\right) &= \lim_{\alpha\to+0}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \alpha\right)^2}\right] sgn \sin\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{k}} - \alpha} \\ &= \lim_{\beta\to+0}\left[\left(\sqrt{k}+\beta\right)^2\right] sgn \sin\pi\left(\sqrt{k}+\beta\right) = k sgn \sin\pi\sqrt{k}, \end{aligned}$$

$$\beta = \alpha k\left(1 - \alpha\sqrt{k}\right)^{-1};$$

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + 0\right) &= \lim_{\alpha\to+0}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \alpha\right)^2}\right] sgn \sin\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{k}} + \alpha} \\ &= \lim_{\beta\to+0}\left[\left(\sqrt{k}-\beta\right)^2\right] sgn \sin\pi\left(\sqrt{k}-\beta\right) = (k-1)\, sgn \sin\pi\sqrt{k}, \end{aligned}$$

$$\beta = \alpha k\left(1 + \alpha\sqrt{k}\right)^{-1};$$

Odavde sleduje da je $\left|y\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 0\right) - y\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + 0\right)\right| = 1$, tj. $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$ je prekid prve vrste. ▶

Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

330. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$ $(x \geq 0)$.

◀ Imamo

$$y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{2}, & x = 1; \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

odakle seleduje da je $x = 1$ prekid prve vrste. ▶

331. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2x}-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

◀ Imamo

$$y = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1} = -1, & -\infty < x < 0; \\ 0, \ x = 0; \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}} = 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Dakle, $y = sgn x$ i $x = 0$ je prekid prve vrste. ▶

332. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

◀ Pošto je

$$y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1, & |x| \le 1; \\ \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}}+1} = x^2, & |x| > 1, \end{cases}$$

kao i $y(\pm 1 - 0) = y(\pm 1 + 0)$, to je funkcija neprekidna za sve vrednosti argumenta x. ▶

333. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

◀ S obzirom da je

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}} = \begin{cases} x, & |\sin x| < \frac{1}{2}, \ |x - k\pi| < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{x}{2}, & |\sin x| = \frac{1}{2}, \ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; \\ 0, & |\sin x| > \frac{1}{2}, \ \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}, \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{Z})$, to su tačke $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ prekidi prve vrste. ▶

334. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (x \arctan(n \cot x))$.

◀ Imamo

$$y = \lim_{n\to\infty} (x \arctan(n \cot x)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \\ -\frac{\pi}{2}x, & \frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi + \pi, \end{cases}$$

gde $k \in \mathbb{Z}$. Očigledno su $x_k = \frac{k\pi}{2}$, $(k = \pm 1, \pm 2, ...)$ tačke prekida prve vrste, a $x = 0$ je tačka otklonjivog prekida. ▶

335. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

◀ Pošto je

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}} = \begin{cases} x^2, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ x, & x < 0, \end{cases}$$

to se lako vidi da je funkcija neprekidna u svakoj tački domena. ▶

336. Neka je

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0;\\ a+x, & x\geq 0.\end{cases}$$

Za koje a je funkcija f neprekidna?

◀ Funkcija je očigledno neprekidna za svako $x \neq 0$. Pošto je $f(0+0) = a$, $f(0-0)=1$, $f(0)=a$, to je funkcija neprekidna u 0, ako je $a=1$. ▶

337. Ispitati neprekidnost i karakter tačaka prekida sledećih funkcija:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leq x\leq 1;\\ 2-x^2, & 1<x\leq 2;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leq 1;\\ 1, & |x|>1;\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\leq 1;\\ |x-1|, & |x|>1;\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \cot^2 \pi x, & x\notin \mathbb{Z};\\ 0, & x\in\mathbb{Z};\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{I}.\end{cases}$

◀ a) Pošto je $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=1$, to je funkcija neprekidna za $x=1$. Za ostale vrednosti promenljive neprekidnost je očigledna.

b) Imamo $f(-1-0)=+1, f(-1+0)=f(-1)=-1$, sledi $x=-1$ je prekid prve vrste. Dalje, $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=1$, pa su 1 i sve ostale tačke domena, tačke neprekidnosti funkcije.

c) Jasno je da treba ispitati neprekidnost samo u tačkama 1 i -1. Funkcija je neprekidna za $x=1$, jer je $f(+1-0)=f(+1+0)=f(+1)=0$; tačka $x=-1$ je prekid prve vrste, jer je $f(-1-0)=2, f(-1+0)=f(-1)=0$.

d) Pošto je $\lim\limits_{x\to k}\left|\cot^2\pi x\right|=+\infty$ $(k\in\mathbb{Z})$, to je $x=k$ tačka beskonačnog prekida.

e) Neka je $x_0\neq n$ $(n\in\mathbb{Z})$ proizvoljno, i neka je x_n niz racionalnih brojeva koji konvergira ka x_0, a x'_n niz iracionalnih brojeva koji konvergira takođe ka x_0. Iz relacija

$$\lim_{n\to\infty}\sin\pi x_n=\sin\pi x_0\neq 0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\pi x'_n=0$$

sleduje, da $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ne postoji, tj. x_0 je tačka prekida.

Ako je $x_0=n$, gde je n ceo broj, imamo

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f(x)| &= |f(x)|\leq|\sin\pi x|=|\sin(\pi n+\pi(x-n))|\\ &= |\cos\pi n\cdot\sin\pi(x-n)|=|\sin\pi(x-x_0)|<\pi|x-x_0|<\varepsilon,\end{aligned}$$

ako je $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{\pi}=\delta(\varepsilon,x_0)$, tj. $x_0=n$ je tačka neprekidnosti. Na taj način, tačke $x\neq n$ su prekidi druge vrste. ▶

338. Dokazati, da je Dirihleova funkcija

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m! x)\right)$$

prekidna u svakoj tački x.

◀ Ako je $x = \frac{p}{q}$ racionalan broj, to je

$$m!x = m! \cdot \frac{p}{q} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(q-1)(q+1)\cdots mp$$

paran broj, zato je $\cos\pi m!x = 1$ i $\chi(x) = 1$. Ako je x iracionalan broj, onda $m!x$ nije ceo ni za jednu vrednost m, sledi, $|\cos\pi m!x| < 1$. Zato je $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\pi m!x = 0$, pa je $\chi(x) = 0$. Dakle,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{I}.\end{cases}$$

Neka je x_0 proizvoljno, x_n niz racionalnih brojeva i x'_n niz iracionalnih brojeva koji oba konvergiraju ka x_0. Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty}\chi(x_n) = 1$, a $\lim\limits_{n\to\infty}\chi(x'_n) = 0$, to je x_0 tačka prekida. ▶

339. Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x) = x\chi(x),$$

gde je χ Dirihleova funkcija (prethodni primer). Nacrtati grafik te funkcije.

◀ Neka je $x_0 \neq 0$ proizvoljno, a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$, gde $x_n\in\mathbb{Q}$ a $x'_n\in\mathbb{I}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ i } \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 0,$$

odakle sleduje, da je x_0 tačka prekida.

Ako je $x_0 = 0$, to prelazeći u nejednakosti

$$0 \le |f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x\chi(x)| \le |x|$$

na limes kad $x\to 0$, dobijamo da je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Znači $x_0 = 0$ je jedina tačka neprekidnosti. Crtanje grafika ostavlja se čitaocu. ▶

340. Dokazati, da je Rimanova funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n},\ m,\ n\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{I},\end{cases}$$

prekidna u racionalnim a neprekidna u iracionalnim tačkama. Nacrtati grafik te funkcije.

◀ Neka je $x_0 = \frac{p}{q}$ racionalno, i $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Očigledno, niz racionalnih brojeva $\frac{pn+1}{qn}$ konvergira ka $\frac{p}{q} = x_0$ kad $n \to \infty$. Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{pn+1}{qn}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{qn} = 0,$$

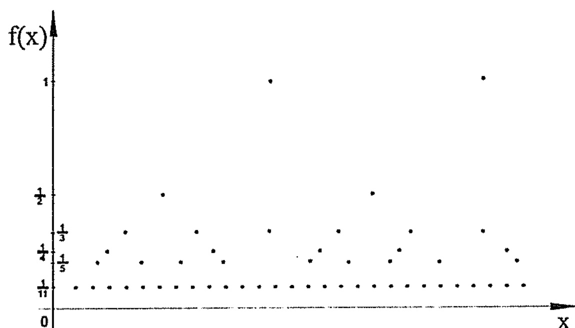
to je svaki racionalan broj prekid (x_0 je proizvoljan racionalan).

Neka je α proizvoljan iracionalan broj, a $x_n = r_n = \frac{p_n}{q_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ niz racionalnih brojeva koji konvergira ka α. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ i

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(\alpha).$$

Pošto je $f(x) = 0$ za sve iracionalne brojeve, to je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) = 0$ za bilo koji niz x_n koji konvergira ka α. Na taj način f je neprekidna u proizvoljnoj iracionalnoj tački.

Koristeći činjenicu da je funkcija parna, crtamo njen grafik, (**sl.73**). ▶



sl. 73

341. Ispitati neprekidnost funkcije $f(x) = \frac{m}{n+1}$, ako je x neskrativ razlomak $\frac{m}{n}$ $(n \geq 1)$, i $f(x) = |x|$, ako je x iracionalan broj. Nacrtati grafik funkcije.

◀ Neka je x_0 racionalan, tj. $x_0 = \frac{m}{n}$ $(n \geq 1)$. Saglasno uslovu je $f(x_0) = \frac{m}{n+1}$. Pošto je $x_k = \frac{km+1}{kn} \to \frac{m}{n} = x_0$ kad $k \to \infty$, a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{km+1}{kn+1} = \frac{m}{n} \neq \frac{m}{n+1} = f(x_0)$, to je funkcija f prekidna za sve racionalne vrednosti argumenta.

Neka je sada x_0 iracionalan, a $x_k = \frac{m_k}{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ proizvoljan niz racionalnih brojeva, koji konvergira ka x_0. Tada je

$$\lim_{k\to\infty} |m_k| = \lim_{k\to\infty} |n_k| = \infty \text{ i}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{m_k}{n_k}}{1+\frac{1}{n_k}} = x_0 = \begin{cases} |x_0| = f(x_0), \ x_0 > 0, \\ -|x_0|, \ x_0 < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Odavde sledi, da je funkcija prekidna za negativne iracionalne vrednosti argumenta. Ako $x_k \to x_0$ kad $k \to \infty$, gde je $x_k \geq 0$ iracionalan broj, onda je

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} |x_k| = |x_0| = f(x_0). \tag{2}$$

Neka je na kraju x_k proizvoljan niz pozitivnih brojeva, koji konvergira iracionalnom broju x_0. Označimo sa x_{k_p} podniz svih racionalnih članova niza x_k, a sa x_{k_q} podniz svih iracionalnih brojeva. Ne ograničavajući opštost možemo pretpostaviti da su oba podniza beskonačna. Pošto je $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k_p} = x_0 = \lim\limits_{q\to\infty} x_{k_q}$, to prema (1) i (2) sleduje da je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = |x_0| = f(x_0).$$

Na taj način, funkcija je neprekidna samo za pozitivne iracionalne vrednosti argumenta. Crtanje grafika se ostavlja čitaocu. ►

342. Funkcija $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ definisana je za sve vrednosti promenljive, izuzev $x = 0$. Koju vrednost treba da uzme funkcija u nuli, da bi u nuli bila neprekidna?

◄ Kako je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

to će funkcija biti neprekidna u nuli, ako stavimo $f(0) = \frac{1}{2}$. ►

343. Da li je zbir $f+g$ prekidan u tački x_0, ako je:

a) funkcija f je neprekidna, a funkcija g je prekidna u x_0;

b) obe funkcije f i g su prekidne u x_0;

Navesti odgovarajuće primere.

◄ a) Jeste. U suprotnom bi funkcija $(f+g)-f=g$ bila neprekidna u x_0.

b) Nije, na primer, obe funkcije $f(x) = -\frac{1}{x-x_0}$ i $g(x) = x+\frac{1}{x-x_0}$, $x \neq x_0$, $f(x_0) = g(x_0) = \frac{x_0}{2}$ su prekidne u $x = x_0$, a njihov zbir $(f+g)(x) := f(x)+g(x) = x$ je neprekidna funkcija za sve vrednosti argumenta. ►

344. Može li se tvrditi da je kvadrat prekidne funkcije prekidna funkcuja? Navesti primer svuda prekidne funkcije čiji je kvadrat neprekidna funkcija.

◄ Kvadrat prekidne funkcije nije obavezno prekidna funkcija. Na primer, ako je $f(x_0-0) = -f(x_0+0) = f(x_0) \neq 0$, to je f prekidna u x_0, a ipak je $f^2(x_0-0) = f^2(x_0+0)$, tj. f^2 je neprekidna u x_0.

Definišimo funkciju f na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Ova funkcija je prekidna u svakoj tački (dokaz kao u primeru 27), a njen kvadrat je neprekidna funkcija u svakoj tački, jer je $f^2(x) \equiv 1$, za sve x. ▶

345. Ispitati neprekidnost funkcija $f \circ g$ i $g \circ f$, ako je:

a) $f(x) = sgn x$ i $g(x) = 1 + x^2$;

b) $f(x) = sgn x$ i $g(x) = x(1 - x^2)$;

c) $f(x) = sgn x$ i $g(x) = 1 + x - [x]$.

◀ a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = sgn(1 + x^2) \equiv 1$, tj. funkcija $f \circ g$ je neprekidna. Dalje,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 + sgn^2 x = \begin{cases} 2, & x > 0; \\ 1, & x = 0; \\ 2, & x < 0, \end{cases}$$

znači $x = 0$ je tačka otklonjivog prekida funkcije $g \circ f$.

b) Imamo

$$f(g(x)) = sgn(x(1 - x^2)) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0,\ 1 < x < +\infty; \\ 0, & x = 0,\ x = 1,\ x = -1; \\ -1, & -\infty < x < -1,\ 0 < x < 1, \end{cases}$$

što znači da su tačke $-1, 0$ i 1 prekidi prve vrste funkcije $f \circ g$.

Iz činjenice da je $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = sgn x(1 - sgn^2 x) \equiv 0$, sledi da je funkcija $g \circ f$ neprekidna u svom domenu.

c) Pošto se proizvoljno x može predstaviti u obliku $x = n + q$, $0 \le q < 1$, $n \in \mathbb{Z}$, to je

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = sgn(1 + x - [x]) \\ &= sgn(1 + n + q - n) = sgn(1 + q) \equiv 1,\end{aligned}$$

tj. funkcija $f \circ g$ je neprekidna. Kako je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 + sgn x - [sgn x] \equiv 1,$$

to je i funkcija $g \circ f$ neprekidna. ▶

346. Ispitati neprekidnost složene funkcije $y = f(u)$, gde je $u = \varphi(x)$, ako je

$$f(u) = \begin{cases} u, & 0 < u \le 1; \\ 2 - u, & 1 < u < 2 \end{cases}$$

i

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, \; x \in \mathbb{Q}; \\ 2 - x, \; x \in \mathbb{I}, \; (0 < x < 1). \end{cases}$$

◀ Formalnim izračunavanjem $f(\varphi(x))$, nalazimo

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} \varphi(x), 0 < \varphi(x) \le 1; \\ 2 - \varphi(x), 1 < \varphi(x) < 2; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x, \; x \in \mathbb{Q}, \; 0 < x \le 1; \\ 2 - x, \; x \in \mathbb{I}, \; 1 < x < 2; \\ 2 - x, \; x \in \mathbb{Q}, \; 1 < x < 2; \\ 2 - (2 - x), \; x \in \mathbb{I}, \; 0 < x < 1. \end{cases}$$

S obzirom da je za $0 < x < 1$, $f(\varphi(x)) \equiv 1$ to je za te vrednosti funkcija y neprekidna. ▶

347. Dokazati, da ako je funkcija f neprekidna, to je i funkcija F data sa $F(x) := |f(x)|$ takođe neprekidna.

◀ Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tako da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kad god je $|x - x_0| < \delta$. Tada je (primer 14)

$$|F(x) - F(x_0)| = ||f(x)| - |f(x_0)|| \le |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ako je $|x - x_0| < \delta$ tj. funkcija F je neprekidna. ▶

348. Dokazati, da ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada su i funkcije m i M definisane sa

$$m(x) = \inf_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\} \text{ i } M(x) = \sup_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\}$$

takođe neprekidne na $[a, b]$.

◀ Iz uslova neprekidnosti funkcije f na $[a, b]$ sledi da za $\forall \varepsilon$, x_0 $(\varepsilon > 0)$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ tako da je za $|h| < \delta$

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

odakle je očigledna relacija

$$\sup_{|h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Za $|h| < \delta$ imamo

$$- \sup_{0 \le |h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)| + m(x_0) \le m(x_0 + h)$$

$$\leq m(x_0) + \sup_{0 \leq |h| < \delta} f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$|m(x_0 + h) - m(x_0)| < \varepsilon, \text{ ako je } |h| < \delta.$$

Analogno

$$-\sup_{0 \leq |h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)| + M(x_0) \leq M(x_0 + h)$$

$$\leq M(x_0) + \sup_{0 \leq |h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)| \text{ i}$$

$$|M(x_0 + h) - M(x_0)| < \varepsilon, \quad (|h| < \delta). \ \blacktriangleright$$

349. Dokazati, da ako su funkcije f i g neprekidne, to su i funkcije φ i ψ date sa

$$\varphi(x) = \min(f(x), g(x)) \text{ i } \psi(x) = \max(f(x), g(x))$$

takođe neprekidne.

◀ Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0), \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0)$ brojevi koji učestvuju u definiciji neprekidnosti funkcija f i g respektivno. Tada, za $|h| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sleduje

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ i } |g(x_0 + h) - g(x_0)| < \varepsilon,$$

odakle je

$$|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)|$$
$$\leq \max\left\{\max_{0 \leq |h| \leq \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)|; \max_{0 \leq |h| \leq \delta} |g(x_0 + h) - g(x_0)|\right\} < \varepsilon;$$
$$|\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)|$$
$$\leq \max\left\{\max_{0 \leq |h| \leq \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)|; \max_{0 \leq |h| \leq \delta} |g(x_0 + h) - g(x_0)|\right\} < \varepsilon;$$

tj. funkcije φ i ψ su neprekidne. ▶

350. Neka je funkcija f definisana i ograničena na segmentu $[a, b]$. Dokazati da su funkcije m i M definisane sa

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\} \text{ i } M(x) = \sup_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$$

neprekidne sleva na $[a, b]$.

◀ Pošto je funkcija f ograničena, to su i funkcije m i M ograničene; pri tom m opada, a M raste na $[a, b]$. Neka $x_0 \in]a, b]$. Tada je $m(x) \geq m(x_0)$ za $x < x_0$.

Sledi, postoji konačan limes $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} m(x)$, pri čemu je

$$m(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} m(x) = \inf_{a \leq \xi < x_0} \{f(\xi)\} = m(x_0),$$

što znači neprekidnost sleva funkcije m u tački x_0.

Ako $x_0 \in]a, b]$, to je $M(x) \leq M(x_0)$ za $x < x_0$; Zato postoji konačan limes $\lim\limits_{x \to x_0} M(x)$, pri čemu je

$$M(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} M(x) = \sup_{a \leq \xi < x_0} \{f(\xi)\} = M(x_0),$$

tj. M je neprekidna sleva u tački x_0. ▶

351. Dokazati, da ako je funkcija f neprekidna na razmaku $a \leq x < +\infty$ i postoji konačan limes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, onda je funkcija f na tom razmaku ograničena.

◀ Neka je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$. Tada za $\forall \varepsilon > 0 \exists E > 0$ tako da je za $\forall x > E : |f(x) - A| < \varepsilon$, odakle sledi, da je za $\forall x > E : |f(x)| < |A| + \varepsilon$. Označimo $M = \max \left\{ |A| + \varepsilon, \sup\limits_{a \leq x \leq E} \{f(x)\} \right\}$, to je $|f(x)| \leq M$ za $\forall x \geq a$. ▶

352. Neka je funkcija f neprekidna i ograničena na intervalu $]x_0, +\infty[$. Dokazati, da za svaki broj T, postoji niz $x_n \to +\infty$, takav da je

$$\lim_{n \to \infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

◀ Neka je $T > 0$ proizvoljno. Razmotrimo razliku $f(x + T) - f(x)$. Dva slučaja su moguća:

1) postoji konačan broj $x' \geq x_0$ takav, da razlika $f(x + T) - f(x)$ ima stalan znak za sve $x \geq x'$;

2) za proizvoljno $E \geq x_0$ postoji $x^\star > E$ tako da je $f\left(x^\star + T\right) - f\left(x^\star\right) = 0$. U prvom slučaju niz $f(x' + nT)$ je monoton, a zbog ograničenosti postoji konačan limes $\lim\limits_{n \to \infty} f(x' + nT) = l$, i ispunjeno je

$$\lim_{n \to \infty} \left(f\left(x' + (n+1)T\right) - f\left(x' + nT\right)\right) = l - l = 0,$$

pri čemu je $x_n = x' + nT \to +\infty$ kad $n \to \infty$.

U drugom slučaju postoji beskonačan niz x_n vrednosti x $(x > x_0)$, takav da $x_n \to +\infty$ kad $n \to \infty$ i $f(x_n + T) - f(x_n) = 0$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x_n + T) - f(x_n)\right) = 0.$$

Slučaj, kada je $T < 0$, smenom $x + T = t$ svodi se na već razmatrani. ▶

353. Neka su φ i ψ neprekidne periodične funkcije sa periodima redom T i t $(T > 0,\ t > 0)$ definisane za $-\infty < x < +\infty$, i $\lim\limits_{x\to+\infty} (\varphi(x) - \psi(x)) = 0$. Dokazati, da je $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

◀ Iz uslova: $\lim\limits_{x\to+\infty} (\varphi(x) - \psi(x)) = 0$ sledi:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \left(x > M \Rightarrow |\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Dokažimo da je T period i funkcije ψ. Stvarno, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}\ x + kt > M$ i onda je

$$\begin{aligned}
L &= |\psi(x+T) - \psi(x)| = |\psi(x + kt + T) - \psi(x + kt)| \\
&= |\varphi(x + kt) - \psi(x + kt) + \psi(x + kt + T) - \varphi(x + kt + T)| \\
&\le |\varphi(x + kt) - \psi(k + kt)| + |\varphi(x + kt + T) - \psi(x + kt + T)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Znači, $(\forall\varepsilon > 0)\ |\psi(x+T) - \psi(x)| < \varepsilon$ tj. $\psi(x+T) - \psi(x) = 0$ za $\forall x \in \mathbb{R}$, odnosno, T je period funkcije ψ. Kako je ispunjeno i $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\, m \in \mathbb{Z}$: $x + mT > M$ to je

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = |\varphi(x + mT) - \psi(x + mT)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tj. za svako realno x važi:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

odakle sleduje da je $\varphi(x) - \psi(x) = 0$, odnosno $\varphi(x) = \psi(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. ▶

354. Dokazati, da su sve tačke prekida ograničene monotone funkcije f prekidi prve vrste.

◀ Neka je x_0 tačka prekida rastuće ograničene funkcije f. Tada, za $x < x_0$, postoji

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Analogno, ako je $x > x_0$, to postoji

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0),$$

gde su zbog ograničenosti funkcije, oba limesa konačna. Kako je zatim $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ (x_0 je prekid), to je x_0 prekid prve vrste. ►

355. Dokazati, da ako je funkcija f definisana i monotona na segmentu $[a,b]$ i ako postiže (uzima) sve brojne vrednosti između $f(a)$ i $f(b)$, to je funkcija f neprekidna.

◄ Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji tačka prekida $x_0 \in [a,b]$ funkcije f. Na osnovu prethodnog primera x_0 je prekid prve vrste, pa funkcija f ne može uzimati vrednosti između $f(x_0-0)$ i $f(x_0+0)$, što protivureči uslovu zadatka. To je i dokaz tvrđenja. ►

356. Dokazati, da ako je funkcija f neprekidna na intervalu $]a,b[$ i ako su $x_1, x_2, ..., x_n$ proizvoljne tačke tog intervala, to među njima postoji takav broj ξ, da bude

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right).$$

◄ Neka je $m = \min\limits_{1 \le i \le n} \{f(x_i)\}$, $M = \max\limits_{1 \le i \le n} \{f(x)\}$. Tada je

$$m \le \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right) \le M.$$

Prema Košijevoj teoremi (3^0), $\exists \xi \in]a,b[$ tako da je

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right). ►$$

357. Neka je f neprekidna funkcija na $]a,b[$ i $l = \varliminf\limits_{x \to a} f(x)$, $L = \varlimsup\limits_{x \to a} f(x)$. Dokazati da za proizvoljni broj $\lambda \in [l,L]$, postoji niz x_n koji teži ka a, kad $n \to \infty$, tako da je $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda$.

◄ Ako je $\lambda = l$ ili $\lambda = L$, to je tvrđenje očigledno. Ako $\lambda \in]l,L[$, to postoje nizovi x'_n i x''_n koji konvergiraju ka a i takvi da je $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = l$ i $\lim\limits_{n \to \infty} f(x''_n) = L$. Izaberimo N tako da je za sve $n > N$ ispunjeno: $f(x'_n) < \lambda < f(x''_n)$. Sada prema Košijevoj teoremi (3^0) za svako $n > N$ postoji x_n koji je između x'_n i x''_n i takvo da je $f(x_n) = \lambda$; sledi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda$, i pri tom $x_n \to a$, jer $x'_n \to a$ i $x''_n \to a$, kad $n \to \infty$. ►

1.7 Inverzna funkcija

Funkcije zadate parametarski

1^0 Egzistencija i neprekidnost inverzne funkcije. Ako je funkcija $y = f(x)$ definisana i neprekidna na intervalu $]a, b[$ i monotona u strogom smislu na tom intervalu, onda postoji inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$, definisana, neprekidna i monotona u strogom smislu (isti tip monotonosti kao f) na intervalu $]A, B[$, gde je $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ i $B = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

Pod neprekidnom granom inverzne funkcije date neprekidne funkcije $y = f(x)$ podrazumeva se proizvoljna neprekidna funkcija $x = g(y)$, definisana u maksimalnoj oblasti svog postojanja i koja u toj oblasti zadovoljava jednačinu $f(g(y)) = y$.

2^0 Neprekidnost funkcije zadate parametarski. Ako su funkcije φ i ψ definisane i neprekidne na intervalu $]\alpha, \beta[$ i ako je funkcija φ strogo monotona na tom intervalu, to sistem jednačina

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

definiše y kao neprekidnu funkciju od x:

$$y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

na intervalu $]a, b[$, gde je $a = \lim\limits_{t \to \alpha+0} \varphi(t)$ i $b = \lim\limits_{t \to \beta-0} \varphi(t)$.

3^0 Rešeni zadaci.

358. Naći inverznu funkciju razlomljene linearne funkcije

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

U kom slučaju je inverzna jednaka polaznoj funkciji?

◀ Ako funkciju predstavimo u obliku

$$y = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}, \quad c \neq 0,$$

to se lako uveravamo, da y strogo raste i da je neprekidna funkcija za $-\infty < x < -\frac{d}{c}$ i $-\frac{d}{c} < x < +\infty$. Sledi, postoji inverzna funkcija, takođe monotona i neprekidna. Neka je $-\infty < x < -\frac{d}{c}$; pošto je

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \text{ i } \lim_{x \to -\frac{d}{c}-0} \frac{ax+b}{cx+d} = \begin{cases} -\infty, & -ad + c^2 b > 0; \\ +\infty, & -ad + c^2 b < 0, \end{cases}$$

to inverzna funkcija postoji na intervalu $]-\infty, \frac{a}{c}]$ ili na intervalu $]\frac{a}{c}, +\infty[$.

Ako je $-\frac{d}{c} < x < +\infty$, to, zbog

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}+0} \frac{ax+b}{cx+d} = \begin{cases} +\infty, & -ad+c^2b > 0; \\ -\infty, & -ad+c^2b < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c};$$

inverzna funkcija postoji na jednom od intervala $]\frac{a}{c}, +\infty[$ ili $]-\infty, \frac{a}{c}[$. Sledi, inverzna funkcija postoji, ako je $-\infty < y < \frac{a}{c}$ i $\frac{a}{c} < y < +\infty$. Rešavanjem jednačine $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nalazimo da je $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$, pri čemu, za $-d = a$, inverzna funkcija se poklapa sa datom. ►

359. Naći inverznu funkciju $x = x(y)$ funkcije $y = x + [x]$.

◄ Funkcija je neprekidna i strogo monotona za $n \le x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, zato postoji inverzna funkcija, monotona i neprekidna na intervalu $[A_n, B[$, gde je

$$A_n = y(n) = 2n, \; B = \lim_{x\to n+1-0} (x + [x]) = 2n+1.$$

Neka je $n \le x < n+1$. Tada, smenom $x = n+t$, $0 \le t < 1$, dobijamo $y = x + [x] = n+t+n$. Odavde nalazimo, da je $n+t = y-n$, tj. $x = y-n$, gde je $2n \le y < 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. ►

360. Pokazati, da postoji jedinstvena neprekidna funkcija $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, koja zadovoljava Keplerovu jednačinu $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 \le \varepsilon < 1)$.

◄ Neka je $y_1 < y_2$. Tada je

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= y_2 - y_1 - \varepsilon(\sin y_2 - \sin y_1) \\ &= 2\left(\frac{y_2-y_1}{2} - \varepsilon \cos\frac{y_2+y_1}{2} \sin\frac{y_2-y_1}{2}\right) > 0, \end{aligned}$$

jer je

$$-1 < \varepsilon \cos\frac{y_2+y_1}{2} < 1 \text{ i } \frac{y_2-y_1}{2} - \sin\frac{y_2-y_1}{2} > 0, \text{ tj.}$$

$x(y)$ je strogo rastuća funkcija. A pošto je $x(y)$ neprekidna, onda postoji jedinstvena neprekidna funkcija $y = y(x)$, koja zadovoljava Keplerovu jednačinu. Iz toga što je

$$\lim_{x\to-\infty} (y - \varepsilon \sin y) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} (y - \varepsilon \sin y) = +\infty,$$

sledi, funkcija $y = y(x)$ je definisana za $-\infty < x < +\infty$. ►

361. Pokazati, da jednačina $\cot x = kx$ za svako realno k, ima u intervalu $0 < x < \pi$ jedinstveno neprekidno rešenje $x = x(k)$.

◀ Pokažimo, da je funkcija $k = \frac{\cot x}{x}$ strogo opadajuća na $0 < x < \pi$. Za $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ to je očigledno. Neka je $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ i $h > 0$ takvo, da je $x + h < \pi$; tada se lako pokazuje da je

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cot(x+h)}{x+h} - \frac{\cot x}{x} \\ &= -\frac{h}{(x^2+hx)\sin x \sin(x+h)}\left(x\frac{\sin h}{h} + \cos x \sin(x+h)\right) < 0. \end{aligned}$$

Zaista,

$$-\frac{h}{(x^2+hx)\sin x \sin(x+h)} < 0, \text{ a}$$

$$\lim_{h\to+0}\left(x\frac{\sin h}{h} + \cos x\sin(x+h)\right) = x + \cos x \sin x = \frac{1}{2}(2x + \sin 2x) > 0.$$

Na taj način, na intervalu $-\infty < k < +\infty$ postoji jedinstvena neprekidna funkcija $x = x(k)$: interval za k određen je jednakostima:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\cot x}{x} = +\infty, \lim_{x\to\pi-0}\frac{\cot x}{x} = -\infty. \ ▶$$

362. Može li monotona funkcija $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ da ima inverznu funkciju? Analizirati primer:

$$y = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}; \\ -x, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

◀ Može, ako jednačina $y = f(x)$ za svako fiksirano $y \in]-\infty, +\infty[$ ima jedinstveno rešenje. Navedeni primer ima to svojstvo; inverzna funkcija glasi

$$x = \begin{cases} y, & y \in \mathbb{Q}; \\ -y, & y \in \mathbb{I}. \end{cases} \ ▶$$

363. U kom slučaju funkcija $y = f(x)$ i njena inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$ određuju istu funkciju?

◀ Očigledno, data i inverzna funkcija su iste, ako je

$$f(x) \equiv f^{-1}(x).$$

Ali, pošto je $f\left(f^{-1}(x)\right) \equiv x$, to poslednji uslov dobija oblik:

$$f(f(x)) \equiv x. \ ▶$$

364. Dokazati, da ako je funkcija f definisana i strogo monotona na segmentu $[a, b]$ i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ $(a \leq x_n \leq b)$, to je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

◀ Jasno, funkcija f je ograničena. Neka je na primer, $y = f(x)$ strogo rastuća na $[a, b]$. Tada postoji inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$ takođe ograničena i strogo rastuća. Sleduje, postoji konačan limes

$$\lim_{f(x_n)\to f(a)} x = \lim_{f(x_n)\to f(a)} f^{-1}(f(x)) = a_0.$$

Očigledno, $a_0 = a$, jer ako je $a_0 > a$, to je $y_0 = f(a_0) > f(a)$, što protivureči tome da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. ▶

Za sledeće funkcije, odrediti neprekidne grane inverzne funkcije:

365. $y = x^2$.

◀ Funkcija je neprekidna na $-\infty < x < +\infty$, strogo opada na $]-\infty, 0]$ i strogo raste na $[0, +\infty[$. Zato, na svakom od intervala postoji inverzna funkcija. Pošto je

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} x^2 = 0; \quad \lim_{x\to+0} x^2 = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,$$

to je $x = -\sqrt{y}$ $\quad (0 \leq y < +\infty)$ i $x = +\sqrt{y}$ $\quad (0 \leq y < +\infty)$. ▶

366. $y = \sin x$.

◀ S obzirom da je funkcija neprekidna i monotona na svakom od razmaka $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to na svakom od njih postoji neprekidna inverzna funkcija $f^{-1}(y)$, a pošto je $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \sin x = (-1)^{k+1}$ i $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi-0} \sin x = (-1)^k$, to $f^{-1}(y)$ postoji na segmentu $[-1, 1]$. Rešavanjem jednačine $y = \sin x$, sledi $x = (-1)^k \arcsin y + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $-1 \leq y \leq 1$. ▶

367. Dokazati, da je skup vrednosti neprekidne funkcije $y = 1 + \sin x$, definisane za $0 < x < 2\pi$, segment.

◀ Data funkcija je monotona i neprekidna na segmentu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ i $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} (1 + \sin x) = 2$; $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}-0} (1 + \sin x) = 0$; zato postoji neprekidna inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$, definisana na segmentu $[0, 2]$. ▶

368. Dokazati jednakost

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

◀ Imamo,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arccos x \leq \frac{3\pi}{2},$$

s druge strane,

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) = x^2 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = 1.$$

Odavde sleduje, da je

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

a kako je nejednakost $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi \le \frac{3\pi}{2}$ moguća samo za $k = 0$, to je jednakost dokazana. ►

369. Dokazati jednakost

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} sgn x \quad (x \neq 0).$$

◄ Očigledno, da je

$$-\pi < \arctan x + \arctan\frac{1}{x} < \pi, \text{ i} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right) \\ &= \sin(\arctan x)\cdot\cos\left(\arctan\frac{1}{x}\right) + \cos(\arctan x)\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{x\,|x|}{1+x^2} + \frac{|x|}{(1+x^2)\,x} = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Na taj način je

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = (-1)^k\,\frac{\pi}{2} sgn x + k\pi, \quad (x \neq 0).$$

Uzimajući u obzir (1), zaključujemo da je $k = 0$, čime je data jednakost u potpunosti dokazana. ►

370. Dokazati teoremu sabiranja arkustangensa

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

gde je $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ funkcija, koja uzima jednu od tri vrednost: $-1, 0, 1$.

Za koje vrednosti y pri datoj vrednosti x je funkcija ε prekidna? Nacrtati u ravni xOy oblasti neprekidnosti funkcije ε i odrediti vrednost te funkcije u dobijenim oblastima.

◀ Imamo, $\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x+y}{1-xy}$ i $\tan\left(\arctan\frac{x+y}{1-xy}\right) = \frac{x+y}{1-xy}$, zato je

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi, \tag{1}$$

gde je ε ceo broj. Pošto je

$$|\arctan x + \arctan y| = \left|\arctan\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi\right| < \pi,$$

a $\left|\arctan\frac{x+y}{1-xy}\right| < \frac{\pi}{2}$, to ε može uzimati samo tri vrednosti $-1, 0, 1$. Uzimanjem kosinusa leve i desne strane jednakosti (1), dobijamo

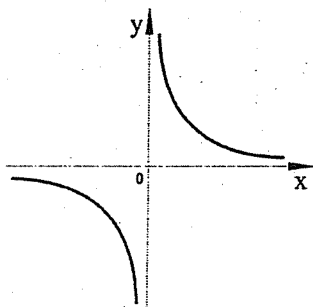
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}}\cos\varepsilon\pi,$$

gde je

$$\cos\varepsilon\pi = \frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\cdot\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{|1-xy|} = \begin{cases} 1, & xy < 1; \\ -1, & xy > 1. \end{cases}$$

Sledi, funkcija $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ ima prekid, ako je $y = \frac{1}{x}$, gde je x fiksiran broj. Primetimo, da ako je $xy < 1$, to je $\varepsilon = 0$, a za $xy > 1$ je $\varepsilon = \pm 1$ (jer ε može uzimati samo tri vrednosti: $-1, 0, 1$). Neka je $xy > 1$ i $x > 0$. Tada $y > 0$ i $\arctan x > 0$, $\arctan y > 0$, a $\arctan\frac{x+y}{1-xy} < 0$. U jednakosti (1) sleva stoji neprekidna pozitivna funkcija, sledi, i zdesna stoji pozitivna funkcija, i zato je $\varepsilon\pi > 0$, tj. $\varepsilon = +1$.

Analogno, ako je $xy > 1$ i $x < 0$ $(y < 0)$, to je $\varepsilon = -1$ **(sl.74)**. ▶



sl. 74

371. Naći funkciju $y = y(x)$, datu parametarski $x = \arctan t$, $y = \operatorname{arccot} t$ $(-\infty < t < +\infty)$. U kojoj oblasti je definisana ta funkcija.

◀ Funkcije $t \mapsto \arctan t$ i $t \mapsto \operatorname{arccot} t$ su neprekidne na celoj osi i $t \mapsto \arctan t$ je strogo monotona, zato sistem definiše y kao neprekidnu funkciju od x, pri čemu je

$$y = \operatorname{arccot}(\tan x) = \operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x,$$

za $|x| < \frac{\pi}{2}$, jer je

$$\lim_{t\to-\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{t\to+\infty} \arctan t = +\frac{\pi}{2}. \ ▶$$

372. Neka je $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ $(-\infty < t < +\infty)$.

U kojim se oblastima parametra t promenljiva y može razmatrati kao funkcija od x? Za dobijene oblasti, odrediti izraz za y.

◀ Obe funkcije su neprekidne za sve vrednosti parametra t. Druga funkcija strogo opada za $-\infty < t \leq 0$ a strogo raste ako je $0 \leq t < +\infty$, zato je u tim oblastima y funkcija od x. A pošto je $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, to je $x^2 - y^2 = 1$ i $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $y = -\sqrt{x^2 - 1}$, pri čemu je u oba slučaja $1 \leq x < +\infty$, jer $\cosh t \to 1$ kad $t \to 0$ i $\cosh t \to +\infty$ kad $t \to \pm\infty$. ▶

373. Odrediti potreban i dovoljan uslov da sistem jednačina $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ određuje y kao jednoznačnu funkciju od x?

◀ Neka sistem određuje y kao funkciju od x, i neka su X i Y respektivno skupovi vrednosti x i y, ako je $\alpha < t < \beta$.

Neka je $x_0 \in X$ proizvoljno i $y_0 \in Y$ njemu odgovarajuće. Zato za sve vrednosti t, koje zadovoljavaju jednačinu $x_0 = \varphi(t)$, funkcija $\psi(t)$ uzima konstantnu vrednost, jednaku y_0. Lako se uveravamo da je taj uslov i dovoljan.

Neka je za proizvoljno fiksirano x_0 i za sva rešenja $t \in]\alpha, \beta[$ funkcija $\psi(t)$ konstantna i jednaka y_0. To znači da se svakom $x_0 \in X$ dodeljuje jedinstveno $y_0 \in Y$, tj. sistem određuje y kao funkciju od x. ▶

374. Pod kojim uslovom dva sistema jednačina

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (a < t < b) \\ x &= \varphi(\chi(\tau)),\ y = \psi(\chi(t)) \quad (\alpha < \tau < \beta) \end{aligned}$$

određuju jednu istu funkciju $y = y(x)$?

◀ Sistem određuje jednu istu funkciju $y = y(x)$, ako jednakim vrednostima x odgovaraju jednake vrednosti y. Ali, jednakost vrednosti x u sistemu, obezbeđuje jednakost argumenata t i $\chi(\tau)$ i poklapanje (jednakost) oblasti njihovih promena, jer ako je $t = \chi(\tau)$, pri čemu je $a < t = \chi(\tau) < b$ za $\alpha < \tau < \beta$, to sistem određuje jednu istu funkciju. ▶

1.8 Ravnomerna neprekidnost

1^0 Definicija ravnomerne neprekidnosti. Funkcija f naziva se ravnomerno neprekidnom na datom skupu (intervalu, segmentu,...) $X = \{x\}$, ako je f definisana na X i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji takvo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, da za bilo koje dve vrednosti $x', x'' \in X$ iz nejednakosti $|x' - x''| < \delta$ sleduje nejednakost $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

2^0 Kantorova teorema. Funkcija f definisana i neprekidna na segmentu $[a, b]$, ravnomerno je neprekidna na tom segmentu.

3^0 Rešeni zadaci.

375. Pokazati, da je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ neprekidna na intervalu $]0, 1[$, ali nije na njemu ravnomerno neprekidna.

◄ Data funkcija je elementarna, zato je neprekidna u oblasti definisanosti. Pokažimo da ona nije ravnomerno neprekidna na intervalu $]0, 1[$. Neka je $x'_n = \frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{1}{n+2\varepsilon}$, $n > 1$. Tada je $|x'_n - x''_n| = \frac{2\varepsilon}{n(n+2\varepsilon)} \to 0$ kad $n \to \infty$, a istovremeno je

$$\left|f\left(x'_n\right) - f\left(x''_n\right)\right| = |n - n - 2\varepsilon| = 2\varepsilon > \varepsilon, \ \forall\varepsilon > 0,$$

sleduje, funkcija nije ravnomerno neprekidna na $]0, 1[$. ►

376. Pokazati, da je funkcija $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ neprekidna i ograničena u intervalu $]0, 1[$, ali nije na njemu ravnomerno neprekidna.

◄ Ograničenost je očigledna, a neprekidnost sleduje iz toga, što su funkcije $x \mapsto \frac{\pi}{x}$ i $y \mapsto \sin y$ neprekidne u oblasti definisanosti.

Neka je $x'_n = \frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{2}{2n+1}$, $n > 1$. Tada je $|x'_n - x''_n| = \frac{1}{n(2n+1)} \to 0$ kad $n \to \infty$, a u isto vreme je $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1 > \varepsilon$ za $\forall\varepsilon \in]0, 1[$. Znači, funkcija f nije ravnomerno neprekidna. ►

377. Pokazati, da je funkcija $f(x) = \sin x^2$ neprekidna i ograničena na beskonačnom intervalu $-\infty < x < +\infty$, ali nije ravnomerno neprekidna na tom intervalu.

◄ Ograničenost i neprekidnost su očigledni, a ravnomerna neprekidnost izostaje, jer je

$$\left|f\left(x'_n\right) - f\left(x''_n\right)\right| = 1 > \varepsilon \ \left(\forall\varepsilon \in]0, 1[\right)$$

gde je $x'_n = \sqrt{n\pi}$, $x''_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, i $|x'_n - x''_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}} \to 0$ kad $n \to \infty$. ►

378. Dokazati, da ako je gunkcija f definisana i neprekidna u oblasti $a \le x < +\infty$ i ako postoji $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, to je f ravnomerno neprekidna u toj oblasti.

◀ Iz postojanja limesa sleduje, da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $E = E(\varepsilon)$ takvo da je $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ kad god je $x', x'' > E$.

Fiksirajmo takav broj E. Iz neprekidnosti funkcije na segmentu $[a, E]$ sleduje njena ravnomerna neprekidnost (Kantorova teorema) tj. za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$ tako da je

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon, \ \forall x', x'' \in [a, E],$$

ako je $|x' - x''| < \delta$. S obzirom da je nejednakost $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tačna za $\forall x', x'' > E$, to je ona tačna i za $\forall x', x'' \geq a$, koji ispunjavaju nejednakost $|x' - x''| < \delta$, što znači ravnomernu neprekidnost funkcije f na skupu $[a, +\infty[$. ▶

379. Pokazati, da je neograničena funkcija $f(x) = x + \sin x$ ravnomerno neprekidna na celoj brojnoj osi.

◀ Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, imamo

$$\begin{aligned} R &= \left|f(x') - f(x'')\right| = \left|x' - x'' - (\sin x' - \sin x'')\right| \\ &\leq \left|x' - x''\right| + 2\left|\sin\frac{x' - x''}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x' + x''}{2}\right| \leq 2\left|x' - x''\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

za sve x', x'', koji zadovoljavaju nejednakost $|x' - x''| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$. ▶

380. Da li je ravnomerno neprekidna funkcija $f(x) = x^2$:

a) na intervalu $]-l, l[$, gde je l proizvoljni realan broj;

b) na intervalu $]-\infty, +\infty[$?

◀ a) Na intervalu $]-l, l[$ funkcija je ravnomerno neprekidna, jer za svako $\varepsilon > 0$ imamo

$$\left|f(x') - f(x'')\right| = \left|x'^2 - x''^2\right| = \left|x' + x''\right| \cdot \left|x' - x''\right| < 2l\left|x' - x''\right| < \varepsilon$$

za $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{2l} = \delta(\varepsilon)$.

b) Funkcija nije ravnomerno neprekidna, jer za $x' = n + \frac{1}{n}$ i $x'' = n$ imamo $|x' - x''| = \frac{1}{n} \to 0$, kad $n \to \infty$, a $|f(x') - f(x'')| = \left|n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 > \varepsilon$ za $\forall \varepsilon < 2$. ▶

Ispitati ravnomernu neprekidnost u zadatim oblastima sledećih funkcija:

381. $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$.

◀ Funkcija je ravnomerno neprekidna po Kantorovoj teoremi 2^0. ▶

382. $f(x) = \ln x$ $(0 < x < 1)$.

◀ Funkcija nije ravnomerno neprekidna, jer za $x_n' = e^{-n}$, $x_n'' = e^{-n-1}$, $|x_n' - x_n''| = \frac{e-1}{e^{n+1}} \to 0$ kad $n \to \infty$, a $|f(x_n') - f(x_n'')| = |-n + n + 1| = 1 > \varepsilon$ za $\forall \varepsilon \in]0, 1[$. ▶

383. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(0 < x < \pi)$.

◀ Uzmimo funkciju: $F(x) = f(x)$ za $0 < x < \pi$; $F(0) = 1$; $F(\pi) = 0$. Pošto je funkcija F neprekidna na segmentu $[0, \pi]$, to je po Kantorovoj teoremi, ona ravnomerno neprekidna na tom segmentu, dakle i na intervalu $]0, \pi[$. ▶

384. $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$ $(0 < x < \pi)$.

◀ Uzmimo nizove $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$ i $x''_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$; tada je $|x'_n - x''_n| = \frac{1}{2n(2n+1)\pi} \to 0$ kad $n \to \infty$, a $|f(x'_n) - f(x''_n)| = e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}} > 2$. Sleduje, funkcija nije ravnomerno neprekidna. ▶

385. $f(x) = \arctan x$ $(-\infty < x < +\infty)$.

◀ Funkcija je ravnomerno neprekidna, jer je (primer 370)

$$|\arctan x' - \arctan x''| = \left|\arctan \frac{x' - x''}{1 + x'x''}\right| \le \left|\frac{x' - x''}{1 + x'x''}\right| \le |x' - x''| < \varepsilon$$

ako je $|x' - x''| < \delta = \varepsilon$, $x', x'' > 0$. ▶

386. $f(x) = \sqrt{x}$ $(1 \le x < +\infty)$.

◀ Ravnomerna neprekidnost sleduje iz toga što je

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \le |x' - x''| < \varepsilon,$$

ako je $|x' - x''| < \delta = \varepsilon$. ▶

387. $f(x) = x \sin x$ $(0 \le x < +\infty)$.

◀ Neka je $x'_n = n\pi$ i $x''_n = n\pi + \frac{1}{n}$; tada je $|x'_n - x''_n| = \frac{1}{n} \to 0$ kad $n \to \infty$, a

$$\begin{aligned} |f(x'_n) - f(x''_n)| &= \left|\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right|\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right|\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\left(\pi + \frac{1}{n^2}\right) \to \pi \end{aligned}$$

kad $n \to \infty$. Sleduje, $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \pi - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ za $\forall n > N(\varepsilon)$ i funkcija nije ravnomerno neprekidna. ▶

388. Dokazati, da je funkcija $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ ravnomerno neprekidna na svakom od intervala $I_1 =]-1, 0[$ i $I_2 =]0, 1[$ a nije ravnomerno neprekidna na njihovoj sumi $I_1 + I_2 = \{x : 0 < |x| < 1\}$.

◀ Očigledno, ako je $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in I_1$ to je funkcija

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ f(x), & 0 < x < 1; \\ \sin 1, & x = 1 \end{cases}$$

neprekidna na segmentu $[0,1]$; zato je prema Kantorovoj teoremi ona na njemu ravnomerno neprekidna, a sleduje takva je i na I_1. Ravnomerna neprekidnost na I_2 pokazuje se slično.

Funkcija nije ravnomerno neprekidna na zbiru intervala, jer za bilo koja dva niza $x_n' \to -0$ i $x_n'' \to +0$ imamo da $|x_n' - x_n''| \to 0$, a $f(x_n') \to f(-0) = -1$, $f(x_n'') \to f(+0) = +1$ kad $n \to \infty$. Zato je $|f(x_n') - f(x_n'')| > 2 - \alpha$ $(0 < \alpha < 2)$ za sve $n > N(\alpha)$, tj. $|f(x_n') - f(x_n'')|$ ne može biti manje od proizvoljnog ε $(0 < \varepsilon < 2 - \alpha)$. ▶

389. Za $\varepsilon > 0$ naći $\delta = \delta(\varepsilon)$ (bilo koje), da zadovoljava uslov ravnomerne neprekidnosti za funkciju f na datom razmaku, ako je:

a) $f(x) = 5x - 3$ $(-\infty < x < +\infty)$; b) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ $(-2 \le x \le 5)$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0{,}1 \le x \le 1)$; d) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(0 \le x < +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$

e) $f(x) = 2\sin x - \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$; f) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ $(x \ne 0)$ i $f(0) = 0$ $(0 \le x \le \pi)$.

◀ a) $|f(x') - f(x'')| = 5|x' - x''| < \varepsilon$, ako je $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon)$.

b) Imamo

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |x'^2 - 2x' - 1 + x''^2 + 2x'' + 1| \\ &= \left|(x' - x'')^2 + (x' - x'') \cdot 2(x'' - 1)\right| \\ &\le |x' - x''|^2 + 8|x' - x''| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ako je samo

$$|x' - x''| < -4 + \sqrt{16 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{4 + \sqrt{16 + \varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{8} = \delta(\varepsilon).$$

c)

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{|x'x''|} < 100 \cdot |x' - x''| < \varepsilon,$$

ako je $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{100} = \delta(\varepsilon)$.

d) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Ako su brojevi x i y takvi da je

$$0 \le x < \varepsilon^n, \; 0 \le y < \varepsilon^n, \tag{1}$$

to je $0 \le \sqrt[n]{x} < \varepsilon$, $0 \le \sqrt[n]{y} < \varepsilon$ i onda je $|x - y| < \varepsilon^n = \delta(\varepsilon)$. Odavde sledi, da je

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| < \varepsilon$$

ako je $|x - y| < \varepsilon^n = \delta(\varepsilon)$. Ako (1) nije ispunjeno, tj. bar jedan od brojeva x i y nije manji od ε^n, to je

$$\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}y} + \cdots + \sqrt[n]{y^{n-1}} > \varepsilon^{n-1}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} R(x,y) &= |f(x) - f(y)| = |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \\ &= \frac{|x-y|}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}y} + \cdots + \sqrt[n]{y^{n-1}}} < \frac{|x-y|}{\varepsilon^{n-1}} < \varepsilon \end{aligned}$$

za $|x-y| < \varepsilon^n = \delta(\varepsilon)$.

e) Imamo

$$\begin{aligned} R &= |f(x') - f(x'')| = |2(\sin x' - \sin x'') - (\cos x' - \cos x'')| \\ &= \left|4\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2} + 2\sin\frac{x'-x''}{2}\sin\frac{x'+x''}{2}\right| \\ &\le 6\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right| \le 3|x'-x''| < \varepsilon, \text{ za } |x'-x''| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

f) Neka je $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ proizvoljno. Na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ iz nejednakosti $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{3}$ sleduje, da je $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Na segmentu $\left[\frac{\varepsilon}{2}, \pi\right]$ imamo

$$\begin{aligned} R &= |f(x') - f(x'')| = \left|x'\sin\frac{1}{x'} - x''\sin\frac{1}{x''}\right| \\ &= \left|x'\sin\frac{1}{x'} - x''\sin\frac{1}{x'} + x''\sin\frac{1}{x'} - x''\sin\frac{1}{x''}\right| \\ &\le |x'-x''| \cdot \left|\sin\frac{1}{x'}\right| + x''\left|2\sin\frac{x'-x''}{2x'x''}\cos\frac{x'+x''}{2x'x''}\right| \\ &\le |x'-x''| + \frac{1}{x'}|x'-x''| < |x'-x''|\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right) < \varepsilon, \end{aligned}$$

ako je $|x'-x''| < \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$. Na taj način je

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right\}. \blacktriangleright$$

390. Na koliko međusobno jednakih odsečaka je dovoljno podeliti segment $[1, 10]$, da bi oscilacija funkcije $f(x) = x^2$ na svakom od tih odsečaka bila manja od $0,0001$?

◀ Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, imamo

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |x'^2 - x''^2| = \left|(x'-x'')^2 + 2x''(x'-x'')\right| \\ &\le |x'-x''|^2 + 20|x'-x''| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ako je

$$|x' - x''| < -10 + \sqrt{100+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{10+\sqrt{100+\varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{20} = \delta(\varepsilon).$$

Podelimo segment $[0,10]$ tačkama $x_0 = 1; x_1; x_2; ...; x_n = 10$ na n jednakih delova. Tada je njihova dužina:

$$\triangle x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{9}{n} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Ako na svakom od odsečaka $[x_{i-1}, x_i]$ tačke x_i' i x_i'' izaberemo tako, da bude

$$M_i = f(x_i') = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\}, \quad m_i = f(x_i'') = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\},$$

onda oscilacija w_i funkcije f na $[x_{i-1}, x_i]$ zadovoljava nejednakost

$$\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon.$$

Tada broj n nalazimo iz uslova $\triangle x_i = \frac{9}{n} < \frac{\varepsilon}{20} = \delta$, odakle se dobija $n > 180\varepsilon^{-1} = 18 \cdot 10^5$. ►

391. Dokazati da su zbir i proizvod konačnog broja ograničenih ravnomerno neprekidnih funkcija na intervalu $]a, b[$ ravnomerno neprekidne funkcije na tom intervalu.

◄ Dovoljno je razmotriti slučaj dve ravnomerne neprekidne funkcije f i g. U slučaju zbira nije potrebna pretpostavka da su funkcije ograničene. Saglasno uslovu imamo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_1(\varepsilon)$, takvo da je

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall x', x'' \in \,]a, b[\qquad (1)$$

za koje je $|x' - x''| < \delta_1$;

Zatim $\exists \delta_2(\varepsilon)$ takvo da za $\forall x', x'' \in \,]a, b[$ za koje je $|x' - x''| < \delta_2$, bude

$$|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Ako je sada $|x' - x''| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, to su ispunjena oba uslova (1) i (2).

Tada ravnomerna neprekidnost zbira sleduje iz nejednakosti

$$\begin{aligned} R &= |f(x') + g(x') - f(x'') - g(x'')| \\ &\le |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

koja je ispunjena za svako $x', x'' \in \,]a, b[$, za koje je $|x' - x''| < \delta$.

Ravnomerna neprekidnost proizvoda proističe iz toga što je

$$\begin{aligned}
R &= \left|f(x')\,g(x') - f(x'')\,g(x'')\right| \\
&= \left|f(x')\,g(x') - f(x')\,g(x'') + f(x')\,g(x'') - f(x'')\,g(x'')\right| \\
&\le \left|f(x')\right|\cdot\left|g(x') - g(x'')\right| + \left|g(x'')\right|\cdot\left|f(x') - f(x'')\right| < L\frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

za $|x' - x''| < \delta$; $\forall x', x'' \in \left]a, b\right[$ i L, M su supremumi funkcija f i g na $\left]a, b\right[$. ►

392. Dokazati, da ako je ograničena monotona funkcija f neprekidna na konačnom ili beskonačnom intervalu $\left]a, b\right[$, to je ona ravnomerno neprekidna na tom intervalu.

◄ Iz uslova primera sleduje, da postoje konačni limesi

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) \text{ i } f(b-0) = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Ako su a i b konačni, to, stavljajući $f(a) = f(a+0)$ i $f(b) = f(b-0)$, dobijamo neprekidnu funkciju f na segmentu $[a, b]$, koja je na njemu i ravnomerno neprekidna $\left(2^0\right)$ a samim tim i na intervalu $\left]a, b\right[$.

Ako je jedan od brojeva a, b ili oba ta broja jednak $\pm\infty$, onda rasuđivanjem kao pri rešavanju primera 378, imamo da je funkcija f ravnomerno neprekidna. ►

393. Dokazati, da ako je funkcija f ravnomerno neprekidna na konačnom intervalu $\left]a, b\right[$, tada postoje limesi $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ i $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Da li važi isto tvrđenje za beskonačni interval $\left]a, b\right[$?

◄ Ako je f ravnomerno neprekidna na $\left]a, b\right[$, to za $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon)$ tako da je

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon \;\forall x', x'' \in \left]a, b\right[, \tag{1}$$

za koje je $|x' - x''| < \delta$. Za sve x' i x'' koji zadovoljavaju nejednakosti

$$0 < \left|x' - a\right| < \frac{\delta}{2} \text{ i } 0 < \left|x'' - a\right| < \frac{\delta}{2},$$

imamo

$$\left|x' - x''\right| = \left|x - a + a - x''\right| \le \left|x' - a\right| + \left|x'' - a\right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta; \tag{2}$$

i pri tom važi nejednakost (1). Sledi, ispunjen je Košijev uslov postojanja limesa kad $x \to a$, tj. postoji konačna granična vrednost $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Slično, se dokazuje da postoji konačan limes $B = \lim\limits_{x\to b} f(x)$.

Za beskonačan interval, kao što pokazuje primer 379, navedena teorema nije tačna. ▶

394. Dokazati, da bi se funkcija f, definisana i neprekidna na konačnom intervalu $]a,b[$, mogla neprekidno produžiti na $[a,b]$, potrebno je i dovoljno, da funkcija f bude ravnomerno neprekidna na intervalu $]a,b[$.

◀ Neophodnost sleduje iz prethodnog zadatka. Dovoljnost proističe iz toga što ako postoje konačni limesi $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ i $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, onda uzimajući njih za vrednosti funkcije f redom u tačkama a i b, dobijamo da je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, tj. da je f ravnomerno neprekidna na $[a,b]$ $\left(2^0\right)$ a samim tim i na $]a,b[$ kao podskupu od $[a,b]$. ▶

395. Modulom neprekidnosti funkcije f na $]a,b[$ naziva se funkcija $\omega_f(\delta) = \sup|f(x_1) - f(x_2)|$, gde su x_1, x_2 proizvoljne tačke iz $]a,b[$, povezane uslovom $|x_2 - x_1| \leq \delta$.

Dokazati, funkcija f je ravnomerno neprekidna na $]a,b[$, ako i samo ako je $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0$.

◀ Neka je $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ $\exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ tako da je za svako $\delta < \delta_1 : \omega_f(\delta) = \sup|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$ i $|x_1 - x_2| \leq \delta < \delta_1$, a tada je tim pre $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$ i $|x_1 - x_2| < \delta_1$, tj. f je ravnomerno neprekidna na $]a,b[$.

Obrnuto, neka je f ravnomerno neprekidna na $]a,b[$, tj. za $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\varepsilon)$ tako da je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$, ako je samo $|x_1 - x_2| < \delta$. Zatim, pri tim istim uslovima za x_1, x_2 imamo $\omega_f(\delta) = \sup|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$, tj. $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0$. ▶

396. Odrediti ocenu modula neprekidnosti (prethodni primer) oblika $\omega_f(\delta) \leq c\delta^\alpha$, gde su c i α konstante, ako je

a) $f(x) = x^3$ $(0 \leq x \leq 1)$; b) $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 \leq x \leq a)$ i $(a < x < +\infty)$

c) $f(x) = \sin x + \cos x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$.

◀ a)

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta) &= \sup|f(x_1) - f(x_2)| = \sup\left|x_1^3 - x_2^3\right| \\ &= \sup\left(|x_1 - x_2|\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right)\right) \\ &\leq 3\sup|x_1 - x_2| < 3\delta,\end{aligned}$$

jer je $|x_1 - x_2| \leq \delta$.

b) Neka je $0 \leq x \leq a$. Slično primeru 389, d) imamo $\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| < \varepsilon$ za $\forall x_1, x_2 \in [0,a]$ i $|x_1 - x_2| < \varepsilon^2 = \delta = \delta(\varepsilon)$, sledi,

$$\omega_f(\delta) = \sup\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \leq \varepsilon = \sqrt{\delta}.$$

Ako je $a < x < +\infty$, onda za $|x_1 - x_2| < \delta$ imamo

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta) &= \sup\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = \sup \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \sup|x_1 - x_2| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

c) Neka je za $\forall x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ i $|x_1 - x_2| < \delta$. Tada

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta) &= \sup|\cos x_1 + \sin x_1 - \cos x_2 - \sin x_2| \\ &= \sup\left|2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2} - 2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \\ &= \sup\left|2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\sqrt{2}\sup\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \leq 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sup|x_1 - x_2| \leq \sqrt{2}\cdot\delta.\ \blacktriangleright\end{aligned}$$

1.9 Funkcionalne jednačine

397. Dokazati, da je linearna homogena funkcija $f(x) = ax$, gde je $a = f(1)$, jedinstvena neprekidna funkcija definisana na celoj brojnoj osi koja zadovoljava

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

za sve realne brojeve x i y.

◀ Funkcija

$$f(x) = ax \tag{2}$$

zadovoljava jednačinu (1); ostaje da pokažemo jedinstvenost, tj. da svaka druga funkcija f koja zadovoljava (1) ima oblik (2).

Stavljajući u (1) $y = x$, dobijamo $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$; dalje, indukcijom ustanovljavamo, da je

$$f(nx) = nf(x) \tag{3}$$

za svaki prirodan broj n. Zamenjujući u (3) x sa $\frac{x}{n}$, imamo

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

Neka je r proizvoljan pozitivan racionalan broj, tj. $r = \frac{p}{q}$, gde su p i q prirodni brojevi; tada je

$$f(rx) = f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

Stavimo u (1) $y = x = 0$, dobijamo $f(0) = 2f(0)$, dakle $f(0) = 0$. Ako uzmemo $y = -x$, iz (1) sledi, da je $f(0) = f(x) + f(-x)$ i $f(-x) = -f(x)$. Na taj način, za racionalne negativne brojeve $-r$ $(r > 0)$ imamo $f(-rx) = -f(rx) = -rf(x)$. Sledi, za proizvoljan racionalan r broj je ispunjeno:

$$f(rx) = rf(x). \tag{4}$$

Neka je na kraju, α proizvoljan realan broj. Tada postoji niz racionalnih brojeva $\{r_n\}$ takav, da je $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$; pri tom zbog neprekidnosti funkcije f iz jednakosti $f(r_n x) = r_n f(x)$, posle prelaska na limes kad $n \to \infty$, dobijamo

$$f(\alpha x) = \alpha f(x). \tag{5}$$

Pošto za $x = 1$ iz (5) nalazimo, da je $f(\alpha) = \alpha f(1)$ za svako $\alpha \in \mathbb{R}$, tj. $f(x) = xf(1)$ za svako $x \in \mathbb{R}$, odakle označavajući $f(1)$ sa a, dobijamo da je $f(x) = ax$. ►

398. Dokazati, da je monotona funkcija f, koja zadovoljava jednačinu (1), linearna homogena funkcija.

◄ Očigledno, u uslovu zadatka se pretpostavlja, da je funkcija f definisana za $-\infty < x < +\infty$. Neka f raste. Isto, kao u prethodnom primeru, pokazujemo da je $f(0) = 0$ kao i da je f homogena funkcija na skupu racionalnih brojeva, tj. $f(rx) = rf(x)$.

Zbog monotonosti je za $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$

$$-\frac{1}{n}f(1) = f\left(-\frac{1}{n}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1),$$

odakle je $|f(x)| \le \frac{1}{n}f(1)$. Pretpostavimo da je $f(1) > 0$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno; tada $\exists N = N(\varepsilon)$ tako da je za $\forall n > N$

$$|f(x)| \le f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1) < \varepsilon$$

za $\forall |x| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{f(1)} = \delta(\varepsilon)$; odatle je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Sledi, funkcija f je neprekidna u tački $x = 0$. Ako je $f(1) = 0$, to je $f(x) \equiv 0$ za $\forall |x| < \frac{1}{n}$,

a odatle sledi, da je $f(x) \equiv 0$ za $-\infty < x < +\infty$, tj. funkcija je linearna homogena, gde je $a = 0$. A tada je

$$\lim_{y \to 0} f(y) = \lim_{y \to 0} (f(x+y) - f(x)) = 0;$$

na taj način je funkcija f neprekidna za svako x, a to prema prethodnom primeru znači da je ona linearna homogena. ►

399. Dokazati, da je funkcija f, koja zadovoljava jednačinu (1) i koja je ograničena u dovoljno malom intervalu $]-\varepsilon, \varepsilon[$, linearna homogena.

◄ Iz jednakosti (1) sledi da je $f(0) = 0$ i $f(rx) = rf(x)$ za racionalne r i za svako x. Neka je x_n takav proizvoljan niz, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, a r_n niz racionalnih brojeva, koji teži ka $+\infty$ i takav da je $\lim_{n\to\infty} (r_n x_n) = 0$, $x_n \neq 0$, $r_n \neq 0$. Za nalaženje niza r_n dovoljno je na primer svakom prirodnom broju dodeliti racionalan broj r_n, za koji je ispunjeno: $\frac{1}{\sqrt{|x_n|}} < r_n < \frac{1}{\sqrt[3]{|x_n|}}$; pri tom je $|f(r_n x_n)| \leq M$ za $\forall n$. Tada je

$$|f(x_n)| = \left| f\left(\frac{1}{r_n} r_n x_n\right) \right| = \frac{1}{r_n} |f(r_n x_n)| \leq \frac{M}{r_n} \to 0$$

kad $n \to \infty$. Sledi, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$. Dakle, f je neprekidna u tački $x = 0$, a tada iz relacije

$$\lim_{y \to 0} (f(x+y) - f(x)) = \lim_{y \to 0} f(y) = 0$$

sledi neprekidnost u proizvoljnoj tački, što povlači za sobom (primer 397) linearnost i homogenost funkcije f. ►

400. Dokazati, da je eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$, gde je $a = f(1)$ pozitivna konstanta, $a \neq 1$, jedinstvena različita od nule neprekidna funkcija koja za sve realne x i y zadovoljava jednačinu

$$f(x+y) = f(x) f(y). \tag{6}$$

◄ Stavimo u (6) $x = \frac{t}{2}$ i $y = \frac{t}{2}$; tada je $f(t) = f^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$; ako je $f(t) = 0$ za neko $t = x$, onda iz (6) sledi da je $f(x+y) = 0$ gde je y proizvoljno, tj. $f(t) \equiv 0$. Znači, $f(t) > 0$. Neka je $a = f(1) > 0$. Stavimo zatim $f(t) = a^{\varphi(t)}$, gde je $\varphi(t) = \log_a f(t)$. Sledi, jednačina (6) dobija oblik: $a^{\varphi(x+y)} = a^{\varphi(x)} \cdot a^{\varphi(y)}$, tj. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Dobili smo jednačinu tipa (1), pa je prema primeru 397 $\varphi(x) = mx$ ili $f(x) = a^{mx}$; kako je $f(1) = a$, to je konačno $f(x) = a^x$. ►

401. Dokazati, da različita od nule i ograničena funkcija f na intervalu $]0, \varepsilon[$ koja zadovoljava (6), je eksponencijalna funkcija.

◀ Kao i u prethodnom primeru, pokazujemo da je $f(x) > 0$ i da ako za $f(1) = a$, stavimo $a^{\varphi(t)} = f(t)$, onda je $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Dalje, iz ograničenosti funkcije f na intervalu $]0, \varepsilon[$ sledi ograničenost funkcije φ na tom istom intervalu, odnosno (primer 399) linearna homogenost funkcije φ, odakle na kraju proizilazi jednakost $f(x) = a^x$. ▶

402. Dokazati, da je logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$ jedinstvena različita od nule neprekidna funkcija, koja zadovoljava jednačinu $f(xy) = f(x) + f(y)$ za sve pozitivne vrednosti x i y, gde je a pozitivna konstanta različita od 1.

◀ Neka je f proizvoljna neprekidna funkcija definisana za $x > 0$, i neka zadovoljava jednačinu $f(xy) = f(x) + f(y)$. Ako u toj jednačini stavimo $x = e^{\xi}$, gde je $\xi = \ln x$, onda je $f(x) = f(e^{\xi}) = \varphi(\xi)$, gde neprekidna funkcija φ zadovoljava jednačinu

$$\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta) \quad (-\infty < \xi, \eta < +\infty).$$

Zato (primer 397) funkcija φ je linearna homogena, tj. $\varphi(\xi) = c\xi$ ili $f(x) = c \ln x$. Pošto je $c \neq 0$ (za $c = 0$ je $f(x) \equiv 0$), to je $c \ln x = c \ln a \cdot \log_a x \equiv \log_a x$, ako je $c \ln a = 1$ ili $a = e^{\frac{1}{c}}$. Tako konačno dobijamo $f(x) = \log_a x$. ▶

403. Dokazati, da je stepena funkcija $f(x) = x^{\alpha}$, α je konstanta, jedinstvena različita od nule neprekidna funkcija koja za sve pozitivne vrednosti x i y zadovoljava jednačinu

$$f(xy) = f(x) f(y). \tag{7}$$

◀ Neka neprekidna funkcija f zadovoljava uslov (7) za svako $x, y > 0$. Uzimajući istu smenu kao u primeru 402, dobija se jednačina tipa (6):

$$\varphi(\xi + \eta) = f\left(e^{\xi + \eta}\right) = f\left(e^{\xi}\right) \cdot f(e^{\eta}) = \varphi(\xi)\varphi(\eta).$$

Pretpostavljajući da je $\varphi(\xi) \neq 0$, dobijamo $\varphi(\xi) = a^{\xi}$ $(a > 0)$ ili $f(x) = a^{\ln x} = x^{\alpha}$, gde je $\alpha = \ln a$. ▶

1.10 Zadaci za samostalni rad

Primenom metoda matematičke indukcije, dokazati sledeće nejednakosti i jednakosti:

1. $n! > n^{\frac{n}{2}}$ $(n > 2)$. **2.** $(2n-1)! < n^{2n-1}$ $(n > 1)$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$, gde su n i p prirodni brojevi.

4. Dokazati, da za proizvoljan konveksan n–tougao važi: $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, gde je D_n broj dijagonala.

5. Dokazati, da za proizvoljan konveksan poliedar važi relacija: $n + B_n - P_n = 2$, gde je n broj strana, B_n broj temena i P_n broj ivica.

Dokazati nejednakosti:

6. $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq \sqrt{n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}$.

7. $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$, $(x_i > 0; i = 1, 2, ..., n)$.

8. $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} y_i^2}$.

Naći sledeće sume:

9. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$. **10.** $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

11. $1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$. **12.** Dokazati: $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{1}{m+1} n(n+1)\cdots(n+m)$ gde je m prirodan broj.

Koristeći formulu iz prethodnog zadatka, naći sledeće sume:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$; b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$;

c) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3)$.

13. Dokazati, da je $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right)$, gde je m prirodan broj.

Polazeći od te formule naći sledeće sume:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$; b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

c) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

14. Rešiti jednačine:

a) $|x+1| + |x| + |x-1| = 6$; b) $x|x+2| - |x+1| + (x+1)|x| + 1 = 0$.

15. Pokazati, da ako brojevi $0,3; 0,33; 0,333; ...$pripadaju skupu A donjih brojeva sečenja, a brojevi $0,4; 0,34; 0,334; ...$ skupu A' gornjih brojeva, to sečenje A/A' definiše racionalan broj $\frac{1}{3}$.

Ako je α iracionalan broj, onda simbol $e(n\alpha)$ označava razlomljeni deo broja $n\alpha$, a simbol $\{(n\alpha)\}$ skup razlomljenih delova broja $n\alpha$, gde je $n = 1, 2, ...$

16. Dokazati, da je

a) $\inf\{e(n\alpha)\} = 0$; b) $\sup\{e(n\alpha)\} = 1$.

17. Naći:

a) $\inf\left\{e(n\sqrt{2}) - \left(e(n\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\right)^2\right\}$; b) $\sup\left\{e(n\sqrt{2}) - \left(e(n\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\right)^2\right\}$.

18. Naći:

a) $\inf\left\{\frac{e(n\sqrt{2})-1}{3-e(n\sqrt{3})}\right\}$; b) $\sup\left\{\frac{e(n\sqrt{2})-1}{3-e(n\sqrt{3})}\right\}$.

19. Dokazati, da je
a) $\inf\left\{e\left(n\sin^2 n\alpha\right)\right\}=0$; b) $\sup\left\{e\left(n\sin^2 n\alpha\right)\right\}=1$.
20. Dokazati, da je
a) $\inf\left\{\sin n+2\sin\left(\sqrt{2}n\right)+3\left(\sqrt{3}n\right)\right\}=-6$;
b) $\sup\left\{\sin n+2\sin\left(\sqrt{2}n\right)+3\left(\sqrt{3}n\right)\right\}=6$.

Dokazati sledeće jednakosti:

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}=1$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}=\frac{1}{m+1}$, gde je m prirodan broj.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{(n+1)^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$, gde je p prirodan broj.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)}=\frac{1}{m\cdot m!}$, gde je m prirodan broj.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^m}=1$.

27. Neka je $x_0>0$ proizvoljno, i $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$, $n\in\mathbb{N}_0$. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$.

28. Niz x_n je definisan relacijom: $x_{n+1}=px_n+q$ ($n\in\mathbb{N}$, $p\neq 0$, x_1 proizvoljno) pod kojim uslovom niz x_n konvergira i u slučaju konvergencije naći $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

29. Dokazati nejednakost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}>e$.
30. Dokazati nejednakosti:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{mn+k}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{mn+(k-1)}.$$

31. Dokazati nejednakosti:

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}<\sum_{k=0}^{n-m}(m+k)^2<\frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

gde je $0>\alpha>-1$.

Koristeći teoremu o limesu monotonih i ograničenih nizova, dokazati konvergenciju sledećih nizova:

32. $x_n=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}$.
33. $x_n=\left(1+\frac{1}{1^2+1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$.

34. Polazeći od Košijevog kriterijuma konvergencije nizova, dokazati divergenciju niza

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

35. Neka je $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$. Dokazati, da nizovi

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ i} \\ \sigma_n &= a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n} \end{aligned}$$

ili oba konvergiraju, ili oba divergiraju.

36. Dokazati, da niz

$$s_n = \frac{1}{2\ln^p 2} + \frac{1}{3\ln^p 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln^p n}$$

konvergira za $p > 1$ a divergira za $p \leq 1$.

37. Dokazati, da za proizvoljan niz a_n $(a_n > 0; n \in \mathbb{N})$ važe nejednakosti:

a)

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n};$$

b)

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Za niz x_n $(n \in \mathbb{N})$ naći $l = \varliminf_{n\to\infty} x_n$ i $L = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$:

38. $x_n = \sin n$. **39.** $x_n = \cos^2\left(n\sqrt{\pi}\right)$. **40.** $x_n = \sin^2\left(n\sqrt{2}\right) + 3\cos^2 n$.

41. $x_n = \sqrt{2}\sin\left(n\sqrt{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\sqrt{3}\right) + \sqrt{5}\sin\left(n\sqrt{5}\right)$.

42. $x_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) + \sin n$ (primer 133). **43.** $x_n = \sin\left(n\sin n\right)$.

44. $x_n = \frac{\sin n}{\pi + \cos n}$. **45.** $x_n = \sin\left(n\left(2 + \cos n\sqrt{2}\right)\right)$.

46. $x_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) \cdot \sin n + 2\sin n$.

47. Dokazati, da je u primerima 38-45 svaki broj između limesa inferiora i limesa superiora datog niza, delimična granična vrednost tog niza.

48. Dokazati, da za svaki ograničeni niz x_n i bilo koji broj $a > 0$, važi jednakost: $\varlimsup_{n\to\infty} a x_n = a \varlimsup_{n\to\infty} x_n$.

49. Naći:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+\frac{1}{k}}}{2^n - 1}.$$

Odrediti skup dopustivih realnih vrednosti u izrazima:

50. $y=\ln\prod\limits_{k=1}^{n}(x-k)$. **51.** $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-3)\cdots(x-2n+1)}{(x-2)(x-4)\cdots(x-2n)}}$

52. $y=\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\arctan x\right)\right)$.

Naći limese:

53. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}$. **54.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

55. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x-x}{\arcsin x+x}$. **56.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{\sin^2 x}$.

57. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\right)^{\frac{1}{x}}$. **58.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[m]{1+\frac{k^3}{n^4}}-1\right)$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[m]{1+\frac{k^p}{n^{p+1}}}-1\right)$ $(p\in\mathbb{N})$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k^p x}{n^{p+1}}$ $(p\in\mathbb{N})$. **61.** $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)$, $p\in\mathbb{N}$.

Naći $l=\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)$ **i** $L=\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)$, **ako je:**

62. $f(x)=\sin x+\cos\left(x\sqrt{2}\right)$. **63.** $f(x)=a^2\sin^2 x\sqrt{2}+b^2\cos^2 x\sqrt{3}$.

64. $f(x)=\sin^2 x\sqrt{2}-\left(1+\sin^2 x\right)^2$. **65.** $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\sin^2 x$.

66. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x+\sin^2 x$. **67.** $f(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{2+\sin^2 x}$.

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

68. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$. **69.** $y=\frac{2}{(3-x^2)(5-x^2)}$. **70.** $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-x+1}$.

71. $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$. **72.** $x^4+y^4=2xy$. **73.** $x^4+y^4=8xy^2$.

74. $\left(x^2+y^2\right)^3=27x^2y^2$. **75.** $x^4-y^4+xy=0$. **76.** $\rho=2+\cos 4\varphi$. **77.** $\varphi=(\rho-1)^2$.

78. $\varphi=\frac{1}{\rho^2+1}$. **79.** $\rho=\cos 5\varphi$. **80.** $x^4-y^4=x^2-2y$.

Ispitati intervale konveksnosti i konkavnosti sledećih funkcija:

81. $f(x)=\frac{1}{x}$. **82.** $f(x)=x^2$. **83.** $f(x)=\sqrt{x}$. **84.** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

85. $f(x)=e^x$. **86.** $f(x)=\ln x$. **87.** $f(x)=x^3$. **88.** $f(x)=\sin x$.

89. $f(x)=|x|$. **90.** Dokazati, da ako je funkcija f konveksna na $[a,b]$, onda se grafik funkcije f, za $x\in\,]a,b[$ ne nalazi iznad tetive koja spaja tačke sa apscisama a i b.

91. Dokazati, da ako je funkcija f konveksna na $]a,b[$, onda za proizvoljne tačke $x_1,x_2,\ldots,x_n$ iz $]a,b[$ i proizvoljne brojeve $\lambda_i\in[0,1]$ za koje je $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ važi nejednakost:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

92. Dokazati, da je funkcija f konveksna na $[a, b]$ tada i samo tada, ako je za $x > x_0 \geq a$ uspon tetive $\rho(x_0, x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ neopadajuća funkcija od x za svako fiksirano x_0.

93. Pokazati, da je ograničena funkcija f na $]a, b[$ konveksna, ako i samo ako za proizvoljan par brojeva x_0i x_1 iz $]a, b[$ $(x_0 < x_1)$ i bilo koji broj μ funkcija $f(x) + \mu x$ postiže svoj supremum na $[x_0, x_1]$ u jednoj od tačaka x_0 ili x_1.

94. Pokazati, da konveksna funkcija f na $[a, b]$ različita od konstante, ne može postizati svoj supremum u unutrašnjim tačkama intervala $]a, b[$.

95. Pokazati. da konveksna funkcija f na $]-\infty, +\infty[$ različita od konstante, nije ograničena.

96. Neka je funkcija f konveksna na $]a, +\infty[$. Dokazati, da ako postoji tačka c, tako da f strogo raste na $]c, +\infty[$, to je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

97. Neka je funkcija f konveksna na $]a, +\infty[$, pokazati da $\frac{f(x)}{x}$ ima limes (konačan ili $+\infty$), kad $x \to +\infty$.

98. Neka je funkcija $y = f(x)$ konveksna i strogo opadajuća na $[a, b]$. Pokazati, da je inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$ konveksna na $[f(a), f(b)]$.

99. Neka je interval I sadržan u $]0, +\infty[$. Pokazati, da ako je funkcija $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ konveksna na I, tada je i funkcija $x \mapsto xf(x)$ konveksna na I i obrnuto.

100. Neka su pozitivne funkcije f i g konveksne na $[a, b]$. Pretpostavimo da postoji tačka c iz $[a, b]$ takva da obe funkcije f i g na svakom od segmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ imaji isti tip konveksnosti. Pokazati, da je tada funkcija $x \mapsto f(x) g(x)$ konveksna funkcija.

101. Dokazati nejednakosti:

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x_k}} \leq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

gde je $x_i > 0$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $(i = 1, 2, ..., n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

102. Neka je **1)** $0 \leq \lambda_{nk} \leq 1$; **2)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{kn} = 1$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn} = 0$ za svako fiksirano k; **4)** $x_n > 0$ za svako $n = 1, 2, ...$; **5)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} = l$.

Dokazati da je:

103. $e^{-1}\left(1 + x^{-1}\right)^x = 1 - \frac{1}{2}x^{-1} + O\left(x^{-2}\right)$ $(x \geq 1)$.

104. $\left(x+1+O\left(x^{-1}\right)\right)^x = ex^x + O\left(x^{x-1}\right)\ (x \to \infty)$.

105. $\left(xe^{2x-2n}\right)^n = O\left(e^{x^2+x}\right)\ (x > 0)$.

106. a) $e^{o(x)} = 1+o(x)$, $x \to 0$; b) $o(f(x)\cdot g(x)) = o(f(x))\cdot O(g(x))$, $x \to 0$;

c) $o(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\cdot o(g(x))\ (x \to 0)$.

Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

107. $f(x) = \begin{cases} x-[x], & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I}; \end{cases}$ gde je $[x]$ celobrojni deo od x.

108. $f(x) = [x](x-[x])$. **109.** $f(x) = [x]\cdot\sin\pi x$. **110.** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, za $x < 0$, $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ za $x > 0$ i $f(0) = 1$.

111. $f(x) = \left(x^2-1\right)\arctan\frac{1}{x^2-1}$ $(x \neq \pm 1)$ i $f(\pm 1) = 0$.

112. Dokazati, da ako je funkcija f konveksna na $]a,b[$ to je ona neprekidna na $]a,b[$.

Odrediti tačke prekida funkcije i ispitati njihov karakter:

113. $f(x) = \arctan\frac{1}{x^2-1}$. **114.** $f(x) = \frac{1}{\tan^2 x - 2\tan x + 2}$. **115.** $f(x) = \arcsin(\sin x)\cdot\arctan\frac{1}{\sin x}$.

116. $f(x) = \ln\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$. **117.** $f(x) = \tan\frac{1}{x}$.

118. Neka je funkcija f definisana na intervalu I, i neka je $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$ za proizvoljne x, y iz I. Pokazati, da ako je f ograničena odozgo na nekom intervalu $]a,b[\subset I$, to je f konveksna na I.

119. Neka je funkcija f konveksna na intervalu I, a funkcija g konveksna i rastuća na $f(I)$. Dokazati, da je funkcija $g \circ f$ konveksna na intervalu I.

Ispitati ravnomernu neprekidnost na zadatim skupovima, sledećih funkcija:

120. $f(x) = x^2+1\ (-\infty < x < +\infty)$.

121. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$, ako je a) $1 \le x < +\infty$; b) $0 < x < 1$.

122. $f(x) = x^\alpha$, ako je a) $1 \le x < +\infty$; b) $0 < x < 1$; c) $0 \le x < +\infty$.

123. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, ako je: a) $0 \le x < +\infty$ b) $-1 < x < 0$.

1.11 Rezultati

9. $(n+1)!-1$. **10.** $\frac{1}{30}n(n+1)\left(6n^3+9n^2-1\right)$. **11.** $\frac{n^2(n+1)^2}{12}\left(2n^2+2n+1\right)$.
12. a) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; b) $\frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$; c) $\frac{1}{5}\prod\limits_{k=0}^{4}(n+k)$. **13.** a) $1-\frac{1}{n+1}$; b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$; c) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$. **14.** a) ± 2; b) $0 \le x < +\infty$. **17.** a) $-\frac{1}{9}$; b) 1. **18.** a) $-\frac{1}{3}$;b) 0. **28.** $|p| < 1$; $\frac{p}{1-q}$.**38.** $l = -1; L = 1$. **39.** $l = 0; L = 1$. **40.** $l = 0; L = 4$. **41.** $l = -\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}; L = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. **42.** $l = 0$; $L = 2$. **43.** $l = -1$; $L = 1$.

44. $l = 0$; $L = \frac{1}{\pi - 1}$. **45.** $l = -1$; $L = 1$. **46.** $l = -3$; $L = 3$. **49.** 2. **50.** ako je $n = 2k$, to je $x < 1, 2j < x < 2j + 1 (j = 1, 2, ...k - 1)$, $x > n$; ako je $n = 2k-1$ $(k > 1)$, to je $2j-1 < x < 2j (j = 1, 2, ...k-1)$, $x > n$. **51.** $x \leq 1$, $2k < x \leq 2k+1$ $(k = 1, 2, ..., n - 1)$, $x > 2n$. **52.** $1 < x < +\infty$. **53.** $\frac{313}{280}$. **54.** $\frac{2}{3}\sqrt[6]{a}$. **55.** $\frac{\alpha-1}{2}$. **56.** $\frac{\alpha^2-\beta^2}{2m}$. **57.** $\sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m}$. **58.** $\frac{1}{4m}$. **59.** $\frac{1}{m(p+1)}$. **60.** $\frac{x}{p+1}$. **61.** $e^{\frac{1}{p+1}}$. **62.** $l = -2$; $L = 2$. **63.** $l = 0$; $L = a^2 + b^2$. **64.** $l = -2$; $L = 1$. **65.** $l = 0$; $L = e$. **66.** $l = e; L = e + 1$. **67.** $l = \frac{e}{3}$; $L = \frac{e}{2}$. **81.** za $-\infty < x < 0$ funkcija je konkavna, a za $0 < x < +\infty$ funkcija je konveksna. **82.** konveksna. **83.** za $0 \leq x < +\infty$ konveksna. **84.** za $-\infty < x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$ i za $\sqrt{\frac{1}{3}} < x < +\infty$; funkcija je konveksna, a za $|x| < \sqrt{\frac{1}{3}}$ funkcija je konkavna. **85.** konveksna. **86.** konkavna. **87.** konveksna za $x > 0$, konkavna za $x < 0$. **88.** konkavna za $2k\pi < x < 2k\pi + \pi$; konveksna za $2k\pi + \pi < x < (2k + 2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **89.** konveksna. **107.** neprekidna sleva za $x = n$. **108.** $x = \pm 1, \pm 2, ...$ tačke prekida prve vrste. **109, 110, 111.**neprekidna. **113, 114, 115, 116, 117** nema tačaka prekida. **120, 121.**a) i b) ravnomerno neprekidna. **122.**a) za $\alpha \leq 1$ ravnomerno neprekidna; b) za $0 \leq \alpha$ ravnomerno neprekidna. c) ravnomerno neprekidna za $0 \leq \alpha \leq 1$. **123.** a) ravnomerno neprekidna; b) nije ravnomerno neprekidna.

Glava 2

Diferencijalni račun

2.1 Izvod funkcije

1^0 **Osnovne definicije.** Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu $]a, b[$. Razlika $\triangle\, x = x - x_0$ se naziva priraštajem argumenta x u tački $x_0 \in]a, b[$. Razlika $\triangle\, f(x_0) = f(x_0 + \triangle\, x) - f(x_0)$ se zove priraštaj funkcije f u tački x_0.

Ako postoji granična vrednost (konačna ili beskonačna)

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle\, f(x_0)}{\triangle\, x} = f'(x_0)$$

to se ona naziva izvodom (konačnim ili beskonačnim) funkcije f u tački x_0.

Granične vrednosti (konačne ili beskonačne)

$$f'_-(x_0) = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{\triangle\, f(x_0)}{\triangle\, x}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle\, f(x_0)}{\triangle\, x}$$

zovu se redom levi i desni izvod funkcije f (konačni ili beskonačni) u tački x_0. U svim tim definicijama beskonačna granična vrednost se shvata kao jedan od simbola $+\infty$ ili $-\infty$.

Ako funkcija f ima prekid prve vrste u tački x_0, to se izrazi

$$f'_-(x_0) = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{f(x_0 + \triangle\, x) - f(x_0 - 0)}{\triangle\, x},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{f(x_0 + \triangle\, x) - f(x_0 + 0)}{\triangle\, x},$$

redom zovu levi i desni uopšteni izvod funkcije f u tački x_0.

Neophodno je razumeti da u svim ovim definicijama priraštaj $\triangle\ x$ teži nuli proizvoljno. Priraštaji $\triangle\ x$ i $\triangle\ y$ mogu biti proizvoljno veliki a i proizvoljno mali.

2^0 Ako funkcije f i g imaju konačne izvode za $x\in]a,b[$ to je:
1) $(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$, α,β su konstante;
2) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;
3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x)\neq 0$.

3^0 **Izvod složene funkcije.** Ako funkcije $y=f(u)$ i $u=\varphi(x)$, imaju konačne izvode, onda je

$$y'_x=f'_u\cdot\varphi'_x.$$

4^0 **Tablični izvodi.** Ako je x nezavisno promenljiva, onda važe formule:
1) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$; 2) $(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0)$, $(e^x)'=e^x$;
3) $(\sin x)'=\cos x$; 4) $(\cos x)'=-\sin x$; 5) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;
6) $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; 7) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$; 10) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ $(a>0;\ a\neq 1)$; $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;
11) $(\sinh x)'=\cosh x$; 12) $(\cosh x)'=\sinh x$; 13) $(\tanh x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}$;
14) $(\coth x)'=-\frac{1}{\sinh^2 x}$; 15) $(arshx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 16) $(arthx)'=\frac{1}{1-x^2}$ $(|x|<1)$.

5^0 **Izvod eksponencijalno-stepene funkcije.** Ako funkcije u i v imaju konačne izvode, onda je

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)'=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right),\ u(x)>0.$$

6^0 **Rešeni zadaci.**

1. Odrediti maksimalni priraštaj $\triangle\ x$ argumenta x i odgovarajući priraštaj $\triangle\ y$ funkcije $y=\log x$ u tački $x_0=1$, ako se x menja od 1 do 1000.

◀ Očigledno,

$$\triangle\ x=1000-1=999,\quad \triangle\ y=\log 1000-\log 1=3.\ ▶$$

2. Odrediti maksimalni po apsolutnoj vrednosti priraštaj $\triangle\ x$ i odgovarajući priraštaj $\triangle\ y$ funkcije $y=\frac{1}{x^2}$ u tački $x_0=0,01$, ako se x menja od $0,01$ do $0,001$.

◀ Imamo

$$\triangle\ x=0,001-0,01=-0,009,\quad \triangle\ y=\frac{1}{(0,001)^2}-\frac{1}{(0,01)^2}=99\cdot 10^4.\ ▶$$

3. Ako je $\Delta\, x$ priraštaj promenljive x, odrediti priraštaj $\Delta\, y = \Delta\, f(x)$, ako je

a) $y = ax + b$; b) $y = ax^2 + bx + c$; c) $y = a^x$.

◀ Lako nalazimo da je :

a)

$$\Delta\, y = a(x + \Delta\, x) + b - ax - b = a \cdot \Delta\, x;$$

b)

$$\begin{aligned} \Delta\, y &= a(x + \Delta\, x)^2 + b(x + \Delta\, x) + c - ax^2 - bx - c \\ &= (2ax + b)\, \Delta\, x + a(\Delta\, x)^2; \end{aligned}$$

c)

$$\Delta\, y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right). \ ▶$$

4) Naći $f'(1)$, $f'(2)$ i $f'(3)$, ako je

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

◀ Po definiciji izvoda, imamo

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta\, x - 1)(1 + \Delta\, x - 2)^2(1 + \Delta\, x - 3)^3}{\Delta\, x} = -8; \\ f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta\, x - 1)(2 + \Delta\, x - 2)^2(2 + \Delta\, x - 3)^3}{\Delta\, x} = 0; \\ f'(3) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta\, x - 1)(3 + \Delta\, x - 2)^2(3 + \Delta\, x - 3)^3}{\Delta\, x} = 0. \ ▶ \end{aligned}$$

5. Naći $f'(1)$, ako je

$$f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

◀ Po definiciji izvoda imamo

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta\, x + \Delta\, x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{\Delta x + 1}{\Delta x + 2}} - 1}{\Delta\, x} = 1 + \frac{\pi}{4}. \ ▶$$

Sledeći primer pokazuje važnost napomene date pre tačke 2^0.

6. Dokazati da ako f ima konačan izvod i ako je n prirodan broj, to je

$$\lim_{n \to \infty} n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) = f'(x) \tag{1}$$

Obrnuto, ako za neku funkciju f postoji konačna granična vrednost (1) da li se može tvrditi da ona ima izvod u tački x?

◀ Po definiciji izvoda, postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

jednaka izvodu $f'(x)$ kad Δx proizvoljno teži nuli. Neka je $\Delta x = \frac{1}{n}$. Onda je jednakost (1) dokazana.

Obrnuto je u opštem slučaju netačno, jer podniz

$$\overline{f}_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

niza

$$f_n(x) = \xi_n\left(f\left(x + \frac{1}{\xi_n}\right) - f(x)\right) \quad (\xi_n^{-1} \to 0,\ n \to \infty)$$

može konvergirati a da niz nema graničnu vrednost. Razmotrimo Dirihleovu funkciju

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Kako je $\frac{1}{n}$ racionalan za sve prirodne brojeve n, to je

$$n\left(\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x)\right) = 0 \tag{2}$$

za proizvoljno x i za bilo koje n. Onda je

$$\lim_{n \to \infty}\left(\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x)\right) = 0.$$

Međutim funkcija χ nema izvod u tački x. Stvarno, neka je ξ_n niz iracionalnih brojeva, koji teži $+\infty$, kad $n \to \infty$. Neka je zatim x racionalan broj. Tada je $x + \frac{1}{\xi_n}$ iracionalan broj i po definiciji Dirihleove funkcije imamo

$$\chi\left(x + \frac{1}{\xi_n}\right) - \chi(x) = -1, \text{ a}$$

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n\left(\chi\left(x + \frac{1}{\xi_n}\right) - \chi(x)\right) = -\infty \tag{3}$$

Upoređujući dobijeno u (2) i (3) dolazimo do zaključka da je obrnuto tvrđenje netačno. ▶

Karakteristični primeri funkcija datih eksplicitno:

7. $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

◀ Zapisujući funkciju u obliku

$$y = (1+x)(2+x^2)^{\frac{1}{2}}(3+x^3)^{\frac{1}{3}}$$

i primenjujući pravilo nalaženja izvoda proizvoda i složene funkcije, dobijamo za $x \neq \sqrt[3]{-3}$

$$\begin{aligned} y' &= (1+x)'(2+x^2)^{\frac{1}{2}}(3+x^3)^{\frac{1}{3}} + (1+x)\left((2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'(3+x^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad +(1+x)(2+x^2)^{\frac{1}{2}}\left((3+x^3)^{\frac{1}{3}}\right)' \\ &= (2+x^2)^{\frac{1}{2}}(3+x^3)^{\frac{1}{3}} + x(1+x)(2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(3+x^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad +\frac{2x}{3}(1+x)(2+x^2)^{\frac{1}{2}}(3+x^3)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \left(6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5\right)\left(\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{(3+x^3)^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$ ▶

8. $y = \sin\left(\cos^2(\tan^3 x)\right)$.

◀ Uzimajući da je $y = \sin(u(v(x)))$, gde je $u = \cos^2 v$, $v(x) = \tan^3 x$, dobijamo

$$y' = \cos u(v(x)) \cdot u'_v \cdot v'_x; \text{ tj.}$$

$$y' = -3\cos(\cos^2(\tan^3 x)) \cdot \sin(2\tan^3 x) \cdot \tan^2 x \cdot \sec^2 x,$$

$$\text{jer je } u'_v = -\sin 2v,\ v'_x = \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}.$$ ▶

9. $y = \sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}$

◀ Primenom pravila nalaženja izvoda složene funkcije, imamo

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}\cdot\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}\cdot\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)' \\ &= \frac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^2}\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}. \end{aligned}$$ ▶

10. $y = \ln^2\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)$.

◄ Postupajući slično kao u prethodnom primeru, imamo

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3}\ln\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)\cdot\frac{1}{\sec 2^{\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{\sin 2^{\sqrt[3]{x}}}{\cos^2 2^{\sqrt[3]{x}}}\cdot 2^{\sqrt[3]{x}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot\ln 2 \\ &= \frac{\ln 2}{3}\cdot\ln\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)\tan 2^{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}. \ ► \end{aligned}$$

11. $y = x + x^x + x^{x^x}$ $(x > 0)$.

◄ Predstavimo funkciju u obliku

$$y = x + e^{x\ln x} + e^{x^x \ln x} = x + e^{x\ln x} + e^{e^{x\ln x}\cdot\ln x}.$$

Onda je

$$\begin{aligned} y' &= 1 + e^{x\ln x}(\ln x + 1) + e^{e^{x}\cdot\ln x}\left(\frac{e^{x\ln x}}{x} + e^{x\ln x}(1+\ln x)\ln x\right) \\ &= 1 + x^x(1+\ln x) + x^{x^x}\left(x^{x-1} + x^x(1+\ln x)\ln x\right). \ ► \end{aligned}$$

12. $y = \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right)^{\arctan^2 x}$.

◄ Kao i u prethodnom primeru, imamo

$$y = e^{\arctan^2 x\cdot\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}}, \text{ te je}$$

$$\begin{aligned} y' &= y\left(\frac{2\arctan x}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right. \\ &\quad + \arctan^2 x\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\cdot\frac{\sin 2x\cdot\arccos(\cos^2 x)}{\sqrt{1-\sin^4 x}\arccos^2(\cos^2 x)} \\ &\quad \left. - \arctan^2 x\cdot\frac{\arccos(\cos^2 x)}{\arcsin(\sin^2 x)}\cdot\frac{\arcsin(\sin^2 x)\cdot\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}\arccos^2(\cos^2 x)}\right) \\ &= 2y\left(\frac{\arctan x}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right. \\ &\quad \left. + \arctan^2 x\frac{\sin x\cdot sgn(\cos x)}{\arcsin(\sin x)\sqrt{1+\sin^2 x}} - \frac{\cos x\cdot sgn(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right). \ ► \end{aligned}$$

13. Naći izvod i nacrtati grafike funkcija i njenog izvoda, ako je:
a) $y = |x|$; b) $y = x|x|$; c) $y = \ln|x|$.

◀ a) Imamo da je $|x| = x sgn x$. Kako funkcija x ima izvod za sve x, a funkcija $sgn x$ ima izvod za $x \neq 0$, to je po pravilu nalaženja izvoda proizvoda za $x \neq 0$, $y' = sgn x$. Za $x = 0$, po definiciji je

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

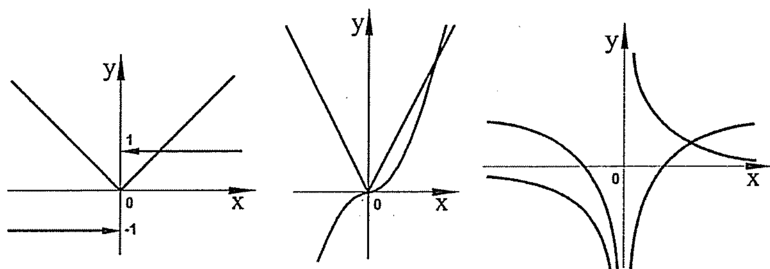
(ne postoji) zato konačno imamo $y' = sgn x$ $(x \neq 0)$.

b) Predstavljajući funkciju u obliku $y = x^2 sgn x$ i koristeći pravilo izračunavanja izvoda proizvoda, za $x \neq 0$, imamo $y' = 2x sgn x = 2|x|$ $(x \neq 0)$. Pošto je

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 sgn(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

i kako je funkcija $2|x|$ jednaka nuli za $x = 0$, to je konačno $y' = 2|x|$ za sve x.

c) Zbog $y = \ln|x| = \ln(x sgn x)$, to za $x \neq 0$ dobijamo $y' = \frac{sgn x}{|x|} = \frac{1}{x}$. U nuli funkcija nije definisana pa samim tim i nema izvod. Grafici za sva tri slučaja dati su redom na (sl.75). ▶



sl. 75

14. Naći izvode sledećih funkcija:
a) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$ b) $y = \arccos \frac{1}{|x|}$;
c) $y = |\sin^2 x|$; d) $y = [x]\sin^2 \pi x$.

◀ a) Funkcije $(x-1)^2$ i $(x+1)^3$ imaju izvod za svako x. Funkcija $sgn(x+1)$ ima izvod za $x \neq -1$. Polazeći od $y = (x-1)^2(x+1)^3 sgn(x+1)$ i koristeći pravilo za nalaženje izvoda proizvoda imamo

$$y' = (x^2-1)(x+1)(5x-1), \; x \neq -1.$$

U tački $x = -1$ razmatramo odvojeno levi i desni izvod. Po definiciji, imamo

$$f'_-(-1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|(-2+\Delta x)^2(-1+\Delta x+1)^3|}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_+(-1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|(-2+\Delta x)^2(-1+\Delta x+1)^3|}{\Delta x} = 0.$$

Znači,

$$f'_-(-1) = f'_+(-1) = y'(-1) = 0.$$

Zato konačno imamo

$$y' = (x^2 - 1)(5x - 1)|x + 1| \text{ za sve } x.$$

Slično dobijamo

b)

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{sgnx}{|x|^2}\right) = \frac{sgnx}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \ (|x| > 1);$$

c)

$$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot sgn(\sin x) = \frac{3}{2}\sin 2x \cdot |\sin x|;$$

d)

$$y' = 2\pi[x]\sin \pi x \cdot \cos \pi x = \pi[x]\sin 2\pi x,$$

gde je $x \neq k$, $k \in \mathbb{Z}$. Razmotrimo posebno $y'_-(k)$ i $y'_+(k)$. Imamo

$$y'_\pm(k) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{[k + \Delta x]\sin^2 \pi(k + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{[k + \Delta x]\pi^2(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0.$$

Pošto je

$$y'(k) = \pi[k]\sin 2\pi k = 0,$$

to je

$$y' = \pi[x]\sin 2\pi x$$

za sve x. ▶

15.

$$y = \begin{cases} 1 - x, & -\infty < x < 1; \\ (1 - x)(2 - x), & 1 \leq x \leq 2; \\ -(2 - x), & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

◀ Funkcije $1 - x$, $(1 - x)(2 - x)$, $-2 + x$ imaju izvode u odgovarajućim oblastima; zato je

$$y' = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 1; \\ 2x - 3, & 1 < x < 2; \\ 1, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

Nađimo sada levi i desni izvod u tačkama $x = 1$ i $x = 2$. Po definiciji, imamo

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1 - 1 - \Delta x}{\Delta x} = -1;$$

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(1-1-\Delta x)(2-1-\Delta x)}{\Delta x} = -1;$$

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{(1-2-\Delta x)(2-2-\Delta x)}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{-(2-2-\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

Na taj način je

$$f'_-(1) = f'_+(1) = f'(1) \text{ i } f'_-(2) = f'_+(2) = f'(2)$$

Sada izvod možemo da zapišemo u obliku

$$y' = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 1; \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2; \\ 1, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$ ▶

16.

$$y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

◀ Kao u prethodnom primeru imamo

$$y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)^2 + 2(x-b)(x-a)^2 \\ = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & a < x < b \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

U tačkama $x = a$ i $x = b$ nalazimo levi i desni izvod:

$$y'_-(a) = 0; \; y'_+(a) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(a+\Delta x - a)^2(a+\Delta x - b)^2}{\Delta x} = 0;$$

Slično nalazimo

$$y'_-(b) = y'_+(b) = 0.$$

Zato izvod zapisujemo u konačnom obliku

$$y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & a \leq x \leq b; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$ ▶

17.

$$y = \begin{cases} \arctan x, & |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} sgn x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

◀ Svaka od funkcija $\arctan x$ i $\frac{\pi}{4} sgn x + \frac{x-1}{2}$ ima izvod u odgovarajućoj oblasti $|x| < 1$ i $|x| > 1$. Zato je

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & |x| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

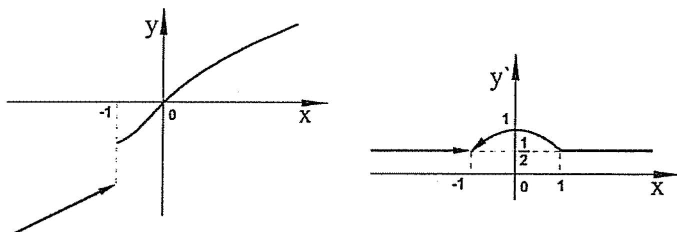
Za nalaženje izvoda u tačkama $x = \pm 1$ razmotrićemo odvojeno levi i desni iavod. Imamo

$$\begin{aligned}
y'_+(-1) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\arctan(-1 + \Delta x) + \frac{\pi}{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} a \arctan \frac{-1 + \Delta x + 1}{1 - (-1 + \Delta x)} = \\
y'_-(-1) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\frac{\pi}{4} sgn(-1 + \Delta x) + \frac{1}{2}(-1 + \Delta x - 1) + \frac{\pi}{4}}{\Delta x} = +\infty; \\
y'_+(1) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\frac{\pi}{4} sgn(1 + \Delta x) + \frac{1}{2}(1 + \Delta x - 1) - \frac{\pi}{4}}{\Delta x} = \frac{1}{2}; \\
y'_-(1) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\arctan(1 + \Delta x) - \frac{\pi}{4}}{\Delta x} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Konačno imamo

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & -1 < x \le 1; \\ \frac{1}{2}, & |x| > 1; \end{cases}$$

y' ne postoji, za $x = -1$. Grafici funkcija y i y' dati su redom na (**sl.76**).▶



sl. 76

18.

$$y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \le 1; \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$

◀ Svaka od funkcija $x^2 e^{-x^2}$ i $\frac{1}{e}$ ima izvod u odgovarajućoj oblasti $|x| < 1$ i $|x| > 1$. Zato je

$$y' = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1 - x^2), & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Nađimo jednostrane izvode u tački $x = -1$. Imamo

$$\begin{aligned} y'_-(-1) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{\Delta\, x} = 0; \\ y'_+(-1) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(-1+\Delta\, x)^2 e^{-(-1+\Delta x)^2} - e^{-1}}{\Delta\, x} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(1 - 2\Delta\, x + (\Delta\, x)^2)(1 + 2\Delta\, x - (\Delta\, x)^2 + o(\Delta\, x)) - 1}{\Delta\, x} = 0. \end{aligned}$$

Slično nalazimo da je

$$y'_-(1) = y'_+(1) = 0.$$

Konačno imamo da je

$$y' = \begin{cases} 2x(1-x^2)e^{-x^2}, & |x| \le 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$ ►

19. Neka funkcije φ i ψ imaju izvode u tački x. Naći izvod funkcije y ako je

$$y = \log_{\varphi(x)} \psi(x); \quad (\varphi(x) > 0; \psi(x) > 0).$$

◄ Najpre je

$$y = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)}; \quad (\varphi(x) \neq 1).$$

Tada uzimajući izvod količnika, dobijamo

$$y' = \frac{\psi'\psi^{-1} \ln \varphi - \varphi'\varphi^{-1} \ln \psi}{\ln^2 \varphi} = \frac{\varphi\psi' \ln \varphi - \varphi'\psi \ln \psi}{\varphi\psi \ln^2 \varphi}.$$ ►

20. Naći y', ako je

a) $y = f(x^2)$; b) $y = f(f(f(x)))$.

◄ Smatrajući da funkcija f ima konačan izvod, koristeći pravilo za nalaženje izvoda složene funkcije, imamo

a) $y' = f'(x^2) \cdot 2x$; b) $y' = f'(f(f(x))) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)$, gde crta uzeta iznad slova f znači izvod po svom argumentu. ►

21. Naći $f'(0)$, ako je

$$f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-1000).$$

◄ Po definiciji izvoda u tački $x = 0$, imamo

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\, x\, (\Delta\, x - 1)\, (\Delta\, x - 2)...(\Delta\, x - 1000)}{\Delta\, x} = 1000!$$ ►

22. Dokazati sledeće pravilo nalaženja izvoda od determinante n–tog reda:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & \dots & .. & f_{2n}(x) \\ \dots & .. & \dots & \dots. \\ f_{k1}(x) & \dots & \dots & f_{kn}(x) \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & \dots & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & \dots & .. & f_{2n}(x) \\ \dots & .. & \dots & \dots. \\ f'_{k1}(x) & \dots & \dots & f'_{kn}(x) \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & \dots & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

◀ Jednakost je posledica definicije determinante i pravila nalaženja izvoda proizvoda. ▶

23. Pokazati da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, \ x \neq 0; \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

ima prekidan izvod.

◀ Za $x \neq 0$, imamo

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

U tački $x = 0$, po definiciji izvoda, dobijamo

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta\, x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta\, x \cdot \sin \frac{1}{\Delta\, x} = 0.$$

Dakle,

$$f'(x) = \varphi(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \ x \neq 0; \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Ispitajmo sada neprekidnost funkcije φ. Za $x \neq 0$, φ je elementarna funkcija i kao takva je neprekidna u svojoj oblasti definisanosti. Zato, ostaje da se odvojeno ispita njena neprekidnost u nuli. Iz definicije neprekidnosti u tački sledi da mora biti:

$$\varphi(-0) = \varphi(+0) = \varphi(0),$$

gde je

$$\varphi(\pm 0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \left(2\, \Delta\, x \sin \frac{1}{\Delta\, x} - \cos \frac{1}{\Delta\, x} \right).$$

Pošto jednostrane granične vrednosti ne postoje ($\lim\limits_{t \to 0} \cos \frac{1}{t}$ ne postoji) to znači da funkcija φ ima u nuli prekid. ▶

24. Pod kojim uslovima je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, \ x \neq 0; \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

a) neprekidna u tački $x = 0$;
b) ima konačan izvod u 0;
c) ima neprekidan izvod u 0?

◄ a) Iz definicije neprekidnosti funkcije sledi da moraju postojati jednostrane granične vrednosti $f(-0)$ i $f(+0)$ i jednakost tri broja

$$f(-0) = f(+0) = f(0).$$

Imamo

$$f(\pm 0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} (\Delta\, x)^n \sin\frac{1}{\Delta\, x}.$$

Očigledno, dati limes postoji i jednak je nuli samo za $n > 0$. Dakle, funkcija je neprekidna u nuli za $n > 0$.

b) Za postojanje konačnog izvoda funkcije f u nuli mora biti $f'_-(0) = f'_+(0)$. Po definiciji jednostranih izvoda, imamo

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{(\Delta\, x)^n \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} (\Delta\, x)^{n-1} \sin\frac{1}{\Delta\, x}.$$

Poslednja granična vrednost, očigledno postoji samo ako je $n > 1$ i tada je jednaka nuli. Znači, data funkcija ima konačan izvod u nuli za $n > 1$.

c) Ako je $x \neq 0$, onda je

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin\frac{1}{x} - x^{n-2} \cos\frac{1}{x}.$$

Funkcija $\varphi(x) = f'(x)$ je neprekidna u nuli ako i samo ako je

$$\varphi(-0) = \varphi(+0) = \varphi(0).$$

Očigledno, da za $x \to \pm 0$ broj $\varphi(\pm 0)$ postoji ako je jedino $n - 2 > 0$ i tada je $\varphi(\pm 0) = 0$. S druge strane je $\varphi(0) = 0$ za $n > 2$. Zato je funkcija $\varphi(x) = f'(x)$ neprekidna u nuli, ako je $n > 2$, tj. tada data funkcija f ima neprekidan izvod u nuli. ►

25. Pod kojim uslovima funkcija

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin\frac{1}{|x|^m}, \ x \neq 0 \ (m > 0); \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

ima:

a) ograničen izvod u okolini koordinatnog početka;

b) neograničen izvod u toj okolini?

◀ a) U okolini koordinatnog početka za izvod funkcije imamo:

$$f'(x) = n|x|^{n-1} sgnx \cdot \sin\frac{1}{|x|^m} - m|x|^{n-m-1} sgnx \cdot \cos\frac{1}{|x|^m} \ (x \neq 0).$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|^n \sin\frac{1}{|\Delta x|^m}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(|\Delta x|^{n-1}\sin\frac{1}{|\Delta x|^m} \cdot sgn(\Delta x)\right)$$

postoji samo ako je $n > 1$ i tada je $f'(0) = 0$. Znači, $f'(x)$ postoji u okolini koordinatnog početka, kada je $n > 1$. On je tada očigledno ograničen, ako je $n - m - 1 \geq 0$, tj. za $n \geq m + 1$.

b) Izvod $f'(x)$ je neograničen u okolini nule, ako je $n-1 < 0$ ili $n-m-1 < 0$, odakle sledi $n < 1$ ili $n < m+1$, tj. dovoljno je da bude $n < m+1$. S druge strane $f'(0)$ postoji ako je $n > 1$. Dakle, konačan uslov za n je

$$1 < n < 1 + m. \ ▶$$

26. Naći $f'(a)$, ako je

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

gde je funkcija φ neprekidna u tački $x = a$.

◀ Polazeći od defincije izvoda, imamo

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \Delta x - a)\varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(a + \Delta x).$$

Poslednja granična vrednost postoji zbog neprekidnosti funkcije φ i jednaka je $\varphi(a)$. Znači, $f'(a) = \varphi(a)$. ▶

27. Pokazati da funkcija

$$f(x) = |x-a|\varphi(x),$$

gde je φ neprekidna funkcija i $\varphi(a) \neq 0$, nema izvod u tački a. Naći $f'_-(a)$ i $f'_+(a)$.

◀ Izračunajmo $f'_-(a)$ i $f'_+(a)$:

$$f'_\pm(a) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(|a + \Delta x - a|\varphi(a + \Delta x)\right) = \pm\varphi(a).$$

Pošto je $\varphi(a) \neq 0$, to funkcija f, nema izvod u tački a, jer su tada jednostrani izvodi u tački a različiti. ►

28. Navesti primer neprekidne funkcije koja nema izvod u datim tačkama: $a_1, a_2, ..., a_n$.

◄ Uzmimo funkciju

$$f(x) = |x-a_1||x-a_2|...|x-a_n|.$$

Ona je očigledno neprekidna. Međutim ona nema izvod u tačkama $a_1, a_2, ..., a_n$. Stvarno,

$$f'_{\pm}(a_i) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|a_i + \Delta x - a_1||a_i + \Delta x - a_2|...|a_i + \Delta x - a_n|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \prod_{i \neq k=1}^{n} |a_i - a_k| = \pm \prod_{i \neq k=1}^{n} |a_i - a_k|.$$

I tako je $f'_{-}(a_i) \neq f'_{+}(a_i)$, što je i trebalo pokazati. ►

29. Pokazati da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\cos \frac{\pi}{x}|, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ima izvod u nuli, ali u proizvoljnoj okolini nule postoji tačka u kojoj f nema izvod. Nacrtati grafik te funkcije.

◄ Funkcija $x \mapsto x^2$ ima izvod u svakoj tački. Funkcija $x \mapsto |\cos \frac{\pi}{x}|$ ima izvod u svakoj tački izuzev u $x = 0$ i $x = x_k = \frac{2}{2k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Zato izvod date funkcije u tačkama različitim od 0 i $\frac{2}{2k+1}$ tražimo po formuli za izvod proizvoda. U tačkama $x = 0$, $x_k = \frac{2}{2k+1}$ izvod dobijamo po definiciji: Imamo

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \left|\cos \frac{\pi}{\Delta x}\right|}{\Delta x} = 0,$$

tj. f ima izvod u nuli. Dalje je,

$$f'_{\pm}\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)^2 \left|\cos \frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}\right|}{\Delta x}$$

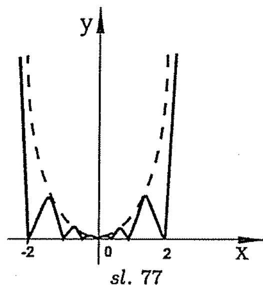
$$= \frac{4}{(2k+1)^2} \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} \left|\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2} + \left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x} - \frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right)\right|$$

$$= \frac{4}{(2k+1)^2} \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} \left|\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x} - \frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right| = \pm\pi.$$

Pošto za svako $\varepsilon > 0$ postoji takav broj k da je

$$\left|\frac{2}{2k+1}\right| < \varepsilon,$$

to se tačke gde prvi izvod ne postoji nalaze u proizvoljnoj ε—okolini koordinatnog početka. Grafik funkcije nacrtan je na (**sl.77**). ▶



sl. 77

30. Pokazati da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

ima izvod samo u tački $x = 0$.

◀ Pokažimo najpre da f ima izvod u $x = 0$. Iz definicije izvoda sledi (ako on postoji), da je

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n)}{\xi_n}, \ \xi_n \neq 0,$$

gde je ξ_n proizvoljni brojni niz, koji teži 0, kad $n \to \infty$. Ocenimo najpre modul količnika

$$\left|\frac{f(\xi_n)}{\xi_n}\right| \leq \left|\frac{\xi_n^2}{\xi_n}\right| = |\xi_n|.$$

Zbog $\lim\limits_{n\to\infty} |\xi_n| = 0$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n)}{\xi_n} = 0$. Sledi, $f'(0) = 0$. Pokažimo sada da funkcija f nema izvod ni u jednoj tački $x \neq 0$. Neka je $x = r$ racionalna tačka i $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}$ redom nizovi racionalnih i iracionalnih brojeva koji teže nuli, kad $n \to \infty$. Razmotrimo granične vrednosti α_1 i α_2 :

$$\alpha_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(r + \xi_n^{(1)}\right) - r^2}{\xi_n^{(1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(r + \xi_n^{(1)}\right)^2 - r^2}{\xi_n^{(1)}} = 2r,$$

$$\alpha_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(r + \xi_n^{(2)}\right) - r^2}{\xi_n^{(2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-r^2}{\xi_n^{(2)}} \neq 2r$$

(izvod ne postoji).

Neka je $x = s$ iracionalna tačka. Razmotrimo granične vrednosti β_1 i β_2:

$$\beta_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(s+\xi_n^{(1)}\right)}{\xi_n^{(1)}} = 0, \ \beta_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(s+\xi_n^{(2)}\right)}{\xi_n^{(2)}}.$$

Izaberimo niz racionalnih brojeva η_n, koji teži ka s; sada uzimajući umesto $\xi_n^{(2)}$ niz $\eta_n - s$, dobijamo

$$\beta_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\eta_n)}{\xi_n^{(2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n^2}{\xi_n^{(2)}} \neq \beta_1,$$

izvod ne postoji. Dakle, $f'(0) = 0$ i $f'(x)$ ne postoji za $x \neq 0$. ►

Napomena. Očigledno, funkcija je f prekidna za $x \neq 0$, pa ne može imati izvod. Međutim mi smo to ovde neposredno dokazali.

31. Ispitati da li sledeće funkcije imaju konačan izvod:

a) $y = |\pi^2 - x^2|\sin^2 x$; **b)** $y = \arcsin(\cos x)$; **c)** $y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2, & |x| \le 1; \\ |x| - 1, & |x| > 1. \end{cases}$

◄ **a)** Po pravilu nalaženja izvoda:

$$y' = -2x sgn(\pi^2 - x^2)\sin^2 x + |\pi^2 - x^2|\sin 2x \ (|x| \neq \pi).$$

Postojanje izvoda u tačkama $\pm\pi$ ispitujemo odvojeno:

$$\begin{aligned} y'_\pm(-\pi) &= \lim_{\Delta x\to\pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(|\pi^2 - (-\pi + \Delta x)^2|\sin^2(-\pi + \Delta x)|\right) = 0; \\ y'_\pm(\pi) &= \lim_{\Delta x\to\pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(|\pi^2 - (\pi + \Delta x)^2|\sin^2(\pi + \Delta x)|\right) = 0. \end{aligned}$$

Dakle,

$$y' = -2x sgn(\pi^2 - x^2)\cdot\sin^2 x + |\pi^2 - x^2|\sin 2x$$

za sve x.

b) Isto kao pod a) sledi:

$$y' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2}} = \frac{-\sin x}{|\sin x|} = -sgn(\sin x) \ (x \neq k\pi).$$

U tačkama $x = k\pi$ imamo

$$\begin{aligned} y'_\pm(k\pi) &= \lim_{\Delta x\to\pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\arcsin(\cos(k\pi + \Delta x)) - \arcsin(\cos k\pi)\right) \\ &= \lim_{\Delta x\to\pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\arcsin\left((-1)^k\cos\Delta x\right) - \arcsin(-1)^k\right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} (-1)^{k+1} \frac{\arcsin |\sin \Delta x|}{\Delta x}$$
$$= (-1)^{k+1} \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\arcsin |\sin \Delta x|}{|\sin \Delta x|} \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x}$$
$$= (-1)^{k+1} \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = \pm(-1)^{k+1}.$$

Znači u tačkama $x = k\pi$ funkcija nema izvod.

c) Funkcija očigledno ima izvod u svim tačkama x za koje je $|x| < 1$ i $|x| > 1$. Ispitajmo postojanje izvoda u tačkama $x = 1$ i $x = -1$. Imamo

$$y'_+(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|1+\Delta x| - 1}{\Delta x} = 1,$$
$$y'_-(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\frac{1}{4}(1+\Delta x - 1)(1+\Delta x + 1)^2}{\Delta x} = 1;$$

a takođe i

$$y'_+(-1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\frac{1}{4}(-1+\Delta x - 1)(-1+\Delta x + 1)^2}{\Delta x} = 0,$$
$$y'_-(-1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}(|-1+\Delta x| - 1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}(1-\Delta x - 1) = -1.$$

Sledi, u tački $x = 1$ funkcija ima izvod, a u tački $x = -1$ nema. ►

Za funkciju $f(x)$ naći levi $f'_-(x)$ i desni $f'_+(x)$ izvod, ako je :

32 $f(x) = [x] \sin \pi x$.

◄ Funkcija $\sin \pi x$ ima konačan izvod svuda. Funkcija $[x]$ nema izvod u tačkama $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Zato za $x \neq k$, po pravilu nalaženja izvoda proizvoda imamo:

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x) = \pi[x] \cos \pi x.$$

U tačkama $x = k$, po definiciji izvoda, imamo

$$f'_\pm(k) = \frac{[k+\Delta x] \sin \pi(k+\Delta x) - [k] \sin \pi k}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{[k+\Delta x](-1)^k \sin \pi \Delta x}{\Delta x} = \begin{cases} (-1)^k \pi k, \\ (-1)^k \pi (k-1). \end{cases}$$ ►

33.

$$f(x) = \begin{cases} x \left|\cos \frac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

◄ Izvod funkcije očigledno može da ne postoji jedino u tačkama gde je

$\cos\frac{\pi}{x} = 0$ i u nuli. Za $x \neq 0$ i $x \neq \frac{2}{2k+1}$, koristeći pravilo nalaženja izvoda proizvoda imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'_+(x) = f'_-(x) = \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| + \frac{\pi}{x} sgn \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| \sin\frac{\pi}{x} \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right) sgn\left(\cos\frac{\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

Izračunajmo $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)$ i $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)$. Nalazimo

$$f'_\pm\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)\left|\cos\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}\right|}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)}{\Delta x}\left|\cos\left(\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x} - \frac{\pi(2k+1)}{2}\right) + \frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right. \\ &= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)\left|\sin\frac{\pi(2k+1)^2 \Delta x}{2(2+(2k+1)\Delta x)}\right| \\ &= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0}\left|\sin\frac{\pi(2k+1)^2 \Delta x}{2(2+(2k+1)\Delta x)}\right| \\ &= \frac{2}{2k+1}\frac{\pi}{4}(2k+1)^2 \cdot (\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}(2k+1). \end{aligned}$$

U tački $x = 0$ imamo

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta x \left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0}\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|$$

ne postoji. ▶

34. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

◀ Funkcija $\sqrt{u}$ ima konačan izvod za $u > 0$, a funkcija $u = \sin x^2$ ima izvod za sve x. Sledi, ako je $\sin x^2 > 0$, onda po pravilu nalaženja izvoda proizvoda, imamo

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

Pošto je funkcija f definisana za

$$\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

to se može razmatrati samo levi izvod u tačkama $x = \sqrt{(2k+1)\pi}$ i samo desni izvod u tačkama $x = \sqrt{2k\pi}$ (u nuli postoji i levi i desni izvod). Imamo

$$f'_-\left(\sqrt{(2k+1)\pi}\right) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin\left(\sqrt{(2k+1)\pi} + \Delta x\right)^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}\sqrt{-\sin\left(2\sqrt{(2k+1)\pi} + \Delta x + (\Delta x)^2\right)} = -\infty;$$

$$f'_+\left(\sqrt{2k\pi}\right) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin\left(\sqrt{2k\pi} + \Delta x\right)^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\sin\left(2\sqrt{2k\pi}\,\Delta x + (\Delta x)^2\right) = +\infty.$$

U tački $x = 0$ je

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \pm 1. \blacktriangleright$$

35.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

◀ Za $x \neq 0$ imamo

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x) = \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} + e^{\frac{1}{x}} x^{-1} \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-2}.$$

Izračunajmo $f'_\pm(0)$:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} - f(0)\right) = \lim_{\Delta x \to +0}\left(1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}\right)^{-1} = 0;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} - f(0)\right) = \lim_{\Delta x \to -0}\left(1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}\right)^{-1} = 1. \blacktriangleright$$

36. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

◀ Funkcija $f(u) = \sqrt{u}$ ima konačan izvod za $u > 0$. Funkcija $u = 1 - e^{-x^2}$ ima izvod za sve x. Zato, ako je $x \neq 0$, funkcija $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ ima izvod i njega možemo naći kao izvod složene funkcije. I tako za $x \neq 0$ imamo

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

U tački $x = 0$ nalazimo $f'_+(0)$ i $f'_-(0)$ odvojeno.

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} \sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}}$$
$$= \pm \lim_{\Delta x \to \pm 0} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = \pm 1. \ ▶$$

37. $f(x) = |\ln |x||$ $(x \neq 0)$.

◀ Koristeći pravilo nalaženja izvoda složene funkcije, dobijamo

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x) = sgn\,(\ln |x|) \cdot \frac{1}{|x|} sgn x = \frac{1}{x} sgn\,(\ln |x|) \quad (|x| \neq 1).$$

U tačkama $x = 1$ i $x = -1$ nalazimo

$$f'_\pm(1) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} |\ln |1 + \Delta x|| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0} \left| \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} \right| = \pm 1;$$
$$f'_\pm(-1) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} |\ln |-1 + \Delta x|| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0} \left| \frac{\ln(1 - \Delta x)}{-\Delta x} \right| = \pm 1.$$

38. Pokazati da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

neprekidna u tački $x = 0$, ali u toj tački nema ni levi ni desni izvod.

◀ Zbog

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0 = f(0)$$

funkcija je po definiciji neprekidnosti u tački, neprekidna u nuli. Koristeći definiciju jednostranih izvoda imamo:

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

S obzirom da poslednja granična vrednost ne postoji, to funkcija u $x = 0$ nema jednostrane izvode. ▶

39. Naći uopštene izvode $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ u tačkama prekida funkcije f, ako je:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}$; b) $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$; c) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

◀ Nađimo najpre $f(\pm 0)$. Imamo

$$f'(\pm 0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{(\Delta\, x)^2 + (\Delta\, x)^3}}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta\, x|}{\Delta\, x} = \pm 1.$$

Po definiciji uopštenog izvoda dobijamo

$$\begin{aligned} f'_{\pm}(0) &= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{(\Delta\, x)^2 + (\Delta\, x)^3} \mp \Delta\, x}{(\Delta\, x)^2} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{(\Delta\, x)^2 + (\Delta\, x)^3} - |\Delta\, x|}{(\Delta\, x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta\, x} - 1}{|\Delta\, x|} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta\, x} - 1}{\Delta\, x} \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta\, x}{|\Delta\, x|} = \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) $x = 1$ je tačka prekida funkcije. Nađimo $f(1 \pm 0)$

$$f(1 \pm 0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \arctan \frac{1 + 1 + \Delta\, x}{1 - 1 - \Delta\, x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \arctan \frac{2}{-\Delta\, x} = \mp \frac{\pi}{2}.$$

Po definiciji uopštenog izvoda, dobijamo:

$$\begin{aligned} f'_{\pm}(1) &= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta\, x} \left(\arctan \frac{2 + \Delta\, x}{-\Delta\, x} \pm \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta\, x} \left(\arctan \frac{2}{-\Delta\, x} \pm \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta\, x} \tan \left(\arctan \frac{2}{-\Delta\, x} \pm \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta\, x} \cdot \frac{\Delta\, x}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Slično prethodnom primeru, imamo

$$f(+0) = 0; \; f(-0) = 1;$$

$$\begin{aligned} f'_{+}(0) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta\, x} \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0; \\ f'_{-}(0) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta\, x} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili graničnu vrednost $\lim\limits_{y \to \pm\infty} y e^{-|y|} = 0$. ▶

40. Može li se tvrditi da zbir $F(x) = f(x) + g(x)$ nema izvod u tački x_0, ako :

a) $f'(x_0)$ postoji a $g'(x_0)$ ne postoji;

b) $f'(x_0)$ i $g'(x_0)$ ne postoje.

◀ a) $F'(x_0)$ ne postoji, jer bi u suprotnom bilo $g'(x_0) = F'(x_0) - f'(x_0)$, tj. $g'(x_0)$ postoji.

b) U opštem slučaju ne može se tvrditi da $f(x)+g(x)$ nema izvod u tački $x = x_0$, ako oba sabirka nemaju izvod. Dovoljno je uzeti $g(x) = -f(x)$. ▶

41. Može li se tvrditi da proizvod $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ nema izvod u tački $x = x_0$, ako:

a) $f'(x_0)$ postoji a $g'(x_0)$ ne postoji;

b) $f'(x_0)$ i $g'(x_0)$ ne postoji.

◀ a) U opštem slučaju ne. Uzmimo $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

b) Takođe ne. Neka je $f(x) = g(x) = |x|$, $x_0 = 0$. ▶

42. Šta se može reći o izvodu funkcije $F(x) = f(g(x))$ u tački x_0, ako:

a) f ima izvod u tački $g(x_0)$, a funkcija g nema izvod u tački x_0;

b) f nema izvod u $g(x_0)$, a g ima izvod u x_0;

c) f nema izvod u $g(x_0)$ a g nema izvod u x_0?

◀ a) Može da ima; ako je $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$, to je $F'(x_0) = 0$.

b) Ako je $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, $x_0 = 0$, $F'(0) = 0$.

c) Za $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$, $x_0 = 0$ dobijamo $F'(0) = 1$. ▶

43. Može li funkcija u tački prekida imati konačan, tj. beskonačan izvod?

◀ Konačan izvod nema jer nije neprekidna. Uzimajući, $f(x) = sgnx$ imamo

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{sgn(\Delta x)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty; \\ f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{sgn(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty. \end{aligned}$$

Dobijamo da funkcija u tački prekida može imati beskonačan izvod. ▶

44. Ako funkcija f ima konačan izvod u ograničenom intervalu $]a, b[$ i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, da li je tada:

1) $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$; **2)** $\overline{\lim\limits_{x\to a}} |f'(x)| = +\infty$?

◀ Razmotrimo najpre drugi slučaj. Imamo,

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{x\to a}} |f'(x)| &= \overline{\lim_{x\to a}} \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot f(x) \right| \geq \overline{\lim_{x\to a}} \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \lim_{x\to a} |f(x)| \\ &= \overline{\lim_{x\to a}} \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot +\infty \end{aligned}$$

(prema zadatku 72, gl. I). Pretpostavimo da je

$$\overline{\lim_{x\to a}} \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| = 0.$$

Tada je

$$\overline{\lim_{x\to a}}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = \lim_{x\to a}|\ln|f(x)||' = 0;$$

odakle sledi da je

$$\lim_{x\to a}|\ln|f(x)||' = 0;$$

znači u okolini tačke $x = a$ funkcija $\ln|f(x)|$ je ograničena, tj. $|f(x)|$ je ograničena, što je suprotno pretpostavci u zadatku. Dakle,

$$\overline{\lim}_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| > 0,$$

odakle sleduje

$$\overline{\lim_{x\to a}}\,|f'(x)| = +\infty.$$

Sledeći primer pokazuje da prvi slučaj ne mora biti ispunjen, tj. ako je

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x},$$

onda je

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x} - 1\right) \quad (a = 0) \text{ i } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x} - 1\right)$$

ne postoji. ►

45. Ako funkcija f ima konačan izvod u ograničenom intervalu $]a, b[$ i ako je $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$, da li je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$?

◄ Uzimajući $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 0$, vidi se da je u opštem slučaju odgovor negativan. ►

46. Neka funkcija f ima konačan izvod u intervalu $]x_0, +\infty[$ i neka postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Da li odavde sledi da postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

◄ Ako je $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, $x_0 = 1$, to je

$$f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2},$$

odakle imamo da je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ ne postoji. ►

47. Neka ograničena funkcija f ima konačan izvod u intervalu $]x_0, +\infty[$ i neka postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$; sledi li odatle da postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ konačan ili beskonačan?

◀ Uzimajući $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x_0 = 1$, imamo da $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ne postoji iako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. ▶

48. Izvesti formule za sume:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \text{ i} \\ Q_n(x) &= 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}. \end{aligned}$$

◀ Vidimo da je $P_n(x)$ izvod funkcije

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \begin{cases} (x^{n+1} - x)(x-1)^{-1}, & x \neq 1; \\ n, \ x = 1, \end{cases}$$

zato je

$$P_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)' = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}, & x \neq 1; \\ f_n'(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{(1+\Delta x)^{n+1}-(1+\Delta x)-n}{\Delta x} = \frac{n(n+1)}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Dalje je, $Q_n(x) = (xP_n(x))'$. Sledi

$$Q_n(x) = \begin{cases} \left(x \cdot \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\right)', & x \neq 1; \\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{n(1+\Delta x)^{n+2}-(n+1)(1+\Delta x)^{n+1}+1+\Delta x}{(\Delta x)^2} - \frac{n(n+1)}{2}\right), & x = 1, \end{cases}$$

odakle je

$$Q_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}, & x \neq 1; \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, & x = 1. \end{cases}$$ ▶

49. Izvesti formule za sume:

a) $S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$;

b) $T_n(x) = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$.

◀ Množeći prvu jednakost sa $\sin\frac{x}{2}$, dobijamo

$$\begin{aligned} S_n \cdot \sin\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}\left(\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right). \end{aligned}$$

Odavde je

$$S_n = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad \left(\sin\frac{x}{2} \neq 0\right).$$

Uzimajući izvod od $S_n(x)$ po x, dobijamo

$$T_n(x) = S_n'(x) = \frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

ako je $x = 2k\pi$, to je očigledno $S_n = 0, T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. ►

50. Izvesti formulu za sumu:

$$S_n(x) = \cosh x + 2\cosh 2x + \cdots + n\cosh nx.$$

◄ Razmotrimo sumu

$$C_n(x) = \sinh x + \sinh 2x + \cdots + \sinh nx.$$

Množeći oba dela poslednje jednakosti sa $\sinh\frac{x}{2}$, imamo

$$\begin{aligned} C_n(x)\sinh\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}\left(\left(\cosh\frac{3x}{2} - \cosh\frac{x}{2}\right) + \left(\cosh\frac{5x}{2} - \cosh\frac{3x}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\cosh\frac{2n+1}{2}x - \cosh\frac{2n-1}{2}x\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cosh\frac{2n+1}{2}x - \cosh\frac{x}{2}\right); \end{aligned}$$

Odavde je

$$C_n(x) = \frac{\cosh\frac{2n+1}{2}x - \cosh\frac{x}{2}}{2\sinh\frac{x}{2}}, (x \neq 0),$$

$$S_n(x) = C_n'(x) = \left(n\sinh\frac{x}{2}\sinh(n+\frac{1}{2})x - \sinh^2\frac{nx}{2}\right)\left(2\sinh^2\frac{x}{2}\right)^{-1}, \quad x \neq 0.$$ ►

51. Polazeći od jednakosti

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}, \quad x \neq 2^n k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

izvesti formulu za zbir

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}.$$

◀ Primetimo da je

$$\begin{aligned} S_n(x) &= -\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\cos\frac{x}{4}\right| + \cdots + \ln\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|\right)' \\ &= -\left(\ln\left|\frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}\right|\right)', \text{ odakle je} \\ S_n(x) &= \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x. \end{aligned}$$ ▶

52. Dokazati da je izvod neparne (parne) funkcije parna (neparna) funkcija pretpostavljajući postojanje izvoda te funkcije. Dati geometrijsku interpretaciju te činjenice.

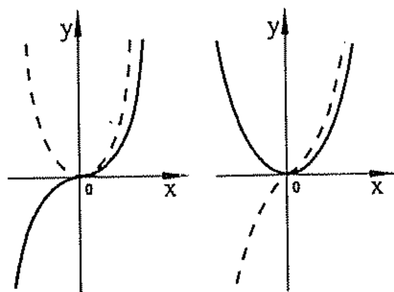
◀ Neka je f parna funkcija, koja ima konačan izvod, tj. $f(x) = f(-x)$. Po definiciji izvoda, imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x-\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x-\Delta x) - f(-x)}{-\Delta x} = -f'(-x). \end{aligned}$$

Neka je sada f neparna funkcija koja ima konačan izvod, tj. $f(x) = -f(-x)$. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(-f(-x-\Delta x) + f(-x)\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{-\Delta x}\left(f(-x-\Delta x) - f(-x)\right) = f'(-x). \end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija. Kod parne funkcije je koeficijent pravca tangente uzete u tački $(x_0, f(x_0))$ na grafik funkcije jednak po apsolutnoj vrednosti i suprotan po znaku koeficijentu pravca tangente u tački $(-x_0, f(x_0))$ (sl.78). ▶



sl. 78

53. Dokazati da je izvod periodične funkcije ako postoji, takođe periodična funkcija.

◀ Neka je $f(x) = f(x+T)$. Tada je $f'(x) = f'(x+T)$. Znači, ako je $f'(x) = \varphi(x)$, to je $\varphi(x) = \varphi(x+T)$, što je i trebalo pokazati. ▶

2.2 Diferencijal funkcije

Definicija 1. Funkcija $y = f(x)$, definisana na intervalu $]a,b[$, naziva se **diferencijabilnom** u tački $x_0 \in]a,b[$ ako se njen priraštaj $\triangle f(x_0)$, koji odgovara priraštaju $\triangle x$ argumenta x, može predstaviti u obliku

$$\triangle f(x_0) = A \triangle x + \alpha \triangle x,$$

gde je A neki broj koji ne zavisi od $\triangle x$, a α je funkcija promenljive $\triangle x$, koja je beskonačno mala kad $\triangle x \to 0$. Funkcija $y = f(x)$ je diferencijabilna u datoj tački x_0, ako i samo ako u toj tački ima konačan izvod.

Formula malih priraštaja. Za približno izračunavanje vrednosti diferencijabilne funkcije u tačkama koje su bliske tački x_0, ako je $f(x_0)$ poznato, koristi se formula:

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \triangle x, \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Definicija 2. Linearno homogeni u odnosu na $\triangle x$ deo priraštaja funkcije $y = f(x)$, uzet u tački $x_0 \in]a,b[$, naziva se **diferencijalom** date funkcije u toj tački i označava se simbolom **d**. Dakle,

$$dy(x_0) = A \triangle x = f'(x_0) \triangle x.$$

Ako je $A \neq 0$, onda on predstavlja glavni linearni deo priraštaja funkcije u tački x_0. Ako je x nezavisno promenljiva, to je $\triangle x = dx$. Tada imamo

$$dy(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Ako je $x = \varphi(t)$ diferencijabilna funkcija od t, to je $dx(t_0) = \varphi'(t_0)dt$. Sledi,

$$dy(x_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0)dt = f'_t(\varphi(t_0))\,dt,$$

tj. prvi diferencijal ima svojstvo **invarijantnosti** u odnosu na smenu promenljive.

Rešeni zadaci.

54. Za funkciju

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

odrediti:

1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$. Uporediti ih ako je: $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0,1$; $\Delta x = 0,01$.

◀ 1) Po definiciji priraštaja funkcije u tački, imamo

$$\begin{aligned} \Delta f(1) &= f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^3 - 2(1+\Delta x) + 1 \\ &= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \end{aligned}$$

2) Po definiciji diferencijala funkcije u tački, imamo

$$df(1) = f'(1)\,\Delta x = \Delta x.$$

Upoređivanje.

$$\begin{aligned} \Delta f(1) &= 5\ (\Delta x = 1);\ df(1) = 1\ (\Delta x = 1); \\ \Delta f(1) &= 0,131\ (\Delta x = 0,1);\ df(1) = 0,1\ (\Delta x = 0,1); \\ \Delta f(1) &= 0,010301\ (\Delta x = 0,01);\ df(1) = 0,01\ (\Delta x = 0,01). \end{aligned}$$ ▶

Da li je diferencijabilna funkcija $y = f(x)$ ako je:

55. $\Delta f(0) = 2\sin(\Delta x) + \left(\sqrt[3]{1+\Delta x^2} - 1\right)\ln|\Delta x|$.

◀ Pošto postoji konačan limes

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{2\sin(\Delta x) + \left(\sqrt[3]{1+\Delta x^2} - 1\right)\ln|\Delta x|}{\Delta x}\right) \\ &= 2 + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\Delta x^2} - 1}{\Delta x}\ln|\Delta x| = 2, \end{aligned}$$

to je funkcija f diferencijabilna u tački $x = 0$, i $df(0) = 2dx$. ▶

56. $\Delta f(1) = (\Delta x)^{\frac{5}{3}} + (\Delta x)^{\frac{2}{3}}$.

◀ Zbog

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^{\frac{2}{3}} + (\Delta x)^{-\frac{1}{3}}\right) = \infty,$$

to funkcija f nije diferencijabilna u tački $x = 1$. ▶

57. Naći:

a) $d(xe^x)$; b) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$.

◀ Saglasno definiciji diferencijala, imamo

a)

$$d(xe^x) = e^x(1+x)dx;$$

b)

$$\begin{aligned} d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d\left(\frac{1}{|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{d|x|}{x^2} \\ &= \frac{sgnx dx}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}} = \frac{sgnx}{|x|}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Koristili smo svojstvo invarijantnosti diferencijala. To svojstvo primenićemo i u zadacima 58-61. ▶

Naći diferencijal funkcije y (u, v, w su diferencijabilne funkcije od x), ako je:

58. $y = uvw$.

◀ Po pravilu diferenciranja proizvoda, nalazimo

$$\begin{aligned} dy &= d(uvw) = ud(vw) + vwdu = u(vdw + wdv) + vwdu \\ &= uvdw + uwdv + vwdu. \end{aligned}$$ ▶

59. $y = uv^{-2}$.

◀ Po pravilu diferenciranja razlomka, sledi

$$dy = \frac{v^2du - ud(v^2)}{v^4} = \frac{du}{v^2} - \frac{2udv}{v^3}.$$ ▶

60. $y = (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}}$.

◀ Prema pravilu diferenciranja stepene funkcije, imamo

$$\begin{aligned} dy &= d\left((u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}d(u^2+v^2) \\ &= -\frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}(d(u^2)+d(v^2)) = -\frac{udu+vdv}{\sqrt{(u^2+v^2)^3}}. \end{aligned}$$ ▶

61. $y = \arctan\frac{u}{v}$.

◀ Koristeći invarijantnost diferencijala, nalazimo

$$dy = d\left(\arctan\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\frac{vdu-udv}{v^3} = \frac{vdu-udv}{u^2+v^2}.$$ ▶

62. Naći:

a) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$; b) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; c) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$;

d) $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$; e) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

◀ a) Diferenciranjem po promenljivoj x^3, sledi

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) = \frac{d(x^3)}{d(x^3)} - 2\frac{d(x^6)}{d(x^3)} - \frac{d(x^9)}{d(x^3)} \\ &= 1 - 2\frac{d((x^3)^2)}{d(x^3)} - \frac{d((x^3)^2)}{d(x^3)} = 1 - 4x^3 - 3x^6. \end{aligned}$$

Možemo postupiti i na sledeći način:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) = \frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)} \\ &= \frac{(3x^2 - 12x^5 - 9x^8)dx}{3x^2dx} = 1 - 4x^3 - 3x^6 \end{aligned}$$

Analogno postupamo u svim ostalim slučajevima:

b)

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)} = \frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx}{2xdx} = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3};$$

c)

$$\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos x dx}{-\sin x dx} = -\cot x;$$

d)

$$\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)} = \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{-dx}{\sin^2 x}} = -\tan^2 x;$$

e)

$$\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} = \frac{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}} = -1. \text{ ▶}$$

63. Dat je kružni isečak poluprečnika $R = 100cm$ i centralnog ugla $\alpha = 60^0$. Za koliko se promeni površina tog isečka ako:

a) Poluprečnik R se poveća za $1cm$;

b) Ugao α se smanji za $30'$?

Dati tačno i približno rešenje.

◀ a) Neka je S površina kružnog isečka. Tada je

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{360}\alpha R^2, \quad \triangle S_R = \frac{\pi}{360}\alpha\left((R + \triangle R)^2 - R^2\right) \\ &= \frac{\pi\alpha}{360}(2R\triangle R + (\triangle R)^2) = 33,5\pi(cm^2) \end{aligned}$$

promena površine isečka kada se menja poluprečnik.

b) Nađimo promenu površine isečka kada se menja ugao:

$$\triangle S_\alpha = \frac{\pi}{360} R^2 \triangle \alpha, \ (\triangle \alpha = -30').$$

Tada je

$$\triangle S_\alpha = -\frac{\pi}{36} \cdot \frac{10^3}{60'} \cdot 30' = -\frac{\pi}{72} \cdot 10^3 (cm^2).$$

Približno rešenje se razlikuje od tačnog samo u prvom slučaju:

$$\triangle S_R^\star = dS = \frac{\pi\alpha}{360} \cdot 2RdR = 33\frac{1}{3}\pi(cm^2). \ ▶$$

Zamenom priraštaja diferencijalom, naći približno sledeće vrednosti:

64. $\sqrt[3]{1,02}$.

◀ Razmotrimo funkciju $y = \sqrt[3]{x}$ i nađimo njen izvod u tački $x = 1$: $y'(1) = \frac{1}{3}$. Prema formuli malih priraštaja, imamo $(\triangle x = 0,02)\sqrt[3]{1 + \triangle x} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3} \triangle x = 1,0066\ldots$ ▶

65. $\sin 29^0$.

◀ Uzmimo funkciju $y = \sin x$. Njen izvod u tački $x = \frac{\pi}{6}$ jednak je $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Onda, po formuli konačnih priraštaja, imamo $\left(\triangle x = -\frac{\pi}{180}\right)$;

$$\sin 29^0 = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{180}\right) = 0,484\ldots \ ▶$$

66. Dokazati približnu formulu

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}, \ (a > 0),$$

gde je $|x| << a^2$.

◀ Prema formuli malih priraštaja, imamo

$$\sqrt{y + \triangle y} - \sqrt{y} \approx \frac{\triangle x}{2\sqrt{y}}.$$

Neka je $y = a^2$. Tada za $\triangle x$ možemo uzeti x, jer je po uslovu zadatka $|x| << a^2$ i formula je dokazana. ▶

67. Dokazati formulu

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} - r \ (a > 0, \ x > 0),$$

gde je $0 < r < \frac{x^2}{8a^3}$.

◀ Dokaz se sastoji u tome, da pokažemo ispunjenje nejednakosti za r. Imamo,

$$\begin{aligned} r &= a + \frac{x}{2a} - \sqrt{a^2+x} = x\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+x}+a}\right) \\ &= x\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{2a\left(\sqrt{a^2+x}+a\right)} = \frac{x^2}{2a\left(\sqrt{a^2+x}+a\right)^2}. \end{aligned}$$

Odavde dobijamo nejednakost

$$0 < r = \frac{x^2}{2a\left(\sqrt{a^2+x}+a\right)^2} < \frac{x^2}{8a^3}. \ \blacktriangleright$$

68. Dokazati približnu formulu

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0),$$

gde je $|x| << a^n$. Pomoću te formule približno izračunati $\sqrt[10]{1000}$.

◀ Primetimo najpre da je

$$\sqrt[n]{a^n+x} = a\sqrt[n]{1+\frac{x}{a^n}}.$$

Uzmimo funkciju $f(y) = \sqrt[n]{y}$ i izračunajmo njen izvod u tački $y = 1$: $f'(1) = \frac{1}{n}$. Korišćenjem formule malih priraštaja, dobijamo

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}.$$

Uzimajući zatim $\Delta x = \frac{x}{a^n}$ i množeći obe strane sa a, dobijamo traženu približnu formulu. Da bismo izračunali $\sqrt[10]{1000}$ po navedenoj formuli, predstavimo broj $\sqrt[10]{1000}$ u obliku:

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10}-24}$$

i stavimo $x = -24$, $a = 2$, $n = 10$. Tada imamo

$$\sqrt[10]{1000} \approx 2 - \frac{24}{10 \cdot 2^9} = 1,9955\ldots \ \blacktriangleright$$

Napomena. Ako je a ($a \neq 0$) tačna vrednost izmerene veličine, a

x približna vrednost te veličine, to se $|\triangle a| = |x - a|$ naziva apsolutnom greškom, a $\delta_a = \frac{|\triangle a|}{|a|}$ relativnom greškom izmerene veličine.

69. Sa kolikom relativnom greškom je izmeren poluprečnik sfere, ako je zapremina sfere dobijena sa tačnošću do 0,01.

◀ Zapremina sfere je $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Neka je $|\triangle R|$ apsolutna greška izmerenog poluprečnika. Tada je

$$\triangle V = \frac{4}{3}\pi\left((R + \triangle R)^3 - R^3\right) = \frac{4}{3}\pi(3R^2 \triangle R + 3R(\triangle R)^2 + (\triangle R)^3);$$

Zbog $|\frac{\triangle V}{V}| \leq 0{,}01$, za $|\triangle R|$ dobijamo nejednakost

$$\left|\frac{3\triangle R}{R} + 3\frac{(\triangle R)^2}{R^2} + \frac{(\triangle R)^3}{R^3}\right| \leq 0{,}01.$$

Uvodeći oznaku $|\frac{\triangle V}{V}| = \delta_R$, dobijamo nejednakost

$$3\delta_R + 3\delta_R^2 + \delta_R^3 \leq 0{,}01$$

odakle, izostavljajući članove δ_R^2 i δ_R^3, sledi $\delta_R \leq 0.0033$, tj. $\delta_R \leq 0{,}33$ procenata. ▶

70. Odrediti apsolutnu grešku dekadnog logaritma broja x, $(x > 0)$ ako je relativna greška tog broja jednaka δ.

◀ Po formuli malih priraštaja, imamo

$$|\triangle \log x| = |\log(x + \triangle x) - \log x| \approx \left|\frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{\triangle x}{x}\right| = \frac{\delta}{\ln 10} \approx 0{,}43\delta. \text{ ▶}$$

71. Dokazati da se ugao iz tablice za tangense određuje tačnije, nego ugao iz tablice za sinuse, uzimajući u oba slučaja isti broj tačnih cifara.

◀ Neka je α traženi ugao, $z = \tan\alpha$ i $\beta = \sin\alpha$. Tada je $\alpha = \arctan z$ i $\alpha = \arcsin\beta$. Zamenjujući u oba slučaja granicu greške $|\triangle \alpha|$ diferencijalom, dobijamo

$$|d\alpha| = \frac{|dz|}{1 + z^2} = \cos^2\alpha|dz| \text{ i } |d\alpha| = \frac{|d\beta|}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{|d\beta|}{|\cos\alpha|}$$

Po uslovu je $|dz| = |d\alpha|$ (isti broj tačnih cifara). Zato je $|d\alpha|$ (po tablici za tangense)$\leq |d\alpha|$ (po tablici za sinuse), što je i trebalo dokazati. ▶

2.3 Izvod inverzne, parametarske i implicitne funkcije

1^0 Diferencijabilna funkcija $y = f(x)$ sa izvodom koji nema nula u intervalu $]a, b[$ ima jednoznačnu neprekidnu **inverznu** funkciju $x(y)$ koja je diferencijabilna sa izvodom

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2^0 U slučaju **parametarskog** zadavanja funkcije $y = y(x)$

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t); \; \alpha < t < \beta$$

gde su φ i ψ dovoljan broj puta diferencijabilne funkcije, izvodi se nalaze po formulama:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'} \; (\varphi' \neq 0);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)}{\varphi' dt} = \frac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{(\varphi')^3},$$

itd.

3^0 Ako je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna, i zadata **implicitno**

$$F(x, f(x)) = 0,$$

onda se njen izvod nalazi po formuli

$$\frac{d}{dx}(F(x, f(x))) = 0.$$

4^0 Rešeni zadaci.

72. Pokazati da postoji jednoznačna funkcija $y = y(x)$, definisana jednačinom

$$y^3 + 3y = x,$$

i naći njen izvod y'_x.

◀ Pretpostavimo da postoje dve realne funkcije y_1 i y_2, koje zadovoljavaju polaznu jednačinu, tj.

$$y_1^3 + 3y_1 \equiv x, \; y_2^3 + 3y_2 \equiv x;$$

odavde je

$$y_1^3 - y_2^3 + 3(y_1 - y_2) \equiv 0,$$

ili

$$(y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + 3) \equiv 0.$$

Pošto je

$$y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + 3 > 0$$

za svako x, to iz poslednje jednakosti proističe da je $y_1 \equiv y_2$.

Dakle, data jednačina ima jedinstveno realno rešenje (kubna jednačina sa realnim koeficijentima ima tri korena od kojih je jedan koren obavezno realan).

Postojanje jedinstvenog realnog rešenja možemo dokazati i pomoću izvoda x'_y :

$$x'_y = 3 + 3y^2 > 0,$$

koji nema nula, tj. funkcija $x(y)$ je monotona. Zato postoji jedinstvena monotona diferencijabilna funkcija $y(x)$ sa izvodom

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(1+y^2)}. \quad ▶$$

73. Pokazati, da postoji jednoznačna funkcija $y = y(x)$, definisana jednačinom

$$y - \varepsilon \sin y = x \ (0 \leq \varepsilon < 1),$$

i naći izvod y'_x.

◀ Analogno rešavanju prethodnog primera imamo

$$y_1 - y_2 - \varepsilon(\sin y_1 - \sin y_2) \equiv 0,$$

ili

$$y_1 - y_2 - 2\varepsilon \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \cos \frac{y_1 + y_2}{2} \equiv 0,$$

odakle sledi

$$|y_1 - y_2| = 2\varepsilon \left|\sin \frac{y_1 - y_2}{2}\right| \left|\cos \frac{y_1 + y_2}{2}\right| \leq \varepsilon\, |y_1 - y_2|.$$

Dalje je

$$|y_1 - y_2|\,(1 - \varepsilon) \leq 0;$$

pošto je $1 - \varepsilon > 0$, to je

$$|y_1 - y_2| \leq 0$$

tj.

$$y_1 \equiv y_2.$$

Nađimo izvod y'_x :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}. \ \blacktriangleright$$

74. Odrediti oblast definisanosti inverzne funkcije $x = x(y)$ i naći njen izvod, ako je

a) $y = x + \ln x$ $(x > 0)$; b) $y = \sinh x$;

c) $y = x + e^x$; d) $y = \tanh x$.

◀ a) Pretpostavimo postojanje dve inverzne funkcije $x_1(y), x_2(y)$ imamo $x_1 - x_2 = \ln \frac{x_2}{x_1}$; odakle sledi $x_1 \equiv x_2$. Za $0 < x < +\infty$ imamo $-\infty < y < +\infty$. Zatim je

$$y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x},$$

zato je

$$x'_y = \frac{x}{1+x}.$$

b) $y'_x = 1 + e^x > 0$ za sve x. Sledi, postoji jednoznačna funkcija $x(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$ sa izvodom

$$x'_y = \frac{1}{1+e^x}.$$

c) Očigledno je $-\infty < y < +\infty$; $y'_x = \cosh x > 0$ za sve x; i onda je

$$x'_y = \frac{1}{\cosh x};$$

d) $y'_x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$ za sve x; dakle, inverzna funkcija je jednoznačna i diferencijabilna:

$$x'_y = \cosh^2 x = \frac{1}{1 - \tanh^2 x} = \frac{1}{1 - y^2}, \ (|y| < 1). \ \blacktriangleright$$

75. Izdvojiti jednoznačne neprekidne grane inverzne funkcije $x = x(y)$, naći njihove izvode i nacrtati grafike, ako je

a) $y = 2x^2 - x^4$; b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; c) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

◀ a) Nađimo nule izvoda y'_x : $y'_x = 4x - 4x^3$;

$$4x - 4x^3 = 0; \ x_1 = 0, \ x_2 = \pm 1.$$

U intervalima $]-\infty, -1[$; $]-1, 0[$; $]0, 1[$; $]1, +\infty[$ izvod ima stalan znak; sledi na svakom od njih funkcija je monotona; i ima jednoznačnu granu inverzne funkcije $x = x(y)$ u intervalima $]-\infty, 1]$ i $[0, 1[$. Iz a) sledi

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1-y},$$

odakle je

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1+\sqrt{1-y}}\ (-\infty < y \leq 1); \\ x_2 &= -\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\ (-\infty < y \leq 1); \\ x_3 &= \sqrt{1-\sqrt{1-y}}\ (0 \leq y \leq 1); \\ x_4 &= -\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\ (0 \leq y \leq 1); \end{aligned}$$

b) Izvod funkcije je pozitivan za $x > 0$, negativan za $x < 0$, jednak nuli za $x = 0$; Zato postoje dve jednoznačne grane funkcije $x = x(y)$ u intervalu $0 < y < 1$. Iz b) imamo

$$x_1 = \sqrt{\frac{y}{1-y}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

c) Analogno prethodnom slučaju dobijamo

$$y'_x = -2e^{-x} + 2e^{-2x} = 0,$$

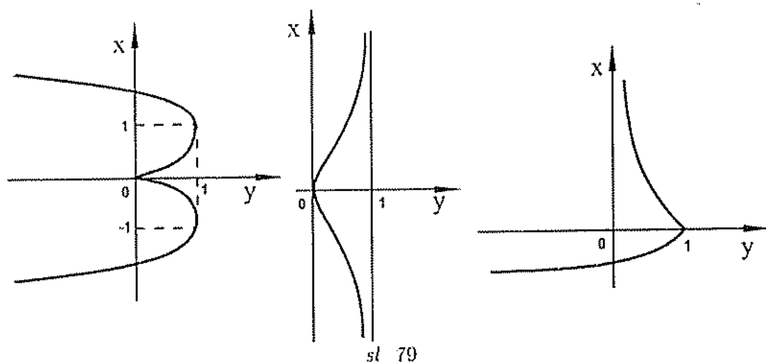
odakle je $x = 0$. Zatim je $y' < 0$ za $x > 0$ tj. $y' > 0$ za $x < 0$. Zato postoje dve jednoznačne grane u intervalima $0 < y \leq 1$ i $-\infty < y \leq 1$. Iz c) imamo

$$\begin{aligned} x_1 &= -\ln\left(1+\sqrt{1-y}\right)\ (-\infty < y \leq 1), \\ x_2 &= \ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y}\ (0 < y \leq 1). \end{aligned}$$

Izvodi imaju oblik:

a) $x'_y = \frac{1}{4x(1-x^2)}$; b) $x'_y = \frac{x^3}{2y^2}$; c) $x'_y = \frac{1}{2(e^{-2x}-e^{-x})}$.

Na (sl.79). nacrtan je grafik inverznih funkcija za sva tri slučaja.▶



sl 79

76. Pokazati da je funkcija $y = y(x)$, definisana sistemom jednačina

$$x = 2t + |t|; \ y = 5t^2 + 4t|t|,$$

diferencijabilna za $t = 0$, iako se izvod u toj tački ne može naći po običnoj formulu.

◀ Po definiciji izvoda imamo

$$y'(0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(\Delta t)^2 + 4 \Delta t| \Delta t|}{2 \Delta t + | \Delta t|} = 0.$$

Po običnoj formuli je

$$y'_t = 10t + 8|t|; \ x'_t = 2 + sgnt \ (t \neq 0),$$

tj.

$$y'_x = \frac{10t + 8|t|}{2 + sgnt},$$

za $t = 0$, izvod ne postoji. ▶

Naći izvod sledećih implicitnih funkcija:

77. $y^2 = 2px$.

◀ Neka je $y = y(x)$ diferencijabilno rešenje date jednačine. Tada, diferencirajući jednakost

$$y^2(x) \equiv 2px,$$

dobijamo

$$2yy' \equiv 2p,$$

odakle sledi

$$y' = \frac{p}{y}, \ y \neq 0. \ ▶$$

78. $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

◀ Neka je $y(x)$ diferencijabilno rešenje date jednačine. Tada diferenciranjem jednakosti

$$\arctan \frac{y}{x} \equiv \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

dobijamo

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

odakle je

$$y' = \frac{x + y}{x - y}, \ (x \neq y). \ ▶$$

79. Naći y'_x ako je:
a) $\rho = a\varphi$ (Arhimedova spirala); b) $\rho a(1+\cos\varphi)$ (kardioda);
c) $\rho = ae^{m\varphi}$ (logaritamska spirala); gde su ρ, φ polarne koordinate.

◀ a) Pošto je $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, to je

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d\rho}{dx}\cos\varphi - \rho\frac{d\varphi}{dx}\sin\varphi \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d\rho}{dx}\sin\varphi + \rho\frac{d\varphi}{dx}\cos\varphi \end{aligned}$$

odakle je

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{x+yy'}{\rho}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{xy'-y}{\rho^2}.$$

Koristeći te izvode, kao i a)-c) imamo:
a) $\frac{d\rho}{dx} = a\frac{d\varphi}{dx}$,odakle je $y'_x = \frac{\rho x + ay}{ax - \rho y} = \tan(\varphi + \arctan\varphi)$;
b) $\frac{d\rho}{dx} = -a\frac{d\varphi}{dx}\sin\varphi$, odakle je $y'_x = \frac{ay\sin\varphi - x\rho}{ax\sin\varphi + \rho y} = -\cot\frac{3\varphi}{2}$, $(\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm\frac{2\pi}{3})$;
c) $\frac{d\rho}{dx} = mae^{m\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$, odakle je

$$y'_x = \frac{my+x}{mx-y} = \begin{cases} \tan\left(\varphi + \arctan\frac{1}{m}\right), & m \neq 0; \\ -\cot\varphi, & m = 0, \ (\varphi \neq 0; \varphi \neq \pi). \end{cases}$$ ▶

2.4 Izvodi i diferencijali višeg reda

1^0 U slučaju kada je funkcija f n-puta diferencijabilna, važe formule

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \text{ i } d^n f = d\left(d^{n-1}f\right), \ n = 2, 3, \ldots$$

Ako je x nezavisno promenljiva onda je

$$d^2x = d^3x = \cdots = 0.$$

U tom slučaju je

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

2^0 **Osnovne formule:**

$$\begin{aligned} (a^x)^{(n)} &= a^x \ln^n a \ (a > 0); \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \\ (x^m)^{(n)} &= m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}; \\ (\ln x)^{(n)} &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}. \end{aligned}$$

3^0 **Lajbnicova formula.** Ako su funkcije u i v n-puta diferencijabilne, to je $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_i^n u^{(i)} v^{(n-i)}$.

4^0 **Rešeni zadaci.**

Naći y'' ako je:

80. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

◀ Uzastopnim diferenciranjem, nalazimo

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}; \\ y'' &= \left(\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - (1+2x^2)x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$ ▶

81. $y = \ln f(x)$.

◀ Uzastopnim diferenciranjem sledi

$$y' = \frac{f'}{f};\ y'' = \left(\frac{f'}{f}\right)' = \frac{f''f - f'^2}{f^2}\ (f > 0).$$ ▶

Neka su $u = \varphi(x)$ i $v = \psi(x)$ dva puta diferencijabilne funkcije. Naći y'', ako je:

82. $y = u^2$.

◀ Analogno prethodnom primeru, dobijamo:

$$y' = 2uu',\ y'' = (2uu')' = 2(u'^2 + uu'').$$ ▶

83. $y = u^v$ $(u > 0)$.

◀ Diferenciranjem stepeno-eksponencijalne funkcije, imamo

$$\begin{aligned} y' &= u^v\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right);\ y'' = \left(u^v\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)\right)' \\ &= (u^v)'\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right) + u^v\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)' \\ &= u^v\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)^2 + u^v\left(v''\ln u + \frac{v'u'}{u} + \frac{u(u'v)' - u'^2v}{u^2}\right) \\ &= u^v\left(\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)^2 + v''\ln u + \frac{uu''v + 2uu'v' - u'^2v}{u^2}\right). \end{aligned}$$ ▶

Neka je f tri puta diferencijabilna funkcija. Naći y'' i y''', ako je:

84. $y = f(x^2)$.

◀ Postupajući slično kao prilikom rešavanja prethodnih primera, imamo

$$\begin{aligned} y' &= 2xf';\ y'' = (2xf')' = 2(f' + 2x^2 f''); \\ y''' &= 2\frac{d}{dx}(f' + 2x^2 f'') = 4xf'' + 8xf'' + 8x^3 f''' \\ &= 4x(3f'' + 2x^2 f'''), \end{aligned}$$

gde crta iznad f označava izvod po argumentu x^2. ▶

85. $y = f(e^x)$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} y' &= e^x f';\ y'' = f'e^x + e^{2x} f'';\ y''' = \frac{d}{dx}(e^x f' + e^{2x} f'') \\ &= e^x f' + e^{2x} f'' + 2e^{2x} f'' + e^{3x} f''' = e^x f' + 3e^{2x} f'' + e^{3x} f''', \end{aligned}$$

gde crta iznad f označava diferenciranje po argumentu e^x. ▶

86. Naći d^2y za funkciju $y = e^x$ u dva slučaja:

a) x je nezavisno promenljiva; b) x je funkcija neke promenljive.

◀ a) Po pravilu 1^0 imamo

$$dy = d(e^x) = e^x dx,\ d^2y = d(e^x dx) = (e^x)''(dx)^2 = e^x (dx)^2.$$

b) Po definiciji diferencijala funkcije, imamo

$$dy = d(e^x) = e^x dx.$$

Diferenciranjem proizvoda $e^x dx$, dobijamo

$$d^2y = d(e^x dx) = e^x (dx)^2 + e^x d^2x. \ ▶$$

Smatrajući x nezavisno promenljivom, naći d^2y, ako je:

87. $y = \sqrt{1+x^2}$.

◀ Prema definiciji diferencijala i pravila diferenciranja razlomka, nalazimo

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}};\ d^2y = d\left(\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}(dx)^2 - x^2(dx)^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} = \frac{(dx)^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$ ▶

Neka su u i v dva puta diferencijabilne funkcije od promenljive x. Naći d^2y, ako je:

88. $y = uv$.

◀ Po pravilu diferenciranja proizvoda, imamo

$$\begin{aligned} dy &= d(uv) = udv + vdu; \; d^2y = d(udv + vdu) \\ &= dudv + ud^2v + dudv + vd^2u = ud^2v + 2dudv + vd^2u. \end{aligned}$$ ▶

89. $y = \arctan \frac{u}{v}$.

◀ Koristeći invarijantnost forme diferencijala prvog reda, sledi

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\arctan \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2} d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{u^2+v^2}; \\ d^2y &= d\left(\frac{vdu - udv}{u^2+v^2}\right) \\ &= \frac{(u^2+v^2)d(vdu - udv)}{(u^2+v^2)^2} - \frac{2(vdu - udv)(udu + vdv)}{(u^2+v^2)^2} \\ &= \frac{vd^2u - ud^2v}{u^2+v^2} - \frac{2\left(uv(du)^2 - u^2dudv + v^2dudv - uv(dv)^2\right)}{(u^2+v^2)^2}. \end{aligned}$$ ▶

Naći izvode $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}$ od funkcije $y = y(x)$, zadate parametarski, ako je:

90. $x = 2t - t^2$; $y = 3t - t^3$.

◀ Uzastopnim diferenciranjem, imamo ($t \neq 1$)

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{dy}{dx} = \frac{(3-3t^2)dt}{(2-2t)dt} = \frac{3}{2}(1+t) \; (t \neq 1); \\ y''_{x^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}(1+t)\right) = \frac{3}{2}\frac{d(1+t)}{dx} = \frac{3}{2}\frac{dt}{(2-2t)dt} = \frac{3}{4(1-t)}; \\ y'''_{x^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4(1-t)}\right) = \frac{3}{4}\frac{d\left(\frac{1}{1-t}\right)}{dx} = \frac{3}{4}\frac{\frac{dt}{(1-t)^2}}{2(1-t)dt} = \frac{3}{8(1-t)^3}. \end{aligned}$$ ▶

91. $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$.

◀ Uzastopnim diferenciranjem, dobijamo

$$y'_x = \frac{d(tf'(t) - f(t))}{d(f'(t))} = \frac{f''}{tf''} = \frac{1}{t} \; (f'' \neq 0);$$

$$y''_{x^2} = \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dx} = \frac{-t^{-2dt}}{f''dt} = -\frac{1}{t^2 f''};$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d(-t^{-2}(f'')^{-1}}{dx} = -\frac{d(t^{-2}(f'')^{-1})}{f''dt} = \frac{2tf'' + t^2 f'''}{t^4(f'')^3}. \ ▶$$

92. Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna dovoljan broj puta. Naći izvode x', x'', x''', inverzne funkcije $x = f^{-1}(y)$, pretpostavljajući da ti izvodi postoje.

◀ Prema formuli za nalaženje izvoda inverzne funikcije kao i pravila za nalaženje viših izvoda, imamo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'}; \ \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{1}{f'}\right)}{dy} = \frac{-\frac{f''}{(f')^2}dx}{f'dx} = -\frac{f''}{(f')^3};$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{d\left(\frac{f''}{(f')^3}\right)}{dy} = \frac{\frac{f'''(f')^3 - 3(f')^2(f'')^2}{(f')^6}}{f'dx} = \frac{3(f'')^2 - f'f'''}{(f')^5} \ (f' \neq 0). \ ▶$$

Naći y'_x, y''_{x^2} i y'''_{x^3} funkcija koje su zadate implicitno:

93. $x^2 + y^2 = 25$.

◀ Neka je $y(x)$ tri-puta diferencijabilno rešenje date jednačine. Onda, diferenciranjem jednakosti

$$x^2 + y^2(x) = 25$$

po x, dobijamo

$$2x + 2yy' \equiv 0, \text{ tj. } y' = -\frac{x}{y}.$$

Koristeći zatim pravilo nalaženja viših izvoda, dobijamo

$$y'' = \frac{-d\left(\frac{x}{y}\right)}{dx} = -\frac{y - xy'}{y^2} = \frac{-y + x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3};$$

$$y''' = \left(-\frac{25}{y^3}\right)' = \frac{75}{y^4}y' = -\frac{75x}{y^5} \ (y \neq 0). \ ▶$$

94. Neka je funkcija f definisana i dva puta diferencijabilna za $x \leq x_0$. Kako treba odabrati koeficijente a, b i c da bi funkcija

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \ x \leq x_0; \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, \ x > x_0, \end{cases}$$

bila dva puta diferencijabilna?

◀ Za postojanje prvog izvoda u tački $x = x_0$ potrebna je i dovoljna jednakost jednostranih izvoda u tački x_0 neprekidnosti funkcije F. Zato imamo:

a) $f(x_0) = c$ (neprekidnost funkcije F);
b) $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) = b$ tj. $F'(x_0) = b$ (postojanje prvog izvoda $F'(x_0)$).

Dalje mora važiti

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{F'(x_0 + \Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{F'(x_0 + \Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x},$$

$$\text{tj.} \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f'_-(x_0 + \Delta x) - f'_-(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{2a\,\Delta x + b - b}{\Delta x} = 2a,$$

(postojanje drugog izvoda $F''(x_0)$). Dakle, $c = f(x_0)$, $b = f'_-(x_0)$, $a = \frac{1}{2} f''_-(x_0)$. ▶

Naći izvode navedenog reda:

95. $y = ax^{-m}$. Naći y'''.

◀ Uzastopnim diferenciranjem, imamo

$$y' = -amx^{-m-1}; \; y'' = -am(x^{-m-1})' = am(m+1)x^{-(m+2)};$$

$$y''' = am(m+1)(x^{-(m+2)})' = -am(m+1)(m+2)x^{-(m+3)}. \; ▶$$

96. $y = \frac{x^2}{1-x}$. Naći $y^{(8)}$.

◀ Dodavanjem i oduzimanjem jedinice brojiocu, imamo

$$y = -(x+1) + \frac{1}{1-x} = -(1+x) + (1-x)^{-1}.$$

Očigledno je

$$y^{(8)} = \left((1-x)^{-1}\right)^{(8)} = 8!(1-x)^{-9} \; (x \neq 1). \; ▶$$

97. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Naći $y^{(100)}$.

◀ Transformisaćemo datu funkciju na oblik pogodan za diferenciranje:

$$y = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

Sada je

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= \frac{(199)!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + \frac{(197)!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}} \\ &= \frac{(197)!!}{2^{100}} \cdot \frac{399-x}{(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} \; (x < 1). \; ▶ \end{aligned}$$

98. $y = x^2 e^{2x}$. Naći $y^{(20)}$.

◀ Ovde se može primeniti Lajbnicovo pravilo. Uzimajući $u = x^2, v = e^{2x}$ i koristeći da je $u' = 2x, u'' = 2, u^{(k)} = 0$ za $k \geq 3$, zatim $v' = 2e^{2x}, v'' = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}, \dots, v^{(20)} = 2^{20} e^{2x}$, imamo:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 e^x\right)^{(20)} &= u^{(0)} v^{(20)} + C_1^{20} u' v^{(19)} + C_2^{20} u'' v^{(18)} \\
&= x^2 \cdot 2^{20} e^{2x} + 20 \cdot 2x \cdot 2^{19} e^{2x} + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 2 \cdot 2^{18} \cdot e^{2x} \\
&= 2^{20}\left(x^2 + 20x + 95\right) e^{2x}. \ ▶
\end{aligned}$$

99. $y = \frac{e^x}{x}$. Naći $y^{(10)}$.

◀ Kao i u prethodnom primeru primenićemo Lajbnicovo pravilo, uzimajući da je $u = \frac{1}{x}$, $v = e^x$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x}{x}\right)^{(10)} &= \frac{e^x}{x} - C_1^{10}\frac{e^x}{x^2} + 2C_2^{10}\frac{e^x}{x^3} - 2 \cdot 3C_3^{10}\frac{e^x}{x^4} \\
&\quad +2 \cdot 3 \cdot 4C_4^{10}\frac{e^x}{x^5} - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5C_5^{10}\frac{e^x}{x^6} \\
&\quad +6!C_6^{10}\frac{e^x}{x^7} - 7!C_7^{10}\frac{e^x}{x^8} + 8!C_8^{10}\frac{e^x}{x^9} - 9!C_9^{10}\frac{e^x}{x^{10}} \\
+10!\frac{e^x}{x^{11}} &= e^x \sum_{n=0}^{10} (-1)^n C_n^{10} \frac{n!}{x^{n+1}}. \ ▶
\end{aligned}$$

100. $y = x \sinh x$. Naći $y^{(100)}$.

◀ Prema Lajbnicovoj formuli, nalazimo

$$y^{(100)} = x \sinh x + C_1^{100} \cosh x = x \sinh x + 100 \cosh x. \ ▶$$

Naći diferencijal navedenog reda, smatrajući x nezavisno promenljivom:

101. $y = x^5$. Naći $d^5 y$.

◀ Po formuli 1^0 imamo

$$dy = 5x^4 dx;\ d^2 y = 20x^3 (dx)^2; \dots;\ d^5 y = 5!(dx)^5. \ ▶$$

102. $y = x \cos 2x$. Naći $d^{10} y$.

◀ Iz Lajbnicove formule, sleduje

$$\begin{aligned}
d^{10} y &= \left(-x \cdot 2^{10} \cos 2x - C_1^{10} \cdot 2^9 \sin 2x\right)(dx)^{10} \\
&= -2^{10}(x \cos 2x + 5 \sin 2x)(dx)^{10}. \ ▶
\end{aligned}$$

Naći diferencijal navedenog reda, ako je u funkcija od x, diferencijabilna dovoljan broj puta.

103. $y = u^2$. Naći $d^{10}y$.

◄ Primenom Lajbnicove formule na proizvod $u \cdot u$ imamo

$$\begin{aligned} d^{10}y &= \sum_{i=0}^{10} C_i^{10} d^i u \cdot d^{10-i}u = 2\sum_{i=0}^{4} C_i^{10} d^i u \cdot d^{10-i}u + C_5^{10}(d^5u)^2 \\ &= 2ud^{10}u + 20dud^9u + 90d^2ud^8u + 240d^3ud^7u \\ &\quad +420d^4ud^6u + 252(d^5u)^2. \end{aligned}$$ ►

104. $y = \ln u$. Naći d^3u.

◄ Uzastopnim diferenciranjem nalazimo

$$\begin{aligned} dy &= \frac{du}{u}; \; d^2y = \frac{ud^2u - (du)^2}{u^2}; \\ d^3y &= \frac{u^2 d(ud^2u - (du)^2) - 2udu(ud^2u - (du)^2)}{u^4} \\ &= \frac{1}{u^3}\left(u(dud^2u + ud^3u - 2dud^2u) - 2udud^2u + 2(du)^3\right) \\ &= u^{-3}(u^2d^3u - 3udud^2u + 2(du)^3). \end{aligned}$$ ►

105. Naći d^2y, d^3y i d^4y od funkcije $y = f(x)$, smatrajući da je x funkcija neke nezavisno promenljive.

◄ Polazeći od definicije diferencijala višeg reda, dobijamo

$$\begin{aligned} dy &= f'dx; \; d^2y = d(f'dx) = f''(dx)^2 + f'd^2x; \; d^3y = d(f''(dx)^2 + f'd^2x) \\ &= f'''(dx)^3 + 2f''dxd^2x + f''dxd^{2x} + f'd^3x = f'''(dx)^3 + 3d^2xdxf'' + f'd^3x; \\ d^4y &= f^{(4)}(dx)^4 + f'''3(dx)^2d^2x + 3d^3xdxf'' \\ &\quad +3(d^2x)^2f'' + 3d^2x(dx)^2f''' + f''dxd^3x + f'd^4x \\ &= f^{(4)}(dx)^4 + 6f'''(dx)^2d^2x + 4d^3xdxf'' + 3(d^2x)^2f'' + f'd^4x. \end{aligned}$$ ►

106. Izraziti izvode y' i y'' od funkcije $y = f(x)$ preko uzastopnih diferencijala promenljivih x, y ne pretpostavljajući da je x nezavisno promenljiva.

◄ Prema definiciji diferencijala, a takođe i prema pravilu diferenciranja proizvoda, imamo

$$\begin{aligned} dy &= f'dx, && (1) \\ d^2y &= f''(dx)^2 + f'd^2x, && (2) \\ d^3y &= f'''(dx)^3 + 3d^2xdxf'' + f'd^3x. && (3) \end{aligned}$$

Iz (1), (2) i (3) imamo redom

$$\begin{aligned} y' &= f' = \frac{dy}{dx}; \\ y'' &= f'' = \frac{d^2y - y'd^2x}{(dx)^2} = \frac{dx^2y - dyd^2x}{(dx)^3}; \\ y''' &= f''' = \frac{d^3y - 3d^2xdx\frac{d^2y - y'd^2x}{(dx)^2} - \frac{dy}{dx}d^3x}{(dx)^3} \\ &= \frac{1}{(dx)^5}\left((dx)^2d^3y - 3d^2xdxd^2y + 3(d^2x)^2dy - dxdyd^3x\right). \end{aligned}$$ ▶

107. Pokazati da funkcija

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, zadovoljava jednačinu

$$y'' + y = 0.$$

◀ Uzimanjem drugog izvoda sledi

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x \equiv -y.$$ ▶

108. Dokazati, da ako funkcija f ima izvod n-tog reda, to je

$$(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

◀ Primenićemo metod matematičke indukcije. Očigledno imamo

$$(f(ax+b))' = af'(ax+b),$$

gde crta kod funkcije f označava izvod po argumentu $(ax+b)$. Neka je tačna jednakost

$$(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b). \qquad (1)$$

Treba dokazati da je

$$(f(ax+b))^{(n+1)} = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b). \qquad (2)$$

Diferencirajući (1) po x dobijamo (2), što je i trebalo dokazati. ▶

109. Naći $P^{(n)}(x)$, ako je

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

◀ Uzastopnim diferenciranjem sledi

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1};$$

$$P''(x) = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + a_{n-2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)a_0x^{n-k} + (n-1)(n-2)\ldots(n-k)a_1x^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k};$$

Uzimajući $k = n$ dobijamo $P^{(n)}(x) = n!a_0$. ▶

Naći $y^{(n)}$, ako je:

110. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

◀ Transformišimo funkciju na oblik pogodan za diferenciranje. Imamo

$$y = \frac{a}{c} + \left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c}\left(b - \frac{ad}{c}\right)\left(x + \frac{d}{c}\right)^{-1} \quad (c \neq 0).$$

Sada bez teškoća, sledi

$$y^{(n)} = \frac{1}{c}\left(b - \frac{ad}{c}\right)(-1)^n\left(x + \frac{d}{c}\right)^{-n-1} n!, \; n \geq 1. \;\blacktriangleright$$

111. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

◀ Jedinicu iz brojioca predstavimo u obliku

$$1 \equiv (x-1) - (x-2)$$

i rastavimo kvadratni trinom iz imenioca kao

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2);$$

imamo

$$y = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Diferenciranjem y n-puta sledi

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \;\blacktriangleright$$

112. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

◀ Zapišimo funkciju u obliku

$$y = (1+x)^{-\frac{1}{3}}x.$$

Izvod reda k funkcije

$$y_1(x) = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$$

jednak je

$$y_1^{(k)} = (-1)^k \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\dots\left(\frac{1}{3}+k-1\right)(1+x)^{-\frac{1}{3}-k} \tag{1}$$

Izvod funkcije $y(x)$ dobijamo prema Lajbnicovoj formulu i na osnovu (1) uzimajući $k=n$ i $k=n-1$:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= y_1^{(n)}x + ny_1^{(n-1)} \\ &= (-1)^n \frac{1\cdot 4\dots(3n-2)}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}}x + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\dots(3n-5)n}{3^{n-1}(1+x)^{\frac{1}{3}+(n-1)}} \\ &= (-1)^n \frac{1\cdot 4\dots(3n-5)}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}}\left((3n-2)x - 3n(1+x)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\dots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}}. \end{aligned}$$ ►

113. $y = \sin^2 x$

◄ Predstavimo y u obliku

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

koristeći formulu 2^0, nalazimo

$$y^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right),\ n \geq 1.$$ ►

114. $y = \sin^3 x$.

◄ Na osnovu formule

$$y = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

i prema 2^0 dobijamo

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}3^n\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right).$$ ►

115. $y = \sin ax \sin bx$.

◀ Predstavimo y u obliku

$$y = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)$$

i primenom formule 2^0 nalazimo

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2}\Big((a-b)^n \cos\left((a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &\quad -(a+b)^n \cos\left((a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right)\Big). \end{aligned}$$ ▶

116. $y = \sin^2 ax \cos bx.$

◀ Imamo

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-\cos 2ax}{2}\cos bx \\ &= \frac{\cos bx}{2} - \frac{1}{4}\left(\cos(2a+b)x + \cos(2a-b)x\right), \end{aligned}$$

na osnovu koje je

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{b^n}{2}\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\Big((2a+b)^n \cos\left((2a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &\quad +(2a-b)^n \cos\left((2a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right)\Big). \end{aligned}$$ ▶

117. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

◀ Transformacijom imamo

$$y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x,$$

odakle je

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right), \ n \geq 1.$$ ▶

118. $y = x\cos ax.$

◀ Po Lajbnicovoj formuli sledi

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= xa^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + C_1^n a^{n-1}\cos\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &= xa^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + na^{n-1}\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$ ▶

119. $y = x^2 \sin ax.$

◀ Po Lajbnicovoj formulu se dobija

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= x^2a^n \sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+2xC_1^n a^{n-1}\sin\left(ax+\frac{n-1}{2}\pi\right)\\ &\quad +2C_2^n a^{n-2}\sin\left(ax+\frac{n-2}{2}\pi\right)\\ &= x^2a^n\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)-2xna^{n-1}\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)\\ &\quad -(n-1)na^{n-2}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$ ▶

120. $y = e^x \cos x$.
◀ Predstavljajući $\cos x$ po **Ojlerovoj formuli**, dobijamo

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}\right),$$

odakle je

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2}\left((1+i)^n e^{(1+i)x}+(1-i)^n e^{(1-i)x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}\right)^n e^{x+i(x+\frac{n\pi}{4})}+\left(\sqrt{2}\right)^n e^{x-i(x+\frac{n\pi}{4})}\right)=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right). \end{aligned}$$ ▶

121. $y = \ln\frac{a+bx}{a-bx}$.
◀ Uzimanjem izvoda imamo

$$y' = \frac{2ab}{(a+bx)(a-bx)} = \left(\frac{a}{b}+x\right)^{-1}+\left(\frac{a}{b}-x\right)^{-1}.$$

Diferenciranjem $n-1$ puta sledi

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{a}{b}+x\right)^{-n}+(n-1)!\left(\frac{a}{b}-x\right)^{-n}\\ &= (n-1)!b^n\left(\frac{1}{(a-bx)^n}+\frac{(-1)^n}{(a+bx)^n}\right)\\ &= \frac{(n-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}\left((a+bx)^n+(-1)^n(a-bx)^n\right). \end{aligned}$$ ▶

122. $y = e^{ax}P(x)$, gde je $P(x)$ polinom.
◀ Prema Lajbnicovoj formuli sledi

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(e^{ax}\right)^{(n-k)}\left(P(x)\right)^{(k)} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m} C_k^n a^{n-k}\left(P(x)\right)^{(k)} e^{ax}, & n \ge m;\\ \sum\limits_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k}\left(P(x)\right)^{(k)} e^{ax}, & n < m \end{cases}$$

gde je m stepen polinoma. ▶

Naći $d^n y$, ako je:

123. $y = x^n e^x$

◀ Po Lajbnicovoj formuli dobijamo

$$\begin{aligned} d^n y &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n d^k(x^n) d^{(n-k)}(e^x) \\ &= e^x \sum_{k=0}^{n} C_k^n (dx)^{n-k} n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1) x^{n-k} (dx)^k \\ &= e^x (dx)^n \sum_{k=0}^{n} (C_k^n)^2 k! x^{n-k} \end{aligned}$$ ▶

124 Dokazati jednakosti:

1)
$$(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi);$$

2)
$$(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi),$$

gde je
$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ i } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◀ Množenjem leve strane prve jednakosti sa i a zatim sabiranjem sa levom stranom druge jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} Y^{(n)} &= (e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)} + (ie^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = e^{ic}(e^{(a+bi)})^{(n)} = e^{ic}(a+bi)^n e^{(a+ib)x} \\ &= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{(a+ib)x+ic+ni\varphi} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\left(\cos(bx+c+n\varphi) + i\sin(bx+c+n\varphi)\right) \\ &= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos(bx+c+n\varphi) + i(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi). \end{aligned}$$

Koristeći definiciju jednakosti dva kompleksna broja dobijamo tvrđenje u zadatku ▶

125. Naći $y_j^{(n)}$ $(j = 1, 2)$, ako je

a)
$$y_1 = \cosh ax \cos bx;$$

b)
$$y_2 = \cosh ax \sin bx$$

◀ Množenjem funkcije y_2 sa imaginarnom jedinicom i a zatim sabiranjem sa prvom funkcijom dobijamo

$$z(x) = y_1 + iy_2 = \frac{1}{2}\left(e^{(a+ib)x} + e^{-(a-ib)x}\right).$$

Diferenciranjem $n-$puta kompleksno vrednosnu funkciju z, nalazimo

$$z^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left((a+ib)^n e^{(a+ib)x} + (-1)^n (a-bi)^n e^{-(a-bi)x}\right). \quad (1)$$

Zapisujući

$$a + ib = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\varphi}, \; a - ib = \sqrt{a^2+b^2}e^{-i\varphi}, (-1)^n = e^{in\pi},$$

gde je

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \; \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

i zamenjujući u (1), dobijamo

$$z^{(n)}(x) = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}{2}\left(e^{ax}e^{i(n\varphi+bx)} + e^{-ax}e^{i(bx-n\varphi+n\pi)}\right). \quad (2)$$

Zamenjujući u (2)

$$e^{ax} = \cosh ax + \sinh ax, \; e^{-ax} = \cosh ax - \sinh ax,$$

i koristeći Ojlerovu formulu dobijamo

$$\begin{aligned} z^{(n)}(x) \;=\; & (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \cosh ax \cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\left(\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right. \\ & \left. + i\sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right) \\ & -(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \sinh ax \sin\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\left(\sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right. \\ & \left. - i\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right); \end{aligned}$$

Razdvajajući realni i imaginarni deo dobijenog izraza, konačno dobijamo

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} \;=\; & (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \cosh ax \cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) \\ & -(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \sinh ax \sin\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_2^{(n)} &= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \cosh ax \cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) + \\
&+ (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \sinh ax \sin\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right). \ ►
\end{aligned}
$$

126. Transformacijom funkcije $f(x) = \sin^{2p} x$, gde je p prirodan broj, u trigonometrijski polinom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos 2kx,$$

naći $f^{(n)}(x)$.

◄ Prema Ojlerovoj formuli sledi

$$
\begin{aligned}
\sin^{2p} x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_k^{2p} e^{ikx} e^{-i(2p-k)x} \\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_k^{2p} e^{2i(k-p)x} + \sum_{k=p+1}^{2p} (-1)^k C_k^{2p} e^{2i(k-p)x} \right) + \frac{C_p^{2p}}{2^{2p}}.
\end{aligned}
$$

U drugom sabirku koji stoji u zagradi uvedimo novi indeks sumiranja k', stavljajući $k = 2p - k'$. Pri tom koristeći poznatu formulu $C_k^{2p} = C_{2p-k}^{2p}$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\sin^{2p} x &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_k^{2p} e^{2i(k-p)x} + \sum_{k'=0}^{p-1} (-1)^{k'} C_{2p-k'}^{2p} e^{2i(p-k')x} \right) + \frac{C_p^{2p}}{2^{2p}} \\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_k^{2p} \left(e^{2i(k-p)x} + e^{-2i(k-p)x} \right) + \frac{C_p^{2p}}{2^{2p}} \\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_k^{2p} \cos 2(k-p)x + \frac{C_p^{2p}}{2^{2p}}.
\end{aligned}
$$

Uzimajući n-ti izvod od dobijenog izraza, nalazimo

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_k^{2p} 2^n (k-p)^n \cos\left(2(k-p)x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+p} C_k^{2p} 2^{n-2p+1} (k-p)^n \cos\left(2(k-p)x + \frac{n\pi}{2}\right). \ ►
\end{aligned}
$$

127. Naći $f^{(n)}(x)$, ako je:

a) $f(x)=\cos^{2p}x$; b) $f(x)=\sin^{2p+1}x$; c) $f(x)=\cos^{2p+1}x$, gde je p ceo pozitivan broj (kao u prehodnom primeru).

◀ a) Uzimajući

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),$$

dobijamo rasuđivanjem kao u prethodnom primeru:

$$\cos^{2p}x=\frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}C_k^{2p}\cos 2(k-p)x+\frac{C_p^{2p}}{2^{2p}}.$$

Diferenciranjem član po član n–puta dati izraz imamo

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}C_k^{2p}2^{n-2p+1}(k-p)^n\cos\left(2(k-p)x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Za nalaženje izvoda n-tog reda u slučajevima b) i c) možemo funkcije predstaviti u obliku

$$\sin^{2p+1}x=\sin^{2p}x\sin x,\quad \cos^{2p+1}x=\cos^{2p}x\cos x$$

i koristiti rezultate prethodna dva primera. Za oba slučaja navodimo samo rezultate:

b)

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}C_k^{2p+1}\sin\left((2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

c)

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}C^{2p+1k}\cos\left((2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right).$$ ▶

128. Koristeći jednakost

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

dokazati, da je

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left((n+1)\arctan x\right).$$

◀ Najpre nađemo n–ti izvod, a zatim prema trigonometrijskom zapisu kompleksnog broja i Moavrovoj formuli sledi

$$\begin{aligned}
Y^{(n)} &= \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2i}\left(\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+i}\right)^{(n)}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2i}(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\left(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi\right) \\
&\quad -\frac{(-1)^n n!}{2i}(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\left(\cos(n+1)\varphi - i\sin(n+1)\varphi\right) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2i}(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sin(n+1)\varphi, \\
\varphi &= \arg(x+i) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \operatorname{arccot} x,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ▶

Naći $f^{(n)}(0)$, ako je:

129. a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; **b)** $f(x) = \arctan x$; **c)** $f(x) = \arcsin x$.

◀ a) Po Lajbnicovoj formuli dobijamo da je

$$f^{(n)}(x) = x^2 a^n e^{ax} + C_1^n 2x a^{n-1} e^{ax} + 2C_2^n a^{n-2} e^{ax},$$

odakle sledi

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2}.$$

b) Neposrednim diferenciranjem se teže dolazi do rezultata, zato postupamo na sledeći način. Diferencirajući f dva puta, dobijamo

$$f' = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2xf'}{1+x^2},$$

odakle sledi

$$(1+x^2)f'' + 2xf' \equiv 0.$$

Primenjujući dalje Lajbnicovu formulu na svaki sabirak posebno (nađemo izvod reda $n-2$) imamo

$$(1+x^2)f^{(n)} + 2(n-2)xf^{(n-1)} + (n-2)(n-3)f^{(n-2)} + 2xf^{(n-1)} + 2(n-2)f^{(n-2)} \equiv 0,$$

odakle za $x = 0$ nalazimo

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

Ako je $n = 2k$ imamo $f^{(2k)}(0) = 0$. U slučaju da je $n = 2k + 1$ dobijamo

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!, \ (k \in \mathbb{N}_0)$$

c) Primenjujući isti metod kao u prethodnom primeru, dolazimo do jednakosti

$$(1 - x^2)f'' - xf' \equiv 0,$$

iz koje diferenciranjem $n - 2$ puta po Lajbnicovoj formuli sledi:

$$(1-x^2)f^{(n)}+C_1^{n-2}(-2x)f^{(n-1)}-(n-2)(n-3)f^{(n-2)}-xf^{(n-1)}-C_1^{n-2}f^{(n-2)} \equiv 0,$$

odakle za $x = 0$ nalazimo

$$f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0).$$

Uzimajući redom $n = 2, 3, ..$u poslednjoj jednakosti i vodeći računa da je $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$, nalazimo da je

$$f^{(2k)}(0) = 0, \ f^{(2k+1)}(0) = ((2k-1)!!)^2, \ k \in \mathbb{N}. \ \blacktriangleright$$

130. a) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$; b) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

◀ Diferenciranjem $f(x)$ i kvadriranjem obe strane tako dobijene jednakosti, a zatim diferenciranjem član po član još jednom za oba slučaja a) i b) istovremeno, nalazimo

$$(1 - x^2)f'' - xf' + m^2 f \equiv 0.$$

Diferenciranjem po Lajbnicovom pravilu $n - 2$ puta dobijeni izraz, imamo

$$(1-x^2)f^{(n)} - 2x(n-2)f^{(n-1)} - (n-2)(n-3)f^{(n-2)}$$
$$-xf^{(n-1)} - (n-2)f^{(n-2)} + m^2 f^{(n-2)} \equiv 0,$$

odakle za $x = 0$ sledi

$$f^{(n)}(0) = ((n-2)^2 - m^2)f^{(n-2)}(0).$$

a) $f(0) = 1, f'(0) = 0$;

$$f^{(2k)}(0) = ((2k-2)^2 - m^2)f^{(2k-2)}(0); \ f^{(2k-1)}(0) = 0,$$

ili konačno

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2 - 2^2)\dots(m^2 - (2k-2)^2).$$

b) $f(0) = 0$; $f'(0) = m$;

$f^{(2k)}(0) = 0$; $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2k-1)^2)$, $k \in \mathbb{N}$. ▶

131. a) $y = (\arctan x)^2$ b) $y = (\arcsin x)^2$.

◀ Primenjujući Lajbnicovu formulu za nalaženje izvoda n-tog reda funkcije $y = f^2(x)$ dobijamo

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)} f^{(n-k)}. \tag{1}$$

Za parno n u sumi (1) na parnim mestima stoje proizvodi izvoda neparnog reda od funkcije f, a na neparnim mestima proizvodi izvoda te funkcije parnog reda. Ako je n neparan, onda u formuli (1) svaki član sume sadrži proizvod izvoda parnog reda funkcije f sa izvodom neparnog reda. Prilikom rešavanja primera 129. pokazano je da su izvodi parnog reda funkcija $y = \arcsin x$ i $y = \arctan x$ u nuli jednaki nula, a neparnog reda u istoj tački su različiti od nule. Na osnovu navedene analize formule (1) dolazimo do zaključka da je

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}(\arctan x)^2|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}(\arcsin x)^2|_{x=0} = 0.$$

Neka je $n = 2m$, $f^2(x) = (\arctan x)^2$. Na osnovu gore izloženog i rezultata dobijenih prilikom rešavanja primera 129, nalazimo

$$\begin{aligned}
f^{(2m)}(0) &= \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(\arctan x)^2|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2m} C_k^{2m}(\arctan x)^{(k)}(\arctan x)^{(2m-k)}|_{x=0} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_{2j+1}^{2m}(\arctan x)^{(2j+1)}(\arctan x)^{(2m-2j-1)}|_{x=0} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_{2j+1}^{2m}(-1)^j(2j)!(2(m-j-1))! \\
&= (-1)^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{2m(2m-1)\ldots(2m-2j)}{(2j+1)!}(2j)!(2(m-j-1))! \\
&= (-1)^{m-1}(2m-1)!\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2m-2j-1}+\frac{1}{2j+1}\right) \\
&= (-1)^{m-1}(2m-1)!\sum_{j=0}^{m-1}\frac{2}{2j+1}.
\end{aligned}$$

Napomenimo da simbol $|_{x=0}$ označava vrednost odgovarajuće funkcije u tački $x = 0$.

Što se tiče izvoda $2m$–tog reda funkcije $y = (\arcsin x)^2$ možemo postupiti kao kod funkcije $y = (\arctan x)^2$ primenom formule (1) i rešenja zadatka 129. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} y^{(2m)}(0) &= \sum_{j=0}^{m-1} C_{2j+1}^{2m} (\arcsin x)^{(2j+1)} (\arcsin x)^{(2m-2j-1)} |_{x=0} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} C_{2j+1}^{2m} ((2j-1)!!)^2 \cdot ((2m-2j-3)!!)^2. \end{aligned}$$

Rezultat možemo dobiti i u kompaktnijem obliku. Za to se postupa na sledeći način: Označimo $y = (\arcsin x)^2$. Onda je

$$\arcsin x = \pm\sqrt{y}.$$

Diferenciranjem leve i desne strane jednakosti po x, imamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y'.$$

Kvadriranjem obeju strana, sledi

$$(y')^2(1-x^2) = 4y.$$

Uzimanjem izvoda leve i desne strane i skraćivanjem sa y', ($|x| < 1$) dobijamo

$$y''(1-x^2) - xy' = 2,$$

odakle primenom Lajbnicovog pravila ($n-2$ puta) sledi

$$y^{(n)}(1-x^2) - 2x(n-2)y^{(n-1)} - (n-2)(n-3)y^{(n-2)}$$
$$-xy^{(n-1)} - (n-2)y^{(n-2)} \equiv 0.$$

Zamenjujući u poslednjoj formuli $x = 0$, nalazimo

$$y^{(n)}(0) = (n-2)^2 y^{(n-2)}(0) \quad (n = 3, 4, 5 \ldots).$$

Uzimajući u obzir da je $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$, konačno dobijamo

$$y^{(n)}(0) = 2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \ldots (2m-2)^2 = 2^{2m-1}\left((m-1)!\right)^2, \ m \in \mathbb{N}.$$

Upoređujući ovaj rezultat sa ranije dobijenim, uveravamo se u tačnost formule:

$$\sum_{j=0}^{m-1} C_{2j+1}^{2m}\left((2j-1)!!\right)^2\left((2m-2j-3)!!\right)^2 = 2^{2m-1}\left((m-1)!\right)^2. \blacktriangleright$$

132. Naći $f^{(n)}(a)$, ako je

$$f(x) = (x-a)^n\varphi(x),$$

gde je φ funkcija sa neprekidnim izvodom reda $n-1$ u okolini tačke $x = a$.

◀ Primenom Lajbnicove formule, očigledno je u okolini tačke a ispunjeno

$$f^{(n-1)}(x) = n!(x-a)\varphi(x) + o((x-a)).$$

Za $x = a$ sledi $f^{(n-1)}(a) = 0$. Za izvod reda n u tački $x = a$ imamo

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+\Delta x) - f^{(n-1)}(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{n!\,\Delta x\varphi(a+\Delta x) + o(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(n!\varphi(a+\Delta x) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = n!\varphi(a) \end{aligned}$$

(zbog neprekidnosti funkcije φ u tački $x = a$). ▶

133. Dokazati, da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, u tački $x = 0$ ima izvode do reda n zaključno, a nema izvod reda $n+1$.

◀ Pošto je

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0,$$

to je

$$f'(0) = 0.$$

Koristeći Lajbnicovu formulu dobijamo da je

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1}(x^{2n})^{(n-k-1)}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1}2n(2n-1)\ldots(n+k+2)x^{n+k+1}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(k)}. \end{aligned}$$

Izvod $n-1$-reda sadrži član oblika

$$\frac{1}{x^{2n-2}}\sin\frac{1}{x} \text{ ili } \frac{1}{x^{2n-2}}\cos\frac{1}{x}$$

u zavisnosti od toga da li je n paran ili neparan prirodan broj. Dakle, možemo zapisati:

$$f^{(n-1)}(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + \alpha_1(x), & n = 2k, \\ x^2\cos\frac{1}{x} + \alpha_2(x), & n = 2k-1, \end{cases}$$

gde $\alpha_j(x)$ $(j = 1, 2)$ su takve funkcije da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_j(x)}{x^2} = 0.$$

Ranije smo pokazali da izvod funkcije f u tački $x = 0$ postoji i jednak je nuli. Pretpostavimo da izvod reda $n-1$ funkcije f u nuli postoji i da je jednak nuli. Tada je

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x} + \frac{\alpha_1}{x}\right) = 0, & n = 2k-1, \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x} + \frac{\alpha_2}{x}\right) = 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Pokažimo sada da funkcija f nema u nuli izvod reda $n+1$. Za $x \neq 0$ imamo

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \alpha_1'(x), & n = 2k-1, \\ 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} + \alpha_2'(x), & n = 2k, \end{cases}$$

gde $\alpha_j'(x) \to 0$ kad $x \to 0$, a količnik $\frac{\alpha_j'(x)}{x}$ za $x \to 0$ nema limes. Odatle sledi da izraz

$$\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \begin{cases} 2\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \frac{\alpha_1'(x)}{x}, & n = 2k-1, \\ 2\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} + \frac{\alpha_2'(x)}{x}, & n = 2k, \end{cases}$$

za $x \to 0$ nema limes, tj. f nema $n+1$ izvod u nuli.

Napomena. Iz oblika funkcije $f^{(n)}(x)$ se vidi da ona ima prekid u tački $x = 0$. ▶

134. Dokazati da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

beskonačno diferencijabilna u tački $x = 0$. Nacrtati grafik te funkcije.

◀ Uzastopnim nalaženjem izvoda date funkcije, za $x \neq 0$, imamo

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\ f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots, f^{(n)}(x) = Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

gde je $Q_{3n}(\frac{1}{x})$ polinom $3n$ stepena po promenljivoj $\frac{1}{x}$. Uzimajući u obzir da je (Lopitalovim pravilom na primer)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \lim_{z\to+\infty}\frac{z^{\frac{m}{2}}}{e^z} = 0, \qquad (1)$$

za svaki prirodan broj m, specijalno je

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

Dakle, funkcija f ima izvod u nuli i on je $f'(0) = 0$. Pretpostavimo da $f^{(n-1)}(0)$ postoji i da je $f^{(n-1)}(0) = 0$. Tada po definiciji izvoda reda n imamo

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}Q_{3n-3}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

(na osnovu (1)). Metodom matematičke indukcije pokazali smo da je $f^{(n)}(0) = 0$, za svaki prirodan broj, što znači beskonačnu diferencijabilnost date funkcije u tački $x = 0$. Grafik funkcije nacrtan je na **(sl.14).** ▶

135. Dokazati da polinomi Čebiševa

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x),\ m \in \mathbb{N}$$

zadovoljavaju jednačinu

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

◀ Uzastopnim diferenciranjem funkcije $T_m(x)$ dva puta, nalazimo

$$\begin{aligned} T_m'(x) &= \frac{m}{2^{m-1}}\frac{\sin(m\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}};\ T_m''(x) \\ &= -\frac{m^2\cos(m\arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)} + \frac{xm\sin(m\arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{m^2}{1-x^2}T_m(x) + \frac{xT_m'(x)}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Zamenjivanjem dobijenih izvoda u datu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned}&(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x)\\ =\ & -m^2T_m(x) + xT_m'(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ►

136. Dokazati da Ležandrovi polinomi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^m m!}\left((x^2-1)^m\right)^{(m)},\ m \in \mathbb{N}_0$$

zadovoljavaju jednačinu

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

◄ Pođimo od jednakosti

$$(x^2-1)u' = 2mxu,$$

gde je

$$u = (x^2-1)^m$$

i prodiferencirajmo je $(m+1)$ puta. Imamo

$$\begin{aligned}&(x^2-1)u^{(m+2)} + 2(m+1)xu^{(m+1)} + (m+1)mu^{(m)}\\ &= 2mxu^{(m+2)} + 2m(m+1)u^{(m)}.\end{aligned}$$

Odakle je

$$(1-x^2)u^{(m+2)} - 2xu^{(m+1)} + m(m+1)u^{(m)} = 0.$$

Zamenjujući u poslednjoj jednakosti

$$u^{(m+2)} = 2^m m! P_m''(x);\ u^{(m+1)} = 2^m m! P_m'(x);\ u^{(m)} = 2^m m! P_m(x)$$

uveravamo se da Ležandrovi polinomi zadovoljavaju datu jednačinu. ►

137. Čebišev-Lagerovi polinomi su definisani formulama

$$L_m(x) = e^x(x^m e^{-x})^{(m)},\ m \in \mathbb{N}_0$$

Naći eksplicitnu formulu za $L_m(x)$. Dokazati da $L_m(x)$ zadovoljava jednačinu

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

◀ Diferencirajući m puta funkciju $y = x^m e^{-x}$ Lajbnicovom formulom dobijamo

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_k^m m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k}.$$

Diferenciranjem $(m+1)$ puta očiglednu jednakost

$$xu' + (x-m)u = 0,$$

gde je $u = x^m e^{-x}$, dobijamo

$$xu^{(m+2)} + (x+1)u^{(m+1)} + (m+1)u^{(m)} = 0. \qquad (1)$$

Pošto je $u^{(m)} = e^{-x}L_m(x)$, to je

$$u^{(m+1)} = e^{-x}(L_m'(x) - L_m(x)),\ u^{(m+2)} = e^{-x}(L_m''(x) - 2L_m'(x) + L_m(x)).$$

Zamenjivanjem $u^{(m)}$, $u^{(m+1)}$, $u^{(m+2)}$ u (1) i posle skraćivanja sa e^{-x}, dobijamo

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0. \ ▶$$

138. Neka je $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$, gde su f i φ $n-$puta diferencijabilne funkcije. Dokazati, da je

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} A_{kn}(x) f^{(k)}(u),$$

gde koeficijenti $A_{kn}(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ne zavise od funkcije f.

◀ Dferenciranjem složene funkcije $y = f(u)$, imamo

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)u'(x) = A_{11}(x)f'(u), \text{ gde je } A_{11}(x) = u'(x).$$

Pretpostavimo da za izvod $n-1$ reda funkcije y važi formula

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} A_{kn-1}(x) f^{(k)}(u),$$

gde funkcije $A_{kn-1}(x)$ ne zavise od $f(u)$. Diferenciranjem te jednakosti, sledi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n-1}\Big(A_{kn-1}'(x)f^{(k)}(u) + A_{kn-1}(x)f^{(k+1)}(u)u'(x)\Big) = \sum_{k=1}^{n} A_{kn}(x)f^{(k)}(u),$$

gde je

$$\begin{aligned} A_{1n}(x) &= A'_{1n-1}(x); A_{kn}(x) = A'_{kn-1}(x) + u'A_{k-1n-1}(x), \\ k &= 2,3,\dots,n-1; A_{nn}(x) = A_{n-1n-1}(x)u'. \end{aligned}$$

Formula je dokazana metodom indukcije. ▶

139. Dokazati da za $n-$ti izvod složene funkcije važi formula:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f(x^2) + \cdots \end{aligned}$$

◀ Formulu dokazujemo indukcijom. Naime za 1 imamo

$$\frac{dy}{dx} = 2xf'(x^2).$$

Pretpostavljajući da je formula tačna za n, njenim diferenciranjem po x, dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} &= (2x)^{n+1} f^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)n}{1!}(2x)^{n-1} f^{(n)}(x^2) \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2!}(2x)^{n-3} f^{(n-1)}(x^2) + \dots \end{aligned}$$ ▶

140. Čebišev-Ermitovi polinomi definisani su formulama

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)}, \ m \in \mathbb{N}_0.$$

Naći eksplicitni izraz za $H_m(x)$ i dokazati da $H_m(x)$ zadovoljava jednačinu:

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Dokaz. Primenom formule prethodnog primera, dobijamo

$$\begin{aligned} (e^{-x^2})^{(m)} &= e^{-x^2}(-1)^m \Bigg((2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2} \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4} - \cdots \Bigg), \end{aligned}$$

odakle sledi

$$H_m(x) = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4} + \cdots$$

Diferencirajući $m+1$ puta jednakost $u' + 2xu \equiv 0$, gde je $u = e^{-x^2}$, imamo

$$u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} + 2(m+1)u^{(m)} \equiv 0.$$

Uzimajući u obzir da je

$$\begin{aligned} u^{(m)} &= (-1)^m e^{-x^2} H_m(x), \; u^{(m+1)} = (-1)^m e^{-x^2} \left(H'_m(x) - 2xH_m(x)\right), \\ u^{(m+2)} &= (-1)^m e^{-x^2} \left(H''_m(x) - 4xH'_m(x) + (4x^2-2)H_m(x)\right) \end{aligned}$$

i zamenjujući ih u poslednju jednakost dobijamo

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0$$

što je i trebalo dokazati.

141. Dokazati formulu

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \quad (x > 0).$$

◀ Uzimajući $n-ti$ izvod proizvoda po Lajbnicovoj formuli se dobija

$$\begin{aligned} \frac{d^n(x^n \ln x)}{dx^n} &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n (x^n)^{(n-k)} (\ln x)^n = (x^n)^{(n)} \ln x + \sum_{k=1}^{n} C_k^n (x^n)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)} \\ &= n! \ln x + \sum_{k=1}^{n} C_k^n n(n-1)\dots(k+1)x^k (k-1)! \frac{(-1)^{k-1}}{x^k} \\ &= n! \ln x + \sum_{k=1}^{n} n! C_k^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} C_k^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \end{aligned}$$

Dokažimo sada indukcijom da je ispunjena formula:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{1}$$

Ona je tačna za 1. Pretpostavimo da je zadovoljena formula (1) i dokažimo da važi

$$\sum_{k=1}^{n+1} C_k^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \tag{2}$$

Dodavanjem levoj i desnoj strani jednakosti (1) po $\frac{1}{n+1}$ imamo

$$\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_k^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}. \tag{3}$$

Ostaje da se pokaže jednakost

$$\frac{1}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_k^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}C_k^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}. \tag{4}$$

Ona je ekvivalentna sa jednakošću:

$$\frac{1}{n+1}\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(C_k^{n+1}-C_k^n\right)+\frac{(-1)^n}{n+1}. \tag{5}$$

Pošto je

$$C_k^{n+1}-C_k^n=\frac{k}{n+1}C_k^{n+1},$$

to se (5) može predstaviti kao

$$\frac{1}{n+1}\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}C_k^{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}C_k^{n+1}. \tag{6}$$

Jednakost (6) je ispunjena, ako je

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}C_k^{n+1}=1.$$

Za dokaz poslednje formule razmotrimo razlaganje po Njutnovoj binomnoj formuli

$$(1-x)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^kC_k^{n+1}x^k.$$

Zamenjujući x sa jedinicom, dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^kC_k^{n+1}=0,$$

odakle sledi,

$$1-\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^kC_k^{n+1}=0.$$

Time je dokaz završen. ►

142. Dokazati formulu:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\left(C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x\right),$$

gde je

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$
$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

◀ Primenom Lajbnicove formule imamo

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(2n)} = \sum_{k=0}^{2n} C_k^{2n} \left(\frac{1}{x}\right)^{(2n-k)} (\sin x)^{(k)}$$
$$= \frac{1}{x^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n} C_k^{2n} (-1)^k (2n-k)! \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Zatim je

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(2n)} = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \left(\sin x \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \cos\frac{k\pi}{2} + \cos x \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \sin\frac{k\pi}{2}\right).$$

Uvodeći oznake

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \cos\frac{k\pi}{2}, \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \sin\frac{k\pi}{2};$$

imamo
$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \left(C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x\right),$$

što je i trebalo dokazati. ▶

143. Neka $\frac{d}{dx} = D$ označava operaciju diferenciranja i

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) D^k$$

simbolički diferencijalni polinom, gde je $P_k(x)$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ neka neprekidna funkcija od x. Dokazati, da je

$$f(D)(e^{\lambda x} u(x)) = e^{\lambda x} f(D + \lambda) u(x),$$

gde je λ konstanta.

◀ Polazeći od definicije polinoma $f(D)$, imamo

$$f(D)(e^{\lambda x}u(x)) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)D^k\{(e^{\lambda x}u(x))\}.$$

Pošto je $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$, to na osnovu Lajbnicove formule imamo

$$\begin{aligned} f(D)(e^{\lambda x}u(x)) &= \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\sum_{j=0}^{k} C_j^k \left(e^{\lambda x}\right)^{(j)} u^{(k-j)} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\sum_{j=0}^{k} C_j^k \lambda^j e^{\lambda x} u^{(k-j)} \\ &= e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\sum_{j=0}^{k} C_j^k \lambda^j u^{(k-j)} = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)^k u \\ &= e^{\lambda x} f(D+\lambda)u(x), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ▶

144. Dokazati, da ako u jednačini

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y_{x^k}^{(k)} = 0$$

uvedemo smenu $x = e^t$, gde je t nezavisno promenljiva, onda jednačina dobija oblik

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)y = 0,$$

gde je

$$D = \frac{d}{dt}.$$

◀ Dokaz se sprovodi indukcijom. Izrazimo y'_x preko y'_t. Imamo

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{dy}{dx} = e^{-t}y'_t = e^{-t}Dy; \; y''_{x^2} = \frac{d}{dx}(e^{-t}Dy) \\ &= e^{-t}D(e^{-t}Dy) = e^{-2t}(D^2-D)y = e^{-2t}D(D-1)y. \end{aligned}$$

Neka je

$$y_{x^k}^{(k)} = e^{-kt}D(D-1)\ldots(D-k+1)y. \tag{1}$$

Dokažimo da je

$$y_{x^{k+1}}^{(k+1)} = e^{-(k+1)t}D(D-1)\ldots(D-k)y.$$

Diferencirajući (1) po x, dobijamo

$$\begin{aligned}
y_{x^{k+1}}^{(k+1)} &= \frac{d}{dx}\Big(e^{-kt}D(D-1)\dots(D-k+1)\Big)y\\
&= e^{-t}\frac{d}{dt}\Big(e^{-kt}D(D-1)\dots(D-k+1)\Big)y\\
&= e^{-t}\Big((-ke^{-kt}D(D-1)\dots(D-k+1)y)+(e^{-kt}D^2(D-1)\dots(D-k+1))y\Big)\\
&= e^{-(k+1)t}D(D-1)\dots(D-k+1)(D-k)y,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ▶

2.5 Rolova, Lagranžova i Košijeva teorema

1^0Rolova teorema. Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ i neka ima u svakoj tački intervala $]a,b[$ konačan ili beskonačan izvod. Neka je pored toga $f(a)=f(b)$. Tada postoji tačka $\xi\in\,]a,b[$ takva da je $f'(\xi)=0$

2^0 Lagranžova teorema. Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ i neka ima u svakoj tački intervala $]a,b[$ konačan ili beskonačan izvod Tada postoji tačka $\xi\in]a,b[$ takva da je $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

Posledica Lagranžove teoreme. Ako je funkcija f diferenacijabilna na segmentu $[a,b]$ i ako je u svakoj tački $x\in[a,b]:\ f'(x)=0$, tada je funkcija f konstantna na $[a,b]$.

3^0 Košijeva teorema. Neka su funkcije f i g neprekidne na segmentu $[a,b]$ i neka imaju u svakoj tački intervala $]a,b[$ konačan ili beskonačan izvod, i neka je $g'(x)\neq 0$ za svako $x\in]a,b[$. Tada postoji tačka $\xi\in]a,b[$ takva da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Napomena. Ako pretpostavimo $g(a)\neq g(b)$, onda se uslov $g'(x)\neq 0$, može da zameni slabijim uslovom: $(f'(x))^2+(g'(x))^2\neq 0$ za svako $x\in]a,b[$.

4^0 Rešeni zadaci.

145. Proveriti da li su ispunjeni uslovi Rolove teoreme za funkciju

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3).$$

◀ Očigledno su ispunjeni uslovi za primenu Rolove teoreme na segmentima $[1,2]$ i $[2,3]$. Dakle, postoje tačke $c_1\in]1,2[$ i $c_2\in]2,3[$ tako da je $f'(c_1)=f'(c_2)=0$. Lako se dobija da je $c_1=2-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_2=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$. ▶

146. Funkcija $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ je jednaka nuli za $x = \pm 1$, a njen izvod $f'(x)$ je različit od nule za svako $x \in [-1, 1]$. Obrazložiti da li to protivreči Rolovoj teoremi.

◀ Data funkcija nema izvod u tački $x = 0$. Stvarno,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta\, x)^2}}{\Delta\, x} = +\infty, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta\, x)^2}}{\Delta\, x} = -\infty.$$

Funkcija ne zadovoljava sve uslove Rolove teoreme, što znači da navedeni uslov u zadatku ne protivreči Rolovoj teoremi. ▶

147. Neka funkcija f ima konačan izvod $f'(x)$ u svakoj tački x konačnog ili beskonačnog intervala $]a, b[$ i neka je

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Dokazati, da je $f'(c) = 0$, za neku tačku c intervala $]a, b[$.

◀ Neka je interval $]a, b[$ konačan i neka je

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x) = C = const.$$

Razmotrimo funkciju

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in]a, b[; \\ C, & x = a; \ x = b. \end{cases}$$

Funkcija F ocigledno zadovoljava Rolovu teoremu na segmentu $[a, b]$, zato postoji tačka $c \in]a, b[$ takva da je $F'(c) = f'(c) = 0$.

Ako je interval $]a, b[$ beskonačan, onda prema uslovima u zadatku bar jedna od pravih $y = C \pm \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ proizvoljno) seče u najmanje dve tačke c_1 i c_2 krivu $y = f(x)$. Sada su jasno ispunjeni svi uslovi za primenu Rolove teoreme na funkciju f i segment $[c_1, c_2]$. Postoji dakle tačka $c \in]c_1, c_2[$ a samim tim i $c \in]a, b[$, takva da je $f'(c) = 0$.

Analizirajmo još slučaj kada je

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x) = \infty.$$

Tada kako u slučaju konačnog tako i u slučaju beskonačnog intervala $]a, b[$ jednačina $f(x) = A$ ($A > 0$, fiksiran pozitivan broj kada je $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$) ili $f(x) = -A$ (u slučaju kada je $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = -\infty$) uvek ima dva razna rešenja, u oznaci α_1 i α_2. Sada primenom Rolove

teoreme na istu funkciju f ali na segmentu $[\alpha_1, \alpha_2]$ zaključujemo da postoji $c \in]\alpha_1, \alpha_2[$ a samim tim i $c \in]a, b[$ takvo da je $f'(c) = 0$. Zadatak je u potpunosti rešen. ►

148. Neka je: **1)** funakcija f definisana i ima neprekidne izvode $(n-1)-$*og* reda $f^{(n-1)}(x)$ na segmentu $[x_0, x_n]$; **2)** f ima izvod $n-$*tog* reda $f^{(n)}(x)$ u intervalu $]x_0, x_n[$; **3)** ispunjene su jednakosti $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$ $(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$. Dokazati, da u intervalu $]x_0, x_n[$ postoji bar jedna tačka ξ, takva da je $f^{(n)}(\xi) = 0$.

◄ Na svakom od segmenata $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ ispunjeni su uslovi Rolove teoreme za funkciju f, zato postoji bar n tačaka $\xi_j \in]x_0, x_n[$ takvih da je $f'(\xi_j) = 0$. Za funkciju f' na svakom od segmenata $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ ispunjeni su uslovi Rolove teoreme, zato postoji bar $n-1$ tačka $\eta_k \in]x_0, x_n[$ tako da je $f''(\eta_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Nastavljajući rasuđivanje na isti način dolazimo do zaključka da postoje bar $n-(n-2) = 2$ tačke $\xi_i \in]x_0, x_n[$ takve da je $f^{(n-1)}(\xi_i) = 0$, $i = 1, 2$. Primenjujući Rolovu teoremu na funkciju $f^{(n-1)}$ definisanu na $[\xi_1, \xi_2]$, dobijamo da postoji tačka $\xi \in]x_0, x_n[$ takva da je $f^{(n)}(\xi) = 0$. ►

149. Neka je: **1)** funkcija f je definisana i ima neprekidan izvod reda $p+q$ $f^{(p+q)}(x)$ na segmentu $[a, b]$; **2)** f ima izvod reda $p+q+1$ $f^{(p+q+1)}(x)$ u intervalu $]a, b[$; **3)** ispunjene su jednakosti

$$\begin{aligned} f(a) &= f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0; \\ f(b) &= f'(b) = \dots = f^{(q)}(b) = 0; \end{aligned}$$

Dokazai, da tada postoji tačka $c \in]a, b[$ takva da je $f^{(p+q+1)}(c) = 0$.

◄ Određenosti radi neka je $p < q$. Funkcija f zadovoljava Rolovu teoremu na $[a, b]$, zato postoji $\xi_1 \in]a, b[$ tako da je $f'(\xi_1) = 0$. Pošto je $f'(x) = 0$ i za tačke a i b to se može primeniti Rolova teorema za funkciju f' na segmentima $[a, \xi_1]$ i $[\xi_1, b]$: postoje bar dve tačke $\xi_2 \in]a, \xi_1[, \xi_3 \in]\xi_1, b[$ takve da je $f''(\xi_j) = 0, (j = 2, 3)$. Pored toga je $f''(a) = f''(b) = 0$, tako da funkcija $f''(x)$ ima bar četiri nule na $[a, b]$. Nastavljajući ovo rasuđivanje dobijamo da funkcija $f^{(p+1)}(x)$ ima bar $p+2$ nule na $[a, b]$. Te nule su krajevi $p+1$ segmenta na svakom od kojih funkcija $f^{(p)}(x)$ zadovoljava Rolovu teoremu. Dakle, u intervalu $]a, b[$ funkcija $f^{(p+1)}(x)$ ima bar $p+1$ nulu. Pored toga je $f^{(p+1)}(b) = 0$, i zato je u bar $p+2$ tačke segmenta $[a, b]$: $f^{(p+1)}(x) = 0$. Nastavljajući rasuđivanje na ovakav način zaključujemo da je $f^{(q)}(x) = 0$ u bar $p+2$ tačke segmenta $[a, b]$. Te tačke se krajevi $p+1$ segmenta, na svakom od kojih funkcija $f^{(q)}(x)$, zadovoljava Rolovu teoremu. Dakle, funkcija $f^{(q+1)}(x)$ ima u intervalu $]a, b[$ bar $p+1$ nulu. Pošto funkcija $f^{(q+1)}(x)$ zadovoljava Rolovu teoremu na p segmenata koji

pripadaju intervalu $]a,b[$, to funkcija $f^{(q+2)}(x)$ ima na $]a,b[$ bar p nula. Nastavljajući ovakvo rasuđivanje dolazimo do saznanja da funkcija $f^{(q+j)}(x)$ $(j = 3,4,\dots,p)$ ima bar $p-(j-2)$ nula na intervalu $]a,b[$. Dakle, funkcija $f^{(p+q)}(x)$ ima bar $p-(p-2)=2$ nule na $]a,b[$. Označimo ih sa η_1 i η_2. Primenjujući sada Rolovu teoremu na funkciju $f^{(p+q)}(x)$ dobijamo da postoji tačka $\xi \in]\eta_1, \eta_2[$ takva da je $f^{(p+q+1)}(\xi)=0$. Dokaz je završen. ▶

150. Dokazati, da ako su svi koreni (nule) polinoma

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

sa realnim koeficijentima a_k $(k = 0,1,2,\dots,n)$ realni, onda i polinomi

$$P_n', P_n'', \dots P_n^{(n-1)}$$

imaju samo realne nule.

◀ Najpre, ako su svi koreni datog polinoma različiti, po Rolovoj teoremi polinom $P_n'(x)$ ima $n-1$ realnu nulu; zatim polinom $P_n''(x)$ ima $n-2$ realnu nulu; itd. Kako se diferenciranjem stepen polinoma smanjuje za 1 to znači da svi polinomi

$$P_n', P_n'', \dots, P_n^{(n-1)}$$

imaju sve realne nule.

Ako je neki koren polinoma $P_n(x)$ višestruk, onda je on i koren izvodnog polinoma, dakle realan. ▶

151. Dokazati da Ležandrov polinom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

ima sve realne korene, koji pripadaju intervalu $]-1,1[$.

◀ Polinom $U_n(x) = (x^2-1)^n$ ima na segmentu $[-1,1]$ $2n$ realnih korena: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -1$; $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2n} = 1$. Saglasno prethodnoj teoremi polinom $P_n(x)$ ima n realnih korena, koji se po Rolovoj teoremi nalaze u intervalu $]-1,1[$, što je i trebalo dokazati. ▶

152. Dokazati, da su koreni Čebišev-Lagerovog polinoma

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$

pozitivni.

◀ Analizirajmo funkciju $\varphi(x) = x^ne^{-x}$. Zbog $\varphi(0) = \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$, postoji tačka $\xi_1 \in]0,+\infty[$, takva da je $\varphi'(\xi_1) = 0$ (primer 147). Očigledno

je $\varphi'(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0$, i zato prema Rolovoj teoremi i rešenju primera 147, postoje tačke $\xi_2 \in]0, \xi_1[$ i $\xi_3 \in]\xi_1, +\infty[$ takve da je $\varphi''(\xi_i) = 0$ $(i = 2, 3)$. Osim toga $\varphi''(0) = 0$. Znači $\varphi''(x)$ ima tri nule na poluosi $Ox, x \geq 0$. Pošto je $\varphi^{(j)}(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi^{(j)}(x) = 0$ za $j = 0, 1, 2, ..., n-1$, to prema Rolovoj teoremi i rešenju primera 147, dobijamo da funkcija $\varphi^{(n-1)}(x)$ ima $n+1$ nulu na poluosi $Ox, x \geq 0$, od kojih je jedna 0. Te tačke su krajevi n segmenata na svakom od kojih funkcija $\varphi^{(n-1)}(x)$ zadovoljava Rolovu teoremu, zato postoji bar n tačaka $\eta_k > 0$ za koje je $\varphi^{(n)}(\eta_k) = 0$. Očigledno je $\varphi^{(n)}(0) \neq 0$. Pošto je $L_n(x) = e^x \varphi^{(n)}(x)$ polinom stepena n, koji ima n korena, to su svi njegovi koreni tačke $\eta_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$. ►

153. Dokazati, da su svi koreni Čebišev-Ermitovog polinoma

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

realni.

◄ Posmatrajmo funkciju $u(x) = e^{-x^2}$. Očigledno je, $\lim\limits_{x\to\infty} u^{(j)}(x) = 0$ $(j = \overline{0, n})$, i zato funkcije $u^{(j)}(x)$ zadovoljavaju uslove primera 147 na intervalu $]-\infty, +\infty[$. Ponavljanjem rasuđivanja prilikom rešavanja prethodnog zadatka, dolazimo do zaključka, da $u'(x)$ ima bar jednu nulu u navedenom intervalu; $u''(x)$ dve nule;... $u^{(n)}(x)$ n nula. Pošto je $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} u^{(n)}(x)$ polinom stepena n, koji ima n korena, to se njegovi koreni poklapaju sa korenima funkcije $u^{(n)}(x)$ i svi ti koreni su onda realni. ►

154. Naći funkciju $\theta = \theta(x, \Delta x)$ takvu da je

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x \quad (0 < \theta < 1),$$

ako je :

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$; b) $f(x) = x^3$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$; d) $f(x) = e^x$.

◄ Primenom formule konačnih priraštaja Lagranža u svakom od slučajeva a)-d) imamo:

a)

$$\begin{aligned} & a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) \\ = \ & (2a(x + \theta \Delta x) + b) \Delta x, \end{aligned}$$

$$\text{odakle sledi } \theta = \frac{1}{2}.$$

b)

$$(x + \Delta x)^3 - x^3 = 3(x + \theta \Delta x)^2 \Delta x, \text{ odakle je}$$

$$\theta = \frac{-x + \sqrt{x \Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2 + x^2}}{\Delta x}, \quad (x > 0, \Delta x > 0).$$

c)

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{(x + \theta \Delta x)^2}, \text{ odakle sledi}$$

$$\theta = \frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1\right), \quad (x(x + \Delta x) > 0).$$

d)

$$e^{x+\Delta x} - e^x = e^{x+\theta\Delta x} \Delta x,$$

odakle se dobija $\theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. ►

155. Dokazati, da za $x \geq 0$, sledi

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}},$$

gde je $\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{2}$, pri čemu je $\lim_{x \to +0} \theta(x) = \frac{1}{4}$; $\lim_{x \to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

◄ Po formuli konačnih priraštaja imamo

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}} \quad (x \geq 0)$$

(ovde je $\Delta x = 1$). Iz dobijene jednakosti nalazimo

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+1)} - x\right),$$

odakle sledi $\lim_{x \to +0} \theta(x) = \frac{1}{4}$.

Zapisujući $\theta(x)$ u obliku

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2\left(\sqrt{x(x+1)} + x\right)},$$

dobijamo da je $\lim_{x \to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

Za $x > 0$ možemo $\theta(x)$ zapisati u obliku

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1},$$

odakle sleduje da $\theta(x)$ raste na intervalu $]0, +\infty[$. Zato je

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

156. Neka $f \in C^{(1)}(]-\infty, +\infty[)$ i neka je za bilo koje x, h ispunjena identičnost:

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x). \tag{1}$$

Dokazati, da je

$$f(x) = ax + b,$$

gde su a i b konstante.

$\blacktriangleleft$ Uzimajući u (1) $x = 0$, dobijamo identičnost

$$f(h) \equiv hf'(0) + f(0),$$

koja je ispunjena za svako $h \in]-\infty, +\infty[$. Preoznačavanjem: $h = x$, $f'(0) = a$, $f(0) = b$, dobijamo

$$f(x) \equiv ax + b,$$

što je i trebalo dokazati. $\blacktriangleright$

157. Neka $f \in C^{(2)}(]-\infty, +\infty[)$ i neka je za bilo koje x, h ispunjena identičnost

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right). \tag{1}$$

Dokazati, da je

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gde su a, b i c konstante.

$\blacktriangleleft$ Diferencirajući (1) po h, dobijamo identičnost

$$f'(x+h) \equiv \frac{h}{2} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) + f'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

iz koje se za $x = -\frac{h}{2}$, dobija

$$f'\left(\frac{h}{2}\right) \equiv \frac{h}{2} f''(0) + f'(0). \tag{2}$$

Stavljajući u (1) $x = 0$, dobijamo identičnost

$$f(h) \equiv hf'\left(\frac{h}{2}\right) + f'(0),$$

koja posle zamenjivanja $f'\left(\frac{h}{2}\right)$ iz (2) postaje

$$f(h) \equiv h^2 \frac{f''(0)}{2} + hf'(0) + f(0), \quad -\infty < h < +\infty.$$

Preoznačavanjem: $h = x$, $\frac{f''(0)}{2} = a$, $f'(0) = b$, $f(0) = c$, konačno dobijamo predstavljanje funkcije $f(x)$ u obliku

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \quad \blacktriangleright$$

158. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \le x \le 1; \\ \frac{1}{x}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Odrediti međuvrednost c u formuli konačnih priraštaja za funkciju f na razmaku $[0, 2]$.

◀ Ispitajmo najpre diferencijabilnost funkcije f u tački $x = 1$. Po definiciji jednostranih izvoda imamo

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{3 - (1 + \Delta x)^2}{2} - 1 \right) = -1;$$

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{1 + \Delta x} - 1 \right) = -1.$$

Funkcija je diferencijabilna na segmentu $[0, 2]$. Primenom formule konačnih priraštaja na funkciju f definisanu na $[0, 2]$, nalazimo

$$f(2) - f(0) = 2f'(c); \ 0 < c < 2.$$

Pošto je $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2}$,

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & 0 < x \le 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$\text{to je } -1 = \begin{cases} -2c, & 0 < c \le 1; \\ -\frac{2}{c^2}, & 1 < c < 2, \end{cases}$$

$$\text{odakle je } c_1 = \frac{1}{2}, \ c_2 = \sqrt{2}. \quad \blacktriangleright$$

159. Neka je

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi(x)),$$

gde je $0 < \xi(x) < x$. Dokazati, da ako je

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x), & x > 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

to je funkcija $\xi = \xi(x)$

prekidna u proizvoljnom dovoljno malom intervalu $]0, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$.

◀ Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je x proizvoljan broj iz intervala $]0, \varepsilon[$. Primenjujući Lagranžovu teoremu na funkciju f na segmentu $[0, x]$, dobijamo

$$x \sin\ln x = x(\sin\ln\xi(x) + \cos\ln\xi(x)),$$

odakle sledi

$$\sin\ln x = \sqrt{2}\cos\left(\ln\xi(x) - \frac{\pi}{4}\right). \tag{1}$$

Uzmimo proizvoljno $x_0 \in]0, x[$, a Δx odaberimo tako da $x_0 + \Delta x \in]0, x[$ i zamenjivanjem te vrednosti u (1) dobijamo

$$\begin{aligned} \sin\ln x_0 &= \sqrt{2}\cos\left(\ln\xi(x_0) - \frac{\pi}{4}\right); \\ \sin\ln(x_0 + \Delta x) &= \sqrt{2}\cos\left(\ln\xi(x_0 + \Delta x) - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \ln\xi(x_0) &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \pm \arccos\frac{\sin\ln x_0}{\sqrt{2}} \quad (k = 0, -1, -2, \dots) \\ \ln\xi(x_0 + \Delta x) &= \frac{\pi}{4} + 2n\pi \pm \arccos\frac{\sin\ln(x_0 + \Delta x)}{\sqrt{2}} \quad (n = 0, -1, -2, \dots). \end{aligned}$$

Iz tih jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} &\ln\xi(x_0 + \Delta x) - \ln\xi(x_0) \\ =\ &2\pi(n-k) \pm \left(\arccos\frac{\sin\ln(x_0 + \Delta x)}{\sqrt{2}} - \arccos\frac{\sin\ln x_0}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Ocenjujući ovu razliku po apsolutnoj vrednosti, imamo nejednakost:

$$|\ln\xi(x_0 + \Delta x) - \ln\xi(x_0)| \geq 2\pi|n-k| - \pi \geq \pi,$$

koja je zadovoljena za dovoljno malo Δx, ako je $|n-k| \geq 1$. Odatle sledi da je funkcija $\xi(x)$ prekidna na intervalu $]0, \varepsilon[$. Primetimo da u svakoj od oblasti, definisanoj nejednakostima

$$0 < x < \varepsilon, \; e^{n\pi} < \xi < e^{\frac{\pi}{4} + n\pi} \; (n = 0, -1, -2, \dots)$$

ili nejednakostima

$$0 < x < \varepsilon,\ e^{\frac{\pi}{4}+n\pi} < \xi < e^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\ (n = 0, -1, -2, \ldots)$$

postoji jedinstvena neprekidna funkcija $\xi = \xi(x)$, koja učestvuje u jednakosti (1). Nju nalazimo iz (1):

$$\xi(x) = e^{\frac{\pi}{4}+n\pi-\arccos\frac{\sin\ln x}{\sqrt{2}}};\ \xi(x) = e^{\frac{\pi}{4}+n\pi+\arccos\frac{\sin\ln x}{\sqrt{2}}}$$
$$(n = 0, -1, -2, \ldots\ldots). \ ▶$$

160. Neka funkcija f ima neprekidan izvod f' u intervalu $]a, b[$. Mogu li se za svaku tačku $\xi \in]a, b[$ naći takve dve tačke x_1 i x_2 iz $]a, b[$, da bude

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)\ (x_1 < \xi < x_2)?$$

◀ U opštem slučaju ne. Na primer za funkciju

$$f(x) = x^3\ (-1 \le x \le 1),$$

za proizvoljne $x_1, x_2 \in]-1, 1[$ važi

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 > 0.$$

Dakle, za $\xi = 0$, ne postoje tačke x_1 i x_2 takve da bude

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(0). \ ▶$$

161. Dokazati nejednakosti:

a)
$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

b)
$$py^{p-1}(x - y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x - y),$$

ako je $0 < y < x$ i $p > 1$;

c)
$$|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|;$$

d)
$$\frac{a - b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a - b}{b},\ 0 < b < a.$$

◀ a) Po Lagranžovoj teoremi sledi

$$\sin x - \sin y = (x - y)\cos\xi,$$

odakle je

$$|\sin x - \sin y| = |\cos\xi||x - y| \le |x - y|;$$

b)

$$x^p - y^p = p\xi^{p-1}(x - y),\ y < \xi < x,$$

odatle sledi

$$py^{p-1}(x - y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x - y);$$

c)

$$\arctan a - \arctan b = \frac{1}{1+\xi^2}(a - b),$$

odatle imamo

$$|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|;$$

d)

$$\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a - b),\ a < \xi < b,$$

$$\text{te je } \frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}. \ ▶$$

162. Obrazložiti za Košijevu teoremu:
a) Ne može se primeniti na funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$;
b) Može se primeniti na funkcije $f(x) = x^2 + x$ i $g(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$. Naći tačku ξ.

◀ a) Pošto je $g'(0) = 0$, to date funkcije ne zadovoljavaju uslove Košijeve teoreme na segmentu $[-1, 1]$.

b) Uslovi Košijeve teoreme su ispunjeni: $g(-1) = -1 \ne 1 = g(1)$ i $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 = (2x+1)^2 + 9x^4 \ne 0$, za $x \in [-1, 1]$. Lako nalazimo da je $\xi = -\frac{1}{3}$. ▶

163. Neka je f diferencijabilna funkcija na segmentu $[x_1, x_2]$, pri čemu je $x_1 \cdot x_2 > 0$. Dokazati, da je

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

gde je $x_1 < \xi < x_2$.

◀ Ako je $D(x_1, x_2)$ data determinanta, onda razvijajući je, imamo

$$\frac{D(x_1,x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}.$$

Označimo sa $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$ i $\psi(x)=\frac{1}{x}$. Pošto tačka $x=0$ ne pripada segmentu $[x_1, x_2]$ to funkcije φ i ψ ispunjavaju uslove Košijeve teoreme na tom segmentu, tj.

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

za neko $\xi \in]x_1, x_2[$. Dakle,

$$\frac{D(x_1,x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

što je i trebalo dokazati. ▶

164. Dokazati, da ako je funkcija f diferencijabilna ali neograničena na konačnom intervalu $]a, b[$, onda je njen izvod f' takođe neograničena funkcija na tom intervalu.

◀ Neka je f diferencijabilna funkcija na $]a, b[$ i neograničena kad $x \to b-0$. Uzmimo proizvoljni niz x_n koji teži ka b sleva. Tada postoji takav broj N, da je za $n > N$ ispunjena nejednakost $|f(x_n)| > A$, za bilo koji broj $A > 0$. Fiksirajmo bilo koji broj $m > N$ i posmatrajmo za $n > m$ razliku: $f(x_n) - f(x_m)$. Primenom Lagranžove teoreme na funkciju f posmatranu na segmentu $[x_m, x_n]$, nalazimo

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_m)}{x_n-x_m}\right|=|f'(\xi_{mn})|,$$

gde je $x_m < \xi_{mn} < x_n$. Leva strana je za dovoljno veliko n veća od bilo kog unapred zadatog pozitivnog broja (uslov zadatka), odakle sledi neograničenost izvoda $f'(x)$ kad $x \to b-0$.

Napomena. Uzimajući $f(x)=\sqrt{x}$, $0 \le x \le a$; sledi da obrnuto nije tačno, tj. iz neograničenosti izvoda ne sledi neograničenost funkcije. ▶

165. Dokazati, da ako funkcija f ima na konačnom ili beskonačnom intervalu $]a, b[$ ograničen izvod f', tada je ona ravnomerno neprekidna na tom intervalu.

◀ Po Lagranžovoj teoremi, za svaki par tačaka $x_1, x_2 \in]a, b[$ imamo

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)||x_2-x_1|\le M|x_2-x_1|$$

(prema ograničenosti izvoda: $|f'(x)| \leq M$). Uzimajući sada za dato $\varepsilon > 0$ takvo $\delta > 0$, da je $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$, dobijamo da za $|x_2 - x_1| < \delta$ sledi $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$; što znači da je funkcija f ravnomerno neprekidna na $]a, b[$. ▶

166. Dokazati, da ako je funkcija f diferencijabilna na beskonačnom intervalu $]x_0, +\infty[$ i

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0, \text{ to je}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

tj. $f(x) = o(x)$ kad $x \to +\infty$.

◀ Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz promenljive koji teži ka $+\infty$. Tada postoji takvo N, da je za $n > N$ ispunjena nejednakost

$$|f'(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

gde je $\varepsilon > 0$ proizvoljan unapred zadat broj. Fiksirajmo bilo koje $n_0 > N$ i primenjujući Lagranžovu teoremu na funkciju f posmatranu na segmentu $[x_{n_0}, x_n]$:

$$\left| \frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}} \right| = |f(\xi_n)|, \tag{2}$$

gde je $x_{n_0} < \xi_n < x_n$. Iz (1) i (2) sledi

$$\left| \frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Iz (3) dobijamo nejednakost

$$\frac{f(x_{n_0})}{x_n} - \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right) \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_n)}{x_n} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} + \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right) \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Za velike vrednosti broja n, očigledno je ispunjena nejednakost

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{a } \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right) \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

kad god je $n > n_0$, zato iz nejednakosti (4) za $n_0 > N$ i za dovoljno veliko $n > n_0$ dobijamo nejednakost

$$-\varepsilon < \frac{f(x_n)}{x_n} < \varepsilon \tag{5}$$

$$\text{odakle je } \left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right| < \varepsilon.$$

Pošto je $\{x_n\}$ proizvoljan beskonačno veliki niz, čiji su svi članovi pozitivni, to imamo da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

tj. $f(x) = o(x)$ kad $x \to +\infty$. ►

167. Dokazati, da ako je funkcija f diferencijabilna na beskonačnom intervalu $]x_0, +\infty[$ i ako je $f(x) = o(x)$ kad $x \to +\infty$, onda je

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

Specijalno, ako postoji

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = k, \text{ to je } k = 0.$$

◄ Pretpostavimo da je

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = A;\ A \neq 0;$$

tada za svako ε $(0 < \varepsilon < A)$ postoji $B > 0$, takvo da je za $x > B$ ispunjena nejednakost

$$|f'(x)| \geq A - \varepsilon. \tag{2}$$

Fiksirajmo $x_1 > B$ i uzmimo $x > x_1$. Prema Lagranžovoj teoremi za funkciju f na segmentu $[x_1, x]$ i uzimajući u obzir nejednakost (1) imamo

$$\left|\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\right| = |f'(\xi)| \geq A - \varepsilon,\ x_1 < \xi < x. \tag{2}$$

Prelaskom na graničnu vrednost u nejednakosti (2), kad $x \to +\infty$, dobijamo

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \geq A - \varepsilon,$$

što protivreči uslovu: $f(x) = o(x)$, kad $x \to +\infty$. Dakle, $A = 0$, odnosno, $\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$.

Pretpostavima sada da postoji $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = k$. Onda za bilo koji niz $x_m > 0$, $(x_m \to +\infty$, kad $m \to \infty)$ imamo

$$\lim_{m\to\infty} f'(x_m) = k,$$

tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji M takvo da je za $m > M$ ispunjena nejednakost

$$k - \varepsilon < f'(x_m) < k + \varepsilon, \tag{3}$$

Uzimajući $m_0 > M$ i $m > m_0$ dobijamo, primenom Lagranžove teoreme za funkciju f na segmentu $[x_{m_0}, x_m]$:

$$\frac{f(x_m) - f(x_{m_0})}{x_m - x_{m_0}} = f'(\xi_m), \; x_{m_0} < \xi < x_m.$$

Iz nejednakosti (3) sledi nejednakost

$$k - \varepsilon < \frac{f(x_m) - f(x_{m_0})}{x_m - x_{m_0}} < k + \varepsilon. \tag{4}$$

Prelaskom na limes kad $m \to +\infty$, dobijamo:

$$k - \varepsilon \leq \lim_{m \to +\infty} \frac{f(x_m)}{x_m} \leq k + \varepsilon.$$

Pošto je

$$\lim_{m \to \infty} \frac{f(x_m)}{x_m} = 0,$$

to dobijamo da je

$$k - \varepsilon \leq 0, \; k + \varepsilon \geq 0,$$

odakle s obzirom na proizvoljnost broja ε, sledi da je $k = 0$. ▶

168. a) Dokazati, da ako :

1) funkcija f je definisana i neprekidna na segmentu $[x_0, X]$;

2) f ima konačan izvod f' na intervalu $]x_0, X[$;

3) postoji konačan ili beskonačan limes $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0 + 0)$,

onda postoji respektivno konačan ili beskonačan jednostrani izvod $f'_+(x_0)$ i $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$.

b) Pokazati, da za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1; \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

postoji konačan limes $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$, iako funkcija f nema konačne jednostrane izvode $f'_-(1)$ i $f'_+(1)$. Dati geometrijsku interpretaciju te činjenice.

◀ a) Po formuli konačnih priraštaja za funkciju f na proizvoljnom segmentu $[x_0, x_1]$, gde $x_1 \in]x_0, X[$: imamo

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0 + \theta(x_1 - x_0)) \; (0 < \theta < 1).$$

Prelaskom na limes u poslednjoj jednakosti, kad $x_1 \to x_0$, dobijamo

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0 + 0) = f'_+(x_0),$$

jer je po definiciji

$$f'_+(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0 + 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

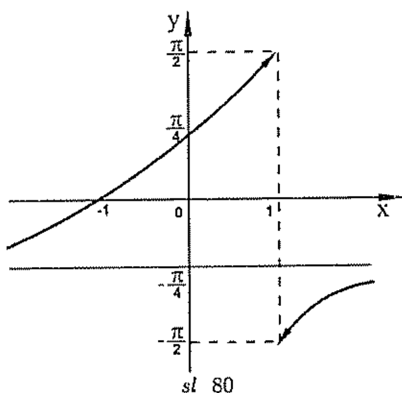
b) Neka je $x \neq 1$. Tada je

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}; \quad \lim_{x \to 1} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Polazeći od definicije jednostranih izvoda, dobijamo u tački $x = 1$:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} \arctan \frac{2 + \Delta x}{- \Delta x} = -\infty; \\ f'_-(1) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x} \arctan \frac{2 + \Delta x}{- \Delta x} = -\infty. \end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija data je na (sl. 80). ►



sl 80

169. Dokazati identičnost:

$$2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} = \pi sgn x; \; |x| \geq 1.$$

◄ Za $|x| > 1$ imamo

$$\left(2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} \right)' = \frac{2}{1 + x^2} + \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)|1 - x^2|} \equiv 0.$$

Dakle, za $|x| \geq 1$ ispunjena je identičnost

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} c_1, & x \geq 1; \\ c_2, & x \leq -1. \end{cases}$$

Stavljajući $x = 1$, nalazimo $c_1 = \pi$; stavljajući $x = -1$, dobijamo $c_2 = -\pi$. Zato je

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi sgn x, \ |x| \geq 1. \ ▶$$

170. Dokazati da je linearna funkcija $f(x) = kx+b$, jedinstvena funkcija čiji je izvod $f'(x) = k$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

◀ Ako je $f(x) = kx + b$, to je $f'(x) = k$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Treba pokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji funkcija φ različita od linearne i da je $\varphi'(x) = k$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Obrazujmo funkciju $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$. Izvod funkcije ψ je na celoj brojnoj osi jednak nuli, sledi prema posledici Lagranžove teoreme je $\psi(x) = const.$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $\varphi(x) = f(x) + c = kx + b + c$ je linearna funkcija. Dobili smo protivrečnost pretpostavci da φ nije linearna funkcija. ▶

171. Šta se može reći o funkciji f, ako je $f^{(n)}(x) = 0$, na celoj brojnoj pravoj?

◀ Na osnovu posledice Lagranžove teoreme imamo da je

$$f^{(n-1)}(x) = c,$$

c je konstanta. Imajući u obzir prethodni primer, dolazimo do zaključka da je funkcija $f^{(n-2)}(x)$ linearna, tj. polinom prvog stepena: $f^{(n-2)}(x) = cx+d$. Pretpostavimo da je funkcija $f^{(n-k)}(x)$ polinom stepena $(k-1)$:

$$f^{(n-k)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^{k-1-j}. \tag{1}$$

Pokažimo da je pri toj pretpostavci funkcija $f^{(n-k-1)}(x)$ polinom stepena k. Zbog toga razmotrimo funkciju

$$\varphi(x) = f^{(n-k-1)}(x) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{x^{k-j}}{k-j}.$$

Izvod ove funkcije je na celoj brojnoj pravoj jednak nuli, tj. funkcija φ je konstantna, dakle,

$$f^{(n-k-1)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{x^{k-j}}{k-j} + c = \sum_{j=0}^{k} \overline{a}_j x^{k-j}.$$

Matematičkom indukcijom smo pokazali da je za svako k $(2 \leq k \leq n)$ funkcija $f^{(n-k)}(x)$ polinom stepena $(k-1)$. Stavljajući u formuli (1) $k=n$, dobijamo

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\overline{a}_j x^{n-1-j},$$

tj. funkcija f je polinom stepena $(n-1)$. ▶

172. Dokazati, da ako :

1) funkcija f je neprekidna na segmentu $[a,b]$;

2) f ima konačan izvod na $]a,b[$;

3) f nije linearna funkcija, tada u intervalu $]a,b[$ postoji bar jedna tačka c, takva da je

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

◀ Podelimo segment $[a,b]$ proizvoljno na n delova tačkama $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, dobijamo

$$|f(b)-f(a)|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))\right|\leq\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|.$$

Po Lagranžovoj formuli imamo

$$\begin{aligned} f(x_{i+1})-f(x_i) &= f'(\xi_i)\,\Delta\, x_i,\ x_i<\xi_i<x_{i+1},\\ i &= 0,1,2,\ldots,n-1,\ \ \Delta\, x_i=x_{i+1}-x_i.\end{aligned}$$

Na taj način dolazimo do nejednakosti

$$|f(b)-f(a)|\leq\sum_{i=0}^{n-1}\left|f'(\xi_i)\right|\Delta\, x_i.$$

Pošto je funkcija f različita od linearne, to postoji takva podela segmenta $[a,b]$, da među brojevima $|f(\xi_i)|$ postoji najveći, različit od nule, koji ćemo označiti sa $|f'(\xi)|$. Tada dobijamo nejednakost

$$|f(b)-f(a)|<|f'(\xi)|\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\, x_i=(b-a)|f'(\xi)|,$$

odakle sledi

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|,\ a<\xi<b.\ ▶$$

173. Dokazati, da ako:

1) funkcija f ima drugi izvod f'' na segmentu $[a, b]$;

2) $f'(a) = f'(b) = 0$, onda u intervalu $]a, b[$ postoji bar jedna tačka c takva da je

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\,|f(b) - f(a)|\,.$$

◀ Ako je $f(x) = konst.$ tvrđenje je očigledno. Pretpostavimo da je funkcija f različita od konstantne funkcije. Iz uslova (2) sledi, da je f različita od linearne funkcije. Primenom Košijeve formule konačnih priraštaja za funkcije $f(x)$ i $\varphi(x) = \frac{(x-a)^2}{2}$ na segmentu $[a, \frac{a+b}{2}]$ i za funkcije $f(x)$ i $\psi(x) = \frac{(b-x)^2}{2}$ na segmentu $[\frac{a+b}{2}, b]$, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{8\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right)}{(b-a)^2} &= \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a}, \quad a < \xi_1 < \frac{a+b}{2};\\
\frac{8\left(f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b-a)^2} &= \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2}, \quad \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b.
\end{aligned}$$

Sabiranjem dobijenih jednakosti, nalazimo

$$\frac{8\,(f(b) - f(a))}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2}.$$

S obzirom da je $f'(a) = f'(b) = 0$, to se desni deo poslednje jednakosti može zapisati u obliku:

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2} = \frac{f'(\xi_1) - f'(a)}{\xi_1 - a} - \frac{f'(b) - f'(\xi_2)}{b - \xi_2} = f''(\eta_1) - f''(\eta_2),$$

gde je $a < \eta_1 < \xi_1$; $\xi_2 < \eta_2 < b$. Uzimajući ocenu po apsolutnoj vrednosti, konačno dobijamo

$$\left|\frac{8\,(f(b) - f(a))}{(b-a)^2}\right| \leq |f''(\eta_1)| + |f''(\eta_2)|.$$

Pretpostavimo da je $f(b) \neq f(a)$ (ako to nije, tačka c može biti bilo koja iz $]a, b[$). Prema našoj pretpostavci bar jedan od brojeva $|f''(\eta_1)|$ i $|f''(\eta_2)|$ je različit od nule. Neka je

$$|f''(c)| = \max\left\{|f''(\eta_1)|,\ |f''(\eta_2)|\right\}.$$

Tada imamo

$$\left|\frac{8(f(b) - f(a))}{(b-a)^2}\right| \leq 2|f''(c)|,$$

odakle sledi

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$$

(znak jednakosti ne isključujemo, jer je moguć slučaj $|f''(\eta_1)| = |f''(\eta_2)|$).►

2.6 Monotonost funkcije. Nejednakosti

1^0 **Rastenje i opadanje funkcije.** Funkcija f se naziva rastućom (opadajućom) na segmentu $[a, b]$, ako je $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$ za $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

2^0 Da bi funkcija f koja na razmaku X ima konačan ili beskonačan izvod bila rastuća (opadajuća) na njemu, potrebno je i dovoljno da bude ispunjeno: a) $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$; b) f' nije identički 0 ni na jednom razmaku $[\alpha, \beta]$ sadržanom u X.

3^0 **Rešeni zadaci.**

Odrediti razmake rastenja i opadanja sledećih funkcija:

174. $y = x + |\sin 2x|$.

◄ Očigledno je

$$y = \begin{cases} x + \sin 2x, & k\pi < x < \frac{\pi}{2}; \\ x - \sin 2x, & \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) < x < \pi + k\pi; \\ \frac{k\pi}{2}, & x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Diferencirajući y, imamo

$$y' = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x, & k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi; \\ 1 - 2\cos 2x, & \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi. \end{cases}$$

Rešavanjem sistema nejednačina

$$\begin{cases} 1 + 2\cos 2x > 0; \\ k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi; \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 1 - 2\cos 2x > 0; \\ \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, \end{cases}$$

dobijamo, da je $y' > 0$ za $k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$ i za $\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) < x < \frac{\pi}{3} + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$. Objedinjujući dobijene sisteme nejednačina u jedan, imamo

$$\frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}.$$

Znači, $y(x)$ raste na intervalima

$$\left]\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right[, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Na intervalima $\left]\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right[$ funkcija $y(x)$ opada (na svakom od njih je $y' < 0$). ►

175. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

◄ Diferenciranjem funkcije $y(x)$, nalazimo

$$y' = x \cdot 2^x (2 - x \ln 2).$$

Pošto je $y'(x) > 0$ za $x \in \left]0, \frac{2}{\ln 2}\right[$, to na tom intervalu $y(x)$ raste. Na svakom od intervala $]-\infty, 0[$ i $\left]\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right[$ funkcija opada, jer je na njima $y'(x) < 0$. ►

176. $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin(\ln x)\right)$, za $x > 0$ i $f(0) = 0$.

◄ Imamo

$$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right),$$

odakle sledi da je $f'(x) > 0$ za $\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rešavanjem navedene nejednačine dobijamo intervale rastenja funkcije f :

$$e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi} < x < e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na svakom od intervala

$$e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi} < x < e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

funkcija f opada. ►

177. Dokazati, da se pri povećanju broja n, obim p_n pravilnog n–tougla upisanog u kružnicu, povećava a obim P_n pravilnog n–nougla opisanog oko kružnice, smanjuje. Na osnovu toga dokazati da p_n i P_n imaju jednake limese kad $n \to \infty$.

◄ Prema formulama iz školskog kursa geometrije, imamo:

$$p_n = 2Rn \sin\frac{\pi}{n}, \quad P_n = 2Rn \tan\frac{\pi}{n},$$

gde je R poluprečnik kružnice. Razmotrimo funkcije

$$p(x) = x \sin\frac{\pi}{x}, \quad P(x) = x \tan\frac{\pi}{x} \quad (x > 2).$$

Diferenciranjem, imamo

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x} = \cos\frac{\pi}{x}\left(\tan\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\right); \\ P'(x) &= \tan\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{x}}\left(\sin^2\frac{\pi}{x} - \frac{2\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

Pošto je $\tan\frac{\pi}{x} > \frac{\pi}{x}$, $\sin\frac{2\pi}{x} < \frac{2\pi}{x}$ za $x > 2$, to tada funkcija p raste, a funkcija P opada. Iz jednakosti $p_n = 2Rp(n)$, $P_n = 2RP(n)$, sledi da niz p_n raste, a niz P_n opada. Na osnovu toga što je $p_n < P_n$ $(n > 2)$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n - p_n) = 0$, imamo jednakost $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$. ▶

178. Dokazati, da funkcija

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

raste na svakom od intervala $]-\infty, -1[$ i $]0, +\infty[$.

◀ Dokažimo, da je u svakom od navedenih intervala izvod funkcije pozitivan. Za $x > 0$ imamo

$$y' = y\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) = y\left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\right).$$

Na osnovu formule o konačnom priraštaju (Langranžova teorema) na segmentu $[x, x+1]$, imamo

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi}, \quad x < \xi < x+1.$$

Znači, $y' = y\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x+1}\right) > 0$ za $x > 0$. Za $x < -1$ sledi

$$\begin{aligned} y' &= y\left(\ln\left(1 - \left(-\frac{1}{x}\right)\right)\right) = -\frac{1}{1-(-x)} \\ &= y(x)\left(\ln(t-1) - \ln t - \frac{1}{1-t}\right), \end{aligned}$$

gde je $t = -x$; $1 < t < +\infty$. Primenom Lagranžove formule na segment $[t-1, t]$, dobijamo

$$\ln(t-1) - \ln t = -\frac{1}{\xi_1}, \ t - 1 < \xi_1 < t,$$

odakle sledi,

$$y' = y(-t)\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{\xi_1}\right) > 0$$

za $1 < t < +\infty$ ili $y' > 0$ za $-\infty < x < -1$. ▶

179. Dokazati da je cela racionalna funkcija

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \ (n \geq 1, \ a_n \neq 0)$$

strogo monotona na svakom od intervala $]-\infty, -x_0[$ i $]x_0, +\infty[$.

◀ Zapisujući za $n \geq 1$ izvod funkcije $P(x)$ u obliku

$$P'(x) = na_n x^{n-1}\left(1 + \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n x} + \cdots + \frac{a_1}{na_n x^{n-1}}\right),$$

dolazimo do zaključka, da je za dovoljno veliko $|x| > x_0$ znak funkcije $P'(x)$ određen znakom koeficijenata a_n, odakle sledi da je funkcija $P(x)$ strogo monotona za $|x| > x_0$. ▶

180. Dokazati da je racionalna funkcija

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \quad (a_n b_m \neq 0),$$

koja se identički razlikuje od konstante, strogo monotona na svakom od intervala $]-\infty, -x_0[$ i $]x_0, +\infty[$, gde je x_0 dovoljno veliki pozitivan broj.

◀ Pretpostavimo, određenosti radi, da je $m \neq n$. Zapisujući funkciju $R(x)$ u obliku

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

i diferencirajući dobijamo

$$\begin{aligned} R'(x) &= \frac{P_n'(x)\,Q_m(x) - P_n(x)\,Q_m'(x)}{Q_m^2(x)} \\ &= \frac{a_n b_m x^{m+n-1}\left((n-m) + O^\star\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{Q_m^2(x)}. \end{aligned}$$

Za dovoljno veliko $|x| > x_0$ znak funkcije $R'(x)$ je konstantan, jer je jednak znaku koeficijenta $a_n b_m (n-m)$. Dakle, $R(x)$ je strogo monotona za $|x| > x_0$. ▶

181. Da li je izvod monotone funkcije, monotona funkcija?

◀ U opštem slučaju, nije. Dovoljno je uzeti funkciju $f(x) = x + \sin x$; ona je rastuća na celom $\mathbb{R}$, a njen izvod $f'(x) = 1 + \sin x$ nije monotona funkcija na $\mathbb{R}$. ▶

182. Dokazati, da ako je φ rastuća diferencijabilna funkcija i $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$ za $x \geq x_0$, to je

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0) \quad (x \geq x_0).$$

Dati geometrijsku interpretaciju te činjenice.

◀ Na osnovu Košijeve teoreme primenjene na segment $[x_0, x]$ i funkcijama f i φ, imamo

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\right| = \left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\right| \leq 1 \quad (x_0 < c < x),$$

odakle sledi $|f(x) - f(x_0)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

Geometrijski, ova nejednakost označava da priraštaj rastuće diferencijabilne funkcije nije manji od priraštaja bilo koje druge diferencijabilne funkcije sa manjim ili jednakim izvodom po apsolutnoj vrednosti. ▶

183. Neka je funkcija f neprekidna na razmaku $[a, +\infty[$, i neka je pored toga, $f'(x) > k > 0$ za $x > a$, gde je k konstanta. Dokazati, da ako je $f(a) < 0$, onda jednačina $f(x) = 0$ ima jedan i samo jedan realan koren u intervalu $\left]a, a - \frac{f(a)}{k}\right[$.

◀ Prema Lagranžovoj teoremi za funkciju f na segmentu $\left[a, a + \frac{|f(a)|}{k}\right]$, imamo

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) - f(a) = \frac{|f(a)|}{k} f'\left(a + \theta\frac{|f(a)|}{k}\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Iz uslova $f'(x) > k > 0$ nalazimo

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) - f(a) > |f(a)|,$$

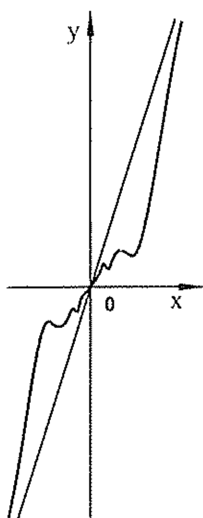
odakle je $f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) > 0$. Funkcija f na krajevima segmenta $\left[a, a + \frac{|f(a)|}{k}\right]$ uzima vrednosti različite po znaku, zato na osnovu Košijeve teoreme o međuvrednosti postoji $\xi \in \left]a, a + \frac{|f(a)|}{k}\right[$, tako da je $f(\xi) = 0$. Dokažimo da je tačka ξ jedinstvena na tom intervalu. Ako pretpostavimo da postoji tačka ξ_1 tog intervala, za koju je $f(\xi_1) = 0$, onda prema Rolovoj teoremi primenjenoj na segment sa krajevima ξ_1 i ξ, postoji tačka ξ_2 između njih, da je $f'(\xi_2) = 0$. Međutim, ovo protivreči uslovu $f'(x) > k > 0$ za $x > a$. ▶

184. Funkcija f naziva se rastućom u tački x_0, ako je u nekoj njenoj okolini $|x - x_0| < \delta$ znak priraštaja funkcije $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ jednak znaku priraštaja argumenta $\Delta x = x - x_0$

Dokazati, da ako funkcija f raste u svakoj tački nekog konačnog ili beskonačnog intervala $]a, b[$, to je ona rastuća na tom intervalu.

◀ Ako funkcija f raste na nekom intervalu, onda je u svakoj tački tog intervala znak priraštaja funkcije jednak znaku priraštaja argumenta u toj tački. Pretpostavimo da funkcija f raste u svakoj tački intervala $]a, b[$ a da

nije rastuća na celom intervalu $]a,b[$. Tada postoji bar jedna tačka $x_0 \in]a,b[$ i neka njena okolina $]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$, u čijim se granicama znak priraštaja funkcije u toj tački, razlikuje od znaka priraštaja argumenta, ili znak priraštaja funkcije nije određen. Sa druge strane, pošto funkcija f raste u tački x_0, to postoji $\delta_2 > 0$, tako da je u granicama okoline $]x_0-\delta_2, x_0+\delta_2[$ znak priraštaja funkcije u tački x_0, jednak znaku priraštaja argumenta. Sada, na osnovu pretpostavke, imamo da se u okolini $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, znak priraštaja funkcije razlikuje od znaka priraštaja argumenta u tački x_0, ili znak nije određen, što protivreči pretpostavljenoj činjenici da funkcija raste u tački x_0. ►



sl. 81

185. Pokazati da funkcija $f(x) = x + x^2 \sin\frac{2}{x}$, za $x \neq 0$ i $f(0) = 0$, raste u tački $x = 0$, ali nije rastuća ni u jednom intervalu $]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$. Nacrtati grafik te funkcije.

◄ Priraštaj funkcije f u tački $x = 0$ je: $\Delta f(0) = x\left(1 + x\sin\frac{2}{x}\right)$. Očigledno, za dovoljno male po apsolutnoj vrednosti x, imamo: $\Delta f(0) < 0$ za $x < 0$ i $\Delta f(0) > 0$ za $x > 0$, što znači da funkcija f raste za $x = 0$. Zatim, ako je $x \neq 0$, sledi, $f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{2}{x} - 2\cos\frac{2}{x}$. Za svako $\varepsilon > 0$, postoji $k \in \mathbb{N}$, tako da tačke $x'_k = \frac{1}{k\pi}$ i $x''_k = \frac{2}{\pi + 2k\pi}$ pripadaju intervalu $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Pošto je $f'(x'_k) = -1$, $f'(x''_k) = 3$, dolazimo do zaključka, da funkcija f nije rastuća na intervalu $]-\varepsilon, \varepsilon[$ (njen izvod u tom intervalu nema određen znak). **Zaključak:** Ako funkcija f raste u nekoj tački, to ona ne raste obavezno u nekoj okolini te tačke. Grafik funkcije je nacrtan na (**sl. 81**). ►

186. Dokazati teoremu: ako **1)** funkcije φ i ψ su n–puta diferencijabilne;

2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$, $k = \overline{0, n-1}$; 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ za $x > x_0$, onda je $\varphi(x) > \psi(x)$ za $x > x_0$.

◀ Primenom Lagranžove teoreme na funkciju $u^{(n-1)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)$ posmatrane na segmentu $[x_0, x]$, dobijamo

$$u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(x_0) = u^{(n)}(\xi)(x - x_0),$$

odakle, prema uslovima 2) i 3), sledi $u^{(n-1)}(x) > 0$ $(x > x_0)$. Slično, dokazujemo da je $u^{(n-2)}(x) > 0$ i.t.d., $u(x) > 0$, tj. $\varphi(x) > \psi(x)$ za $x > x_0$. ▶

187. Dokazati sledeće nejednakosti:

a) $e^x > 1 + x$ za $x \neq 0$;

b) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ za $x > 0$;

c) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ za $x > 0$;

d) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

e) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(x^\beta + y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$ za $x > 0$, $y > 0$ i $0 < \alpha < \beta$.

Dati geometrijsku interpretaciju nejednakosti a)-d).

◀ a) Označimo $\varphi(x) = e^x$, $\psi(x) = 1 + x$ i, primetimo da je $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ za $x > 0$. Prema dokazanom u primeru 186, imamo da je $\varphi(x) > \psi(x)$ za $x > 0$. Smenom $x = -t$, za $x \leq 0$, dobijamo

$$\varphi(t) = e^{-t};\ \psi(t) = 1 - t;\ t \geq 0.$$

Pošto je $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(t) > \psi'(t)$ za $t > 0$, to je $\varphi(t) > \psi(t)$ za $t > 0$, tj. $e^t > 1 + x$ za $x < 0$.

b) Uzmimo:

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2};\ \psi(x) = \ln(1+x);\ \eta(x) = x\ \ (x \geq 0).$$

Očigledno je, $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0)$; $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x)$ za $x > 0$, zato je prema primeru 186,

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x)\ \ (x > 0).$$

c) Kao i u prethodnoj tački, označimo

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{6},\ \psi(x) = \sin x,\ \eta(x) = x,$$

pri čemu je $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0)$; $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x)$ $(x > 0;\ x \neq 2k\pi)$. Na osnovu nejednakosti primera 186, ispunjeno je

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x);\ x > 0,\ x \neq 2k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Za $x = 2k\pi$ imamo nejednakosti

$$2k\pi\left(1-\frac{4k^2\pi^2}{6}\right) < 0 < 2k\pi,$$

$$\text{tj. } \varphi(2k\pi) < \psi(2k\pi) < \eta(2k\pi), \; k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, za $x > 0$ zadovoljeno je

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x).$$

d) Označimo, $\varphi(x) = \tan x$, $\psi(x) = x + \frac{x^3}{3}$ $\left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$. Očigledno je, $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (jer je $\varphi'(x) = 1 + \tan^2 x$; $\psi'(x) = 1 + x^2$; $\tan^2 x > x^2$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$). Opet na osnovu zadatka 186 sledi: $\varphi(x) > \psi(x)$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

e) Nejednakost $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(x^\beta + y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$ za proizvoljne fiksirane $x > 0$, $y > 0$ i sve $\alpha, \beta : 0 < \alpha < \beta$ ekvivalentna je nejednakosti

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(\left(\frac{x}{y}\right)^\beta + 1\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Za njen dokaz uzmimo $\frac{x}{y} = t$ i razmotrimo funkciju

$$\varphi(z) = (1 + t^z)^{\frac{1}{z}}, \; 0 < z < +\infty.$$

Izvod

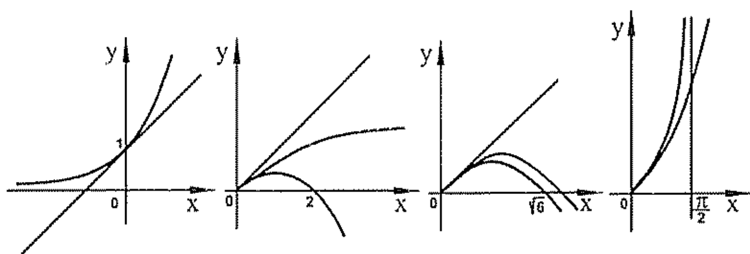
$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \varphi(z)\left(\frac{t^z \ln t}{z(1+t^z)} - \frac{\ln(1+t^z)}{z^2}\right) \\ &= \frac{\varphi(z)}{z^2(1+t^z)} \ln \frac{(t^z)^{t^z}}{(1+t^z)^{1+t^z}} \end{aligned}$$

je negativan za $0 < z < +\infty$; zato funkcija φ opada; sledi, $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$ ako je $0 < \alpha < \beta < +\infty$, tj. zadovoljena je nejednakost

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(x^\beta + y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

za $x > 0$; $y > 0$; $0 < \alpha < \beta$, što je i trebalo dokazati. Geometrijska

interpretacija nejednakosti **a)-d)** data je na (sl. 82). ►



sl 82

188. Dokazati nejednakost: $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

◄ Desni deo nejednakosti dokazan je u prethodnom primeru **c)**. Dokažimo levi deo nejednakosti. Razmotrimo funkciju $\varphi(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$. Utvrdimo da φ nema nula u intervalu $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Stvarno, ako bi $x_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ bio koren jednačine $\varphi(x) = 0$, onda primenom Rolove teoreme na funkciju φ i redom na segmente $[0, x_1]$ i $\left[x_1, \frac{\pi}{2}\right]$, dobijamo da funkcija φ' ima bar dve nule u intervalu $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Međutim, jednačina $\varphi'(x) = 0$ u intervalu $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ima samo jedan koren: $x = \arccos\frac{2}{\pi}$. Znači, φ ima na intervalu $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ potpuno određen (stalan) znak. Uzmimo $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ i odredimo znak vrednosti $\varphi(x_0)$; na osnovu rečenog znak funkcije φ na intervalu $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ jednak je znaku vrednosti $\varphi(x_0)$. Neka je na primer $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Tada je $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6} > 0$. Dokazali smo dakle za uvedenu funkciju φ da je $\varphi(x) > 0$ na intervalu $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tj. $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$. ►

189. Dokazati, da je za $x > 0$ ispunjena nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

◄ Logaritmovanjem se dobija ekvivalentna nejednakost:

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x},$$

koju dokazujemo. Označavanjem, $\frac{1}{x} = t$ $(t > 0)$, dobijamo nejednakost

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t.$$

Desni deo poslednje nejednakosti, dokazan je u primeru 187,b). Dokažimo levi deo nejednakosti. Uzmimo, $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$; $\psi(t) = \ln(1+t)$ i razmotrimo funkcije φ i ψ, za $t \ge 0$. Očigledno je $\varphi(0) = \psi(0) = 0$; $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} <$

$\psi'(t) = \frac{1}{1+t}$ za $t > 0$. Sledi, prema nejednakosti dokazane u primeru 186, možemo tvrditi da je $\varphi(t) < \psi(t)$ za $t > 0$, tj. $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ za $x > 0$, što je i trebalo dokazati. ▶

190. U aritmetičkoj i geometrijskoj progresiji sa pozitivnim članovima, broj članova i krajnji članovi su respektivno jednaki. Dokazati da je zbir članova aritmetičke progresije veći od zbira članova geometrijske progresije.

◀ Označimo prvi član progresija sa a, zbir n članova aritmetičke progresije sa S_n, a zbir n članova geometrijske progresije sa S'_n, tada imamo

$$S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}; \quad S'_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

gde je d razlika aritmetičke progresije, a q količnik geometrijske progresije. Iz uslova zadatka sledi, $q > 0$, $q \neq 1$. Izjednačavanjem $n - tih$ članova progresija imamo

$$d = \frac{a(q^n - 1)}{n - 1}.$$

Zamenjivanjem nađenog d u izraz za S_n, dobijamo

$$S_n = \frac{na\left(1 + q^{n-1}\right)}{2}.$$

Treba dokazati sledeću nejednakost

$$u_n = \frac{n\left(1 + q^{n-1}\right)}{2} - 1 - q - \cdots - q^{n-1} > 0$$

za $0 < q < 1$ i za $q > 1$. Očigledno je $u_3 > 0$. Zato, ako pokažemo da niz u_n $(n > 3)$ raste, onda je navedena nejednakost dokazana. U tom cilju, imamo

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}z_n, \quad z_n = 1 + nq - q^n - nq^{n-1}. \tag{1}$$

Pošto je $z_1 = 0$ i $z_{n+1} - z_n = nq^{n-1}(q-1)^2 > 0$, to niz z_n raste, sledi, $z_n > 0$ za $n > 1$. Tada iz (1) sledi da i niz u_n takođe raste. ▶

191. Polazeći od nejednakosti $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geq 0$, gde su x, a_k, b_k; $k = 1, 2, \dots, n$ realni brojevi, dokazati Košijevu nejednakost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

◀ Kvadriranjem izraza koji stoji pod znakom za sabiranje, imamo $Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$, gde je

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2; \ B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k; \ C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Kvadratni trinom je nenegativan, ako i samo ako je njegova diskriminanta nepozitivna: $B^2 - AC \leq 0$ $(A > 0)$. Zamenjivanjem u poslednjoj nejednakosti, vrednosti za A, B i C, dobijamo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

što je i trebalo dokazati. ▶

192. Dokazati, da aritmetička sredina pozitivnih brojeva, nije veća od kvadratne sredine tih brojeva, tj.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

◀ Stavljajući u Košijevoj nejednakosti $a = x_k$, $b_k = \frac{1}{n}$, dobijamo

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

odakle sledi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2}. \ ▶$$

193. Dokazati da geometrijska sredina pozitivnih brojeva nije veća od aritmetičke sredine tih brojeva, tj.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

◀ Razmotrimo funkciju

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x}{n \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x}}.$$

Njen izvod $\varphi'(x) = \frac{1}{xn^2\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}x}}\left((n-1)x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)$ jednak je 0, za $x_0 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$, negativan je za $0 < x < x_0$, pozitivan za $x > x_0$, zato φ opada na intervalu $]0, x_0[$ a raste za $x > x_0$; za $x = x_0$ postiže najmanju vrednost

$$\varphi(x_0) = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}}.$$

Na taj način je, $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$ za sve $x > 0$ (dakle i za $x = x_n$) :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n}} \geq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}}. \qquad (1)$$

Sada nejednakost navedenu u zadatku dokazujemo indukcijom: Tvrđenje je tačno za 1. Pretpostavimo da je

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}};$$

odatle i iz (1) je $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n}} \geq 1$, tj. $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. ▶

194. Sredinom reda s dva pozitivna broja a i b naziva se funkcija, definisana jednakošću

$$\Delta_s(a,b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad s \neq 0;$$
$$\Delta_0(a,b) = \lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b).$$

Specijalno, za $s = -1$ imamo harmonijsku sredinu; za $s = 0$ geometrijsku sredinu; za $s = 1$ aritmetičku sredinu; za $s = 2$ kvadratnu sredinu.

Dokazati, da je:

1) $\min(a,b) \leq \Delta_s(a,b) \leq \max(a,b)$;

2) funkcija $s \mapsto \Delta_s(a,b)$ za $a \neq b$ je rastuća;

3) $\lim_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b) = \min(a,b)$; $\lim_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b) = \max(a,b)$.

◀ Za $s \to 0$ dobijamo

$$\Delta_0(a,b) = e^{\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{a^s+b^s}{2}-1\right)} = e^{\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\left(\frac{a^s-1}{s}-\frac{b^s-1}{s}\right)} = e^{\frac{\ln ab}{2}} = \sqrt{ab}$$

i uveravamo se u to, da je $\Delta_0\,(a,b)$ geometrijska sredina brojeva a i b. Označavanjem $\beta=\frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}$ $(0<\beta<1)$, možemo zapisati $\Delta_s\,(a,b)$ u obliku

$$\Delta_s\,(a,b)=\max(a,b)\cdot\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Pokažimo da funkcija $\Delta_s\,(a,b)$ raste na $]-\infty,+\infty[$. Razmotrimo funkciju

$$\varphi(s)=\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}},\ s>0$$

i pokažimo da funkcija $\ln\varphi(s)$ raste za $s>0$. Imamo

$$\frac{d}{ds}(\ln\varphi(s))=\frac{1}{s^2}\left(\frac{\beta^s\ln\beta^s}{1+\beta^s}-\ln\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)\right).$$

Označimo $\varphi_1(s)=\frac{s\beta^s\ln\beta}{1+\beta^s}$, $\psi_1(s)=\ln\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)$. Za $s=0$ je $\varphi_1(0)=\psi_1(0)=0$. Nađimo njihove izvode

$$\varphi_1'(s)=\frac{\beta^s(1+\ln\beta^s+\beta^s)\ln\beta}{(1+\beta^s)^2};\ \psi_1'(s)=\frac{\beta^s\ln\beta}{1+\beta^s}.$$

Imajući u obzir nejednakosti

$$\ln\beta<0;\ \frac{\beta^s(1+\ln\beta^s+\beta^s)}{(1+\beta^s)^2}<\frac{\beta^s}{1+\beta^s},$$

dobijamo da je $\varphi_1'(s)>\psi_1'(s)$, $s>0$. Sada prema zadatku 186, možemo tvrditi da je $\varphi_1(s)>\psi_1(s)$ za $s>0$, odakle sledi, da funkcija $\ln\varphi(s)$, a sa njom i $\varphi(s)$ i $\Delta_s\,(a,b)$ rastu za $s>0$. Ako je $s\le 0$, to se smenom $s=-t$, $t\ge 0$ dobija

$$\varphi_1(s)=\frac{-t\ln\beta}{1+\beta^t}=\varphi_2(t),\ \psi_1(s)=\ln\left(\frac{1+\beta^t}{2\beta^t}\right)=\psi_2(t).$$

Za $t=0$ je $\varphi_2(0)=\psi_2(0)=0$. Nađimo njihove izvode:

$$\varphi_2'(t)=\frac{(\beta^t t\ln\beta-1-\beta^t)\ln\beta}{(1+\beta^t)^2};\ \psi_2'(t)=-\frac{\ln\beta}{1+\beta^t}.$$

Očigledno je $\varphi_2'(t)>\psi_2'(t)$ za $t>0$. Uzimajući u obzir i jednakost $\varphi_2(0)=\psi_2(0)$, prema primeru 186 sledi da je $\varphi_2(s)>\psi_2(s)$, $s<0$, tj. funkcija

$\Delta_s(a,b)$ raste i za $s<0$. Dakle, funkcija $\Delta_s(a,b)$ je rastuća na celom $\mathbb{R}$. Pošto je

$$\lim_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)=\max(a,b)\cdot e^{\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\ln\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)}=\max(a,b),$$

to uzimajući u obzir rastućost funkcije $\Delta_s(a,b)$, ispunjena je nejednakost

$$\Delta_s(a,b)\le\max(a,b),$$

gde je znak jednakosti moguć jedino za $a=b$. Zapisujući funkciju $\Delta_s(a,b)$ u obliku

$$\Delta_s(a,b)=\min(a,b)\cdot\left(\frac{1+\alpha^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}},\quad s=\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}\quad(\alpha>1),$$

nalazimo da je

$$\lim_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)=\min(a,b)\cdot e^{\lim\limits_{s\to-\infty}\frac{1}{s}\ln\left(\frac{1+\alpha^s}{2}\right)}=\min(a,b),$$

odakle, koristeći rastućost funkcije $\Delta_s(a,b)$ na celom $\mathbb{R}$, dobijamo da je $\Delta_s(a,b)\ge\min(a,b)$, gde je znak jednakosti moguć jedino za $a=b$. ►

195. Dokazati nejednakosti:

a) $x^\alpha-1>\alpha(x-1)$ za $\alpha\ge2$, $x>1$;

b) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$ za $n>1$, $x>a>0$;

c) $1+2\ln x\le x^2$ za $x>0$.

◄ a) Označimo $\varphi(x)=x^\alpha-1$, $\psi(x)=\alpha(x-1)$, imamo: $\varphi(1)=\psi(1)=0$; $\varphi'(x)>\psi'(x)$ za $\alpha\ge2$; $x>1$. Na osnovu primera 186, zaključujemo da je

$$\varphi(x)>\psi(x),\ \alpha\ge2;\ x>1.$$

b) Slično dokazu pod a) imamo za $n>1$; $x>a>0$; $\varphi(x)=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}$, $\psi(x)=\sqrt[n]{x-a}$, $\varphi(a)=\psi(a)=0$; $\varphi'(x)<\psi'(x)$, zato je $\varphi(x)<\psi(x)$.

c) Označimo $\varphi(x)=1+2\ln x$, $\psi(x)=x^2$. Imamo, $\varphi(1)=\psi(1)=1$, i za $x>1$ ispunjena je nejednakost $\varphi'(x)<\psi'(x)$. Zato je prema zadatku 186, $\varphi(x)<\psi(x)$ za $x>1$. Neka je $0<x<1$; smenom $t=\frac{1}{x}$ $(1<t<+\infty)$, imamo $\varphi(x)=1-2\ln t=\varphi_1(t)$; $\psi(x)=\frac{1}{t^2}=\psi_1(t)$; $\varphi_1(1)=\psi_1(1)=1$; $\varphi_1'(t)<\psi_1'(t)$, odakle je $\varphi_1(t)<\psi_1(t)$ za $1<t<+\infty$, tj. $\varphi(x)<\psi(x)$ za $0<x<1$. Pošto je $\varphi(1)=\psi(1)$, to, uzimajući u obzir dokazano, imamo da je $\varphi(x)\le\psi(x)$ za $x>0$, što je i trebalo dokazati. ►

2.7 Konveksnost i konkavnost funkcija

Prevojne tačke.

1^0 **Dovoljni uslovi konveksnosti i konkavnosti.** Grafik diferencijabilne funkcije $y = f(x)$, $x \in]a,b[$ je konveksan (konkavan) na $]a,b[$, ako se on u granicama intervala ne nalazi ispod (iznad) svoje proizvoljne tangente. Ako funkcija $y = f(x)$ ima konačan drugi izvod u svakoj tački intervala $]a,b[$, onda je njen grafik konveksan (konkavan), ako je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) za $x \in]a,b[$.

2^0 **Dovoljan uslov za prevojne tačke.** Tačka $M(x_0, y_0)$ u kojoj grafik funkcije ima tangentu, naziva se prevojnom, ako postoji okolina apscise x_0, u čijim je granicama grafik funkcije $y = f(x)$ levo od x_0 konveksan, a desno od x_0 konkavan, ili obrnuto. Tačka $M_0(x_0, f(x_0))$, za koju je $f''(x_0) = 0$, ili $f''(x_0)$ ne postoji, je prevojna tačka, ako $f''(x)$ menja znak prolazeći kroz x_0.

3^0 **Rešeni zadaci.**

196. Ispitati konveksnost i konkavnost grafika funkcije $y = 1 + \sqrt[3]{x}$ u tačkama $A(-1,0)$; $B(1,2)$ i $C(0,1)$.

◀ Imamo da je

$$y''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}};\ y''(-1) > 0;\ y''(1) < 0,$$

sledi, u tački A funkcija je konveksna, a u tački B konkavna. Iako drugi izvod u tački $x = 0$ ne postoji, funkcija ima u toj tački prevoj (obrazložiti). Dakle, tačka $C(0,1)$ je prevojna tačka grafika funkcije. ▶

Naći razmake konveksnosti i konkavnosti kao i prevojne tačke grafika sledećih funkcija:

197. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$.

◀ Drugi izvod $y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$ je pozitivan za $x > 0$ i negativan za $x < 0$, pa je na intervalu $]0,+\infty[$ funkcija konveksna, a na intervalu $]-\infty,0[$ konkavna. Tačka $M_0(0,0)$ je prevojna tačka grafika funkcije. ▶

198. $y = \ln(1 + x^2)$.

◀ Pošto je

$$y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

to je grafik funkcije konveksan za $|x| > 1$, a konkavan za $|x| < 1$. Tačke $A_1(-1, \ln 2)$; $A_2(1, \ln 2)$ su prevojne tačke grafika funkcije. ▶

199. $y = x \sin(\ln x)$ $(x > 0)$.

◀ Dvostrukim diferenciranjem, nalazimo

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x} \cos\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right);$$

pa je $y'' > 0$ za

$$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < \ln x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi;$$

tj. $y'' < 0$ za

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \ln x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dakle, na svakom od intervala $e^{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi} < x < e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$ grafik funkcije je konveksan, a na svakom od intervala $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} < x < e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}$ konkavan. Prevojne tačke su $\left(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}; \frac{(-1)^k e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}}{\sqrt{2}}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. ▶

200. $y = x^x$ $(x > 0)$.

◀ Za $x > 0$, imamo $y'' = x^x\left((1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0$, što znači da je na razmaku $]0, +\infty[$ grafik funkcije konveksan. ▶

201. Ispitati konveksnost i konkavnost cikloide

$$x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t) \ \ (a > 0).$$

◀ Dvostrukim diferenciranjem po parametru, nalazimo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2};$$

odakle sledi, da je zbog $a > 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, ako je $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$, tj. na svakom od intervala $]2ak\pi, (2k + 2)a\pi[$ cikloida je konkavna. ▶

202. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na razmaku $a \leq x < +\infty$, i neka je: **1)** $f(a) = A > 0$; **2)** $f'(a) < 0$; **3)** $f''(x) \leq 0$ za $x > a$. Dokazati, da jednačina $f(x) = 0$ ima jedan i samo jedan realan koren u intervalu $]a, +\infty[$.

◀ Za $x \geq a$, primenom Lagranžove teoreme dobijamo

$$f(x) = A + (x - a) f'(\xi_1(x)); \ a < \xi_1 < x; \qquad (1)$$

$$f'(x) = f'(a) + (x - a) f''(\xi_2(x)); \ a < \xi_2 < x. \qquad (2)$$

Iz uslova $f''(\xi_2) \leq 0$ sledi, $f'(x) < 0$ za $x > a$, zato na intervalu $]a, +\infty[$ funkcija f opada. Iz (1) i (2) nalazimo

$$f(x) = A + (x - a) f'(a) + (x - a)(\xi_1 - a) f''(\xi_2(\xi_1)). \qquad (3)$$

Na osnovu toga što je $f'(a) < 0$, $f''(\xi_2(\xi_1)) \leq 0$, iz (3) sledi, da je za dovoljno veliko $x_0 > a$ funkcija negativna. Pošto je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, x_0]$, prema Košijevoj teoremi o međuvrednostima postoji takvo $x_1 \in]a, x_0[$, da je $f(x_1) = 0$. Funkcija f ne može imati nula različitih od x_1, jer je opadajuća na intervalu $]a, +\infty[$. ►

203. Funkcija f naziva se konveksnom (konkavnom) na intervalu $]a, b[$, ako je za proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in]a, b[$ i proizvoljne pozitivne brojeve λ_1, λ_2 za koje je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, ispunjena nejednakost:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Dokazati, da je: **a)** funkcija f je konveksna na $]a, b[$, ako je $f''(x) > 0$ za $a < x < b$; **b)** f je konkavna na $]a, b[$, ako je $f''(x) < 0$ za $a < x < b$.

◄ Neka je $f''(x) > 0$; $x \in]a, b[$ i neka je $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Ako su x_1, x_2 dve proizvoljne tačke iz $]a, b[$ i ako je $x_1 < x_2$, onda je očigledno da $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ leži između njih. Po Lagranžovoj teoremi, sledi

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1) = \lambda_2 (x_2 - x_1) f'(\xi_1), \tag{1}$$

gde je $x_1 < \xi_2 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$;

$$f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 (x_2 - x_1) f'(\xi_2), \tag{2}$$

gde je $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < \xi_2 < x_2$. Množeći levu i desnu stranu jednakosti (2) i (1) sa λ_2 i λ_1 respektivno i oduzimanjem dobijenih izraza, nalazimo:

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1 \lambda_2 (\xi_2 - \xi_1) f''(\xi_3), \tag{3}$$

gde je $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$. Na osnovu toga što je $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ i $f''(\xi_3) > 0$, imamo

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) > f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

tj. funkcija f je konveksna na $]a, b[$. Ako je pak $f''(x) < 0$ na $]a, b[$, to je funkcija $\varphi(x) = -f(x)$ na osnovu dokazanog konveksna na $]a, b[$: $\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) > \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, odakle sledi: $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) < f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, tj. funkcija f je konkavna na $]a, b[$. ►

204. Pokazati da su funkcije $\varphi_1(x) = x^n \ (n > 1)$, $\varphi_2(x) = e^x$, $\varphi_3(x) = x \ln x$ konveksne na intervalu $]0, +\infty[$, a funkcije $\psi_1(x) = x^n \ (0 < n < 1)$, $\psi_2(x) = \ln x$ konkavne na istom intervalu.

◄ Dvostrukim diferenciranjem, imamo

$$\begin{aligned} \varphi_1''(x) &= n(n-1)x^{n-2}, \ \varphi_2''(x) = e^x, \ \varphi_3''(x) = \frac{1}{x}, \\ \psi_1''(x) &= n(n-1)x^{n-2}, \ \psi_2''(x) = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Za $x \in]0, +\infty[$ imamo da je $\varphi_j''(x) > 0$ $(j = 1, 2, 3)$, $\psi_k''(x) < 0$ $(k = 1, 2)$; zato prema prethodnoj teoremi sledi da su funkcije φ_j konveksne na $]0, +\infty[$, a ψ_k konkavne na istom intervalu. ►

205. Dokazati nejednakosti i objasniti njihov geometrijski smisao:

a) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ $(x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1)$;

b) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \neq y)$;

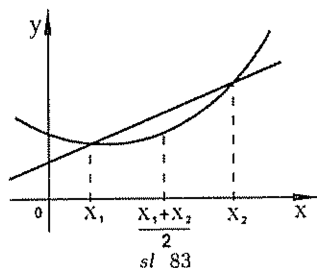
c) $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x+y}{2}$, ako je $x > 0$, $y > 0$.

◄ U prethodnom primeru smo dokazali da su funkcije $\varphi_1(t) = t^n$ $(n > 1)$, $\varphi_2(t) = e^t$ i $\varphi_3(t) = t \ln t$ na intervalu $]0, +\infty[$, odakle sledi, da su za $x > 0$, $y > 0$ $(x \neq y)$ i $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ zadovoljene nejednakosti:

a) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ $(x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1)$;

b) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \neq y)$;

c) $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x+y}{2}$, ako je $x > 0$, $y > 0$, što je trebalo dokazati. Geometrijski smisao navedenih nejednakosti je sledeći: ako je funkcija f konveksna na nekom intervalu, onda tetiva određena tačkama $(x, f(x))$ i $(y, f(x))$ date krive leži iznad luka krive određenog tim tačkama. Specijalno, središte tetive se nalazi iznad tačke luka krive čija je apscisa $\frac{x+y}{2}$ (sl. 83). ►



sl 83

206. Neka je $f''(x) \geq 0$ za $a \leq x \leq b$. Dokazati, da je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right).$$

◄ Na osnovu formule (3) primera 203, imamo (za $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$):

$$\frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) f''(\xi)$$

$(x_1 < \xi < x_2)$,odakle, zbog uslova $f''(\xi) \geq 0$, sledi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right). \ ►$$

207. Dokazati, da je ograničena konveksna (konkavna) funkcija neprekidna kao i da ima levi i desni izvod u svakoj tački.

◄ Pretpostavimo određenosti radi da je funkcija f konveksna na intervalu $]a, b[$. Po pretpostavci postoji $c > 0$, tako da je $|f(x)| \leq c$, $x \in]a, b[$. Neka je x_0 proizvoljna tačka intervala $]a, b[$ i neka je priraštaj $\Delta x > 0$ te tačke uzet tako da $x_0 - \Delta x$ i $x_0 + \Delta x$ pripadaju intervalu $]a, b[$. Pošto je funkcija f konveksna, to je $f(x + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) > 2f(x_0)$, odnosno,

$$f(x_0) - f(x_0 - \Delta x) < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{1}$$

Iz (1) dobijamo sistem nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x_0 - k\Delta x) - f(x_0 - (k+1)\Delta x) &< f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &< f(x_0 + (k+1)\Delta x) - f(x_0 + k\Delta x) \end{aligned} \tag{2}$$

$(k = 0, 1, ..., n-1)$ pod uslovom da tačke $x_0 - (k+1)\Delta x$, $x_0 + (k+1)\Delta x$ $(k = 1, 2, ..., n)$ pripadaju intervalu $]a, b[$. Sabirajući sve nejednakosti iz (2) po k od 0 do $n-1$, dolazimo do nejednakosti

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - n\Delta x)}{n} < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < \frac{f(x_0 + n\Delta x) - f(x_0)}{n} \tag{3}$$

i uzimajući u obzir ograničenost funkcije f, dobijamo,

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \frac{2c}{n}. \tag{4}$$

Sada za bilo koje $\varepsilon > 0$, imamo da je za $n > \left[\frac{2c}{\varepsilon}\right]$ ispunjeno

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon, \tag{5}$$

ako Δx zadovoljava uslov: $0 < \Delta x < \min\left\{\frac{b - x_0}{n}, \frac{x_0 - a}{n}\right\}$. Neprekidnost funkcije f u proizvoljnoj tački x_0 intervala $]a, b[$ je dokazana. Dokažimo postojanje jednostranih izvoda u tački x_0. Neka je $\Delta x > h > 0$. Tada su tačne nejednakosti

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$
$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} > \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}.$$

Stvarno, zapisujući $h = \theta\Delta x$ $(0 < \theta < 1)$, vidimo da je prva nejednakost ekvivalentna sa

$$\theta f(x_0 + \Delta x) + (1 - \theta) f(x_0) > f(x_0 + h);$$

a druga sa

$$\theta f(x_0 - \Delta x) + (1-\theta) f(x_0) > f(x_0 - h),$$

od kojih je svaka ispunjena, zbog konveksnosti funkcije f. Znači, funkcija $\varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ opada kad $\Delta x \to +0$ i ograničena je odozdo brojem $-\frac{2c}{h}$, a funkcija $\psi(\Delta x) = \frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$ raste kad $\Delta x \to +0$ i ograničena je odozgo brojem $\frac{2c}{h}$. Zato postoje limesi

$$\lim_{\Delta x \to +0} \varphi(\Delta x) = f'_+(x_0); \quad \lim_{\Delta x \to +0} \psi(\Delta x) = f'_-(x_0). \ ▶$$

208. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na intervalu $]a,b[$ i neka je $f''(\xi) \neq 0$, $a < \xi < b$. Dokazati, da u intervalu $]a,b[$ postoje tačke x_1 i x_2 takve da je

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi).$$

◀ Pretpostavimo određenosti radi da je $f''(\xi) < 0$; $\xi \in]a,b[$. Tada funkcija f' opada u tački $x = \xi$: postoji $\delta > 0$, tako da je $f'(x) > f'(\xi)$ za $x \in]\xi-\delta, \xi[$; $f'(x) < f'(\xi)$ za $x \in]\xi, \xi+\delta[$. Razmotrimo u intervalu $]\xi-\delta, \xi+\delta[$ funkciju $\varphi(x) = f(\xi) - f(x) + f'(\xi)\cdot(x-\xi)$. Njen izvod $\varphi'(x) = -f(x) + f'(\xi)$ zadovoljava uslov: $\varphi'(x) < 0$ za $\xi-\delta < x < \xi$; $\varphi'(x) > 0$ za $\xi < x < \xi+\delta$. Zato funkcija φ opada na intervalu $]\xi-\delta, \xi[$ a raste na intervalu $]\xi, \xi+\delta[$. Za $x = \xi$ imamo $\varphi(\xi) = 0$. Znači, $\varphi(x) \geq 0$ za $x \in]\xi-\delta, \xi+\delta[$. Označimo $A = \varphi(\xi-\delta+0)$; $B = \varphi(\xi+\delta-0)$ i razmotrimo jednačinu

$$\varphi(x) = \varepsilon, \tag{1}$$

gde je $\varepsilon > 0$ proizvoljan fiksiran broj koji zadovoljava $0 < \varepsilon < \min(A,B)$. Iz gore izloženog je jasno, da jednačina (1) uvek ima dva rešenja: $\xi-\delta < x_1 < \xi$ i $\xi < x_2 < \xi+\delta$. Na taj način, na intervalu $]a,b[$ (u okolini tačke ξ) postoje dve vrednosti x_1 i x_2 ($a < x_1 < \xi < x_2 < b$) takve da je

$$f(\xi) - f(x_1) + f'(\xi)(x_1-\xi) = \varepsilon, \tag{2}$$

$$f(\xi) - f(x_2) + f'(\xi)(x_2-\xi) = \varepsilon. \tag{3}$$

Oduzimajući (3) od (2), dobijamo

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi),$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena. Ako se pretpostavi da je $f''(\xi) > 0$, onda razmatramo jednačinu $\varphi(x) = -\varepsilon$, gde je $0 < \varepsilon < \min(|A|, |B|)$. ▶

209. Dokazati, da ako je funkcija f dva puta diferencijabilna u beskonačnom intervalu $]x_0, +\infty[$ i ako je $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, onda u intervalu $]x_0, +\infty[$ postoji bar jedna tačka ξ, takva da je $f''(\xi) = 0$.

◀ Pošto su ispunjeni uslovi zadatka 147, to u intervalu $]x_0, +\infty[$ postoji takva tačka ξ_1, da je $f'(\xi_1) = 0$. S obzirom da je $f(x) = o(x)$, kad $x \to +\infty$, to prema rešenju primera 167 zaključujemo, da je $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} |f'(x)| = 0$. Sada opet prema primeru 147, sledi da na intervalu $]\xi_1, +\infty[$ postoji bar jedna tačka ξ, takva da je $f''(\xi) = 0$. ▶

2.8 Oslobađanje neodređenosti

1^0 **Prvo Lopitalovo pravilo** (oslobađanje neodređenosti $\frac{0}{0}$). Ako su funkcije f i g definisane i neprekidne u nekoj okolini tačke a, gde je a broj ili simbol ∞, i kad $x \to a$ obe teže 0, a izvodi f' i g' postoje u svakoj tački pomenute okoline, sa izuzetkom možda same tačke a, pri čemu je $f'^2(x)+g'^2(x) \neq 0$ za $x \neq a$, i postoji konačan ili beskonačan limes $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2^0 **Drugo Lopitalovo pravilo** (oslobađanje neodređenosti $\frac{\infty}{\infty}$). Ako funkcije f i g kad $x \to a$, obe teže ∞, a izvodi f' i g' postoje za sve x koje pripada nekoj okolini tačke a sa izuzetkom same tačke a, pri čemu je $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ za svako x iz pomenute okoline koje se razlikuje od a, i ako postoji konačan ili beskonačan limes $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Napomena. Inače postoji sledećih 7[1] neodređenih izraza:

$$\boxed{\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;\ 1^\infty;\ 0^0;\ \infty^0.}$$

3^0 **Rešeni zadaci.**

Naći limese:

210. $\omega = \lim\limits_{x\to1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

◀ Funkcije $f(x) = x^x - x$ i $g(x) = \ln x - x + 1$ zadovoljavaju sledeće

[1] Prim. prevodioca

uslove: **1)** $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} g(x) = 0$; **2)** izvodi $f'(x) = x^x(1+\ln x) - 1$ i $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$ postoje u dovoljno maloj okolini tačke $x = 1$ i $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ u toj okolini; **3)** postoji konačan limes:

$$\lim_{x\to1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to1} \frac{x^{x+1}(1+\ln x) - x}{1-x}. \tag{1}$$

Sledi, prema prvom Lopitalovom pravilu, imamo

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1} \frac{x^{x+1}(1+\ln x) - x}{1-x} \tag{2}$$

Dalje je:

1) funkcije $f_1(x) = x^{x+1}(1+\ln x) - x$ i $g_1(x) = 1 - x$ obe teže nuli kad $x \to 1$;

2) njihovi izvodi $f_1'(x) = x^{x+1}(1+\ln x)\left(1 + \frac{1}{x} + \ln x\right) + x^x - 1$, $g_1'(x) = -1$, očigledno postoje za $x > 0$;

3) postoji $\lim_{x\to1} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = -2$, to, saglasno prvom Lopitalovom pravilu, imamo

$$\lim_{x\to1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -2. \tag{3}$$

Na taj način, iz (1), (2) i (3) konačno dobijamo da je $\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{g(x)} = -2$. ▶

U prethodnom primeru smo Lopitalovo pravilo primenili dva puta. Korektnost primene Lopitalovog pravila u primerima (211-238) se slično obrazlaže.

211. $L = \lim_{x\to0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tanh x} - \frac{1}{\tan x}\right)$.

◀ Ovde imamo neodređenost oblika $\infty - \infty$. Transformacijom datog izraza u neodređenost oblika $\frac{0}{0}$ i primenom Lopitalovog pravila, nalazimo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cosh^2 x}}{\tanh x \tan x + \frac{x\tan x}{\cosh^2 x} + x\tanh x \cos^{-2} x} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1+\tan^2 x - 1 + \tanh^2 x}{x^2}}{\frac{\tanh x}{x}\cdot\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\cosh^2 x} + \frac{\tanh x}{x}\cos^{-2} x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$ ▶

212. $L = \lim_{x\to0} \frac{Arsh x(\sinh x) - Arsh(\sin x)}{\sinh x - \sin x}$.

◀ Imamo neodređenost oblika $\frac{0}{0}$. Primenom Lopitalovog pravila 4 puta, imamo

$$L = \lim_{x\to0} \frac{1 - \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\cosh x - \cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0} \frac{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}{\cosh x - \cos x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x}{\cosh x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sinh x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{\cosh x + \cos x} = 1.$$

Prilikom rešavanja primera oslobodili smo se korena na poznati način, a zatim uzeli limes izraza $\cos x + \sqrt{1+\sin^2 x}$. ►

213. $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-100}$.

◄ Neposredna primena Lopitalovog pravila nije efikasna (proveriti), zato, se smenom $x^{-2} = y$ a zatim Lopitalovim pravilom, dobija

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{50}}{e^y} = 50! \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0. \ ►$$

214. $L = \lim_{x\to+0} x^{x^x-1}$.

◄ Ovde imamo neodređenost oblika 0^0, zato najpre prema formuli $u^v = e^{v\ln u}$ $(u>0)$, kao i tome da je $\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+0} e^{x\ln^2 x\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln^2 x \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln^2 x \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-2x\ln x)} = 1, \end{aligned}$$

(uvedena je smena $x\ln x = t \to 0$ kad $x \to 0$). ►

215. $L = \lim_{x\to+0} \left(x^{x^x} - 1\right)$.

◄ Slično prethodnom primeru, sledi

$$L = \lim_{x\to+0} \left(e^{x^x \ln x} - 1\right) = e^{\lim\limits_{x\to+0} x^x \cdot \lim\limits_{x\to+0} \ln x} - 1.$$

Odavde, pošto je $\lim_{x\to+0} x^x = 1$, $\lim_{x\to+0} \ln x = -\infty$, proističe da je $L = -1$. ►

216. $L = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

◄ Ovde je neodređenost oblika 1^∞. Na osnovu formule $u^v = e^{v\ln u}$ $(u>0)$, nalazimo

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{-1}. \ ►$$

217. $L = \lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

◄ Kao i u prethodnom primeru, imamo

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 1} \tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}} = e^{\frac{2}{\pi}}. \ ►$$

218. $L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

◀ I ovde je neodređenost 1^∞. Primenom formule $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0)$ i koristeći mogućnost prelaza limesa u eksponent funkcije e^x, nalazimo

$$L = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cot 2x}} = e^{\frac{1}{2} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin^2 2x}{\tan x \cos^2 x}} = e^{-1}. \ ▶$$

219. $L = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

◀ Imamo neodređenost oblika ∞^0. Isto, kao u prethodnim primerima, nalazimo

$$\begin{aligned} L &= e^{\lim\limits_{x \to \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1} \cos^{-2} \frac{\pi x}{2x+1} \frac{\pi(2x+1) - 2\pi x}{(2x+1)^2}} = e^{2\pi \lim\limits_{x \to \infty} \left(\left(\sin \frac{2\pi x}{2x+1}\right)^{-1} (2x+1)^{-2}\right)} \\ &= e^{2 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin \frac{\pi}{2x+1}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2x+1}} = 1. \ ▶ \end{aligned}$$

220. $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

◀ Ovde je neodređenost oblika 1^∞. Zato, primenom već uobičajenog postupka, uz korišćenje nekih poznatih limesa, nalazimo

$$\begin{aligned} L &= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2x}((a^x - 1)(b^x - x \ln b) \ln a - \ln b (b^x - 1)(a^x - x \ln a))} \\ &= e^{\frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a^x - 1}{x} \ln a - \frac{b^x - 1}{x} \ln b\right)} = e^{\frac{1}{2}\left(\ln^2 a - \ln^2 b\right)}. \ ▶ \end{aligned}$$

Znači $L = e^{\frac{1}{2}\left(\ln^2 a - \ln^2 b\right)}$.

221. $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$.

◀ U datom primeru funkcija ima neodređenost oblika $\infty - \infty$ u tački $x = 0$. Svodeći je na oblik $\frac{0}{0}$ i primenom Lopitalovog pravila, imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{x \cos x + \sin x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \ ▶ \end{aligned}$$

222. $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

◀ Neophodno je osloboditi se neodređenosti oblika $\frac{0}{0}$. Kao i ranije koristimo predstavljanje $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0)$ i mogućnost prelaza limesom u eksponent funkcije e^x. Onda primenom Lopitalovog pravila, nalazimo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = e \lim_{x \to 0} \frac{x - (1+x) \ln (1+x)}{x^2 (1+x)} \\ &= e \lim_{x \to 0} \frac{-\ln (1+x)}{2x + 3x^2} = e \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2} = -\frac{e}{2}. \ ▶ \end{aligned}$$

223. $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

◀ Svodeći neodređeni oblik $\infty - \infty$ na oblik $\frac{0}{0}$ i primenom Lopitalovog pravila, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{1+x}{x+\sqrt{1+x^2}}}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}-(1+x)\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right)}{\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{(1+x)\ln(1+x)+\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$ ▶

224. $L = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

◀ Dvostrukom primenom Lopitalovog pravila, nalazimo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right) - a^x\ln a}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)^2 + (a+x)^x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{a}{(a+x)^2}\right) - a^x\ln^2 a}{2} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

225. $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

◀ Datu neodređenost svodimo na oblik $e^{\frac{0}{0}}$ i zatim prema Lopitalovom pravilu, sledi:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)} = e^z, \\ z &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\arctan x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi};\ L = e^{-\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$ ▶

226. $L = \lim\limits_{x\to+\infty}(\tanh x)^x$.

◀ Imamo $L = e^z$, gde je

$$\begin{aligned} z &= \lim_{x\to+\infty} x\ln(\tanh x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\tanh x}\cdot\frac{1}{\cosh^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sinh 2x} \\ &= -2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\cosh 2x} = 0;\ L = 1. \end{aligned}$$ ▶

227. $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

◄

$$\begin{aligned} L &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\arcsin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\arcsin x} \cdot \frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2x^2}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{6x\sqrt{1-x^2}}} = e^{\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}} = e^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili formulu $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0)$, granični prelaz $\lim e^x = e^{\lim x}$, kao i neke poznate limese. ►

228. $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

◄ Slično prethodnom primeru, imamo

$$\begin{aligned} L &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$ ►

229. $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

◄ Koristeći formulu $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0)$ i dva puta Lopitalovo pravilo, sledi

$$\begin{aligned} L &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{\arctan x} \cdot \frac{x-\left(1+x^2\right)\arctan x}{x^2(1+x^2)}} \\ &= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\left(1+x^2\right)\arctan x}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\arctan x}{3x}} = e^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$ ►

230. $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{Arshx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

◄ Po analogiji sa prethodnim primerom, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{Arshx}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{Arshx} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - Arshx}{x^2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{1+x^2}\,Arshx}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{-x\,Arshx}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$ ►

231. $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

◄ Koristeći formulu $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0)$ Lopitalovo pravilo, sledi

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-x+\ln(1+x)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{2(1+x)x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$ ►

232. $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

◀ Po analogiji sa prethodnim, je

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\arccos x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = e^{-\frac{2}{\pi}}. \ ▶$$

233. $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cosh x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

◀ Primenom formule $u^v = e^{v\ln u}$ $(u > 0)$, Lopitalovog pravila i limesa proizvoda, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cosh x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{\cosh x}{\cos x}\cdot\frac{-\sin x\cosh x - \cos x\sinh x}{\cosh^2 x}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cosh x + \cos x\sinh x}{x}} = e^{-1}. \ ▶ \end{aligned}$$

234. $L = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cosh x}{\sqrt[m]{\cosh x} - \sqrt{\cosh x}}$.

◀ Ovde imamo neodređenost oblika $\frac{0}{0}$. Smenom $\cosh x = t$ i primenom Lopitalovog pravila dobijamo

$$L = \lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t^{\frac{1}{m}} - t^{\frac{1}{n}}} = \lim_{t\to 1}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1} - \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{mn}{n-m}. \ ▶$$

235. $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\coth x}$.

◀ Kao kod primera 231, sledi

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{\tanh x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(1+e^x)^{-1}}{\cosh^{-2} x}} = e^{\frac{1}{2}}. \ ▶$$

236. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x) = x^{\ln x}$, $\psi(x) = (\ln x)^x$.

◀

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = L,$$

gde je $L = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln\ln x\right)}$. Pošto je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\ln\ln x = +\infty,$$

to je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln\ln x\right) = -\infty.$$

Zato je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$. ▶

237. $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\,\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)$.

◀ Svodeći datu neodređenost na oblik $\frac{0}{0}$ i primenom Lopitalovog pravila, imamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{\ln\left(1+xe^{-x}\right)}{x}+1\right)\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\\
&= \lim_{t\to0}\frac{\left(1+t+t^2+t^3\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1+t+t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{t}\\
&= \lim_{t\to0}\left(\frac{1}{3}\left(1+t+t^2+t^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1+2t+3t^2\right)-\frac{1}{2}\left(1+t+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}(1+2t)\right)=-\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

238. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right).$

◀ Svodeći na oblik $\frac{0}{0}$ i slično prethodnim primerima, sledi

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty} x\left((x+a)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{a}{x}+1\right)-x^{\frac{1}{x+a}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{x^{\frac{a}{x(x+a)}}}\right)=\lim_{t\to+0}\frac{(1+at)^{t+a}-t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t}\\
&= \lim_{t\to+0}\left((1+at)^{t+1}\left(\ln(1+at)+a\frac{t+1}{at+1}\right)\right.\\
&\quad\left.-t^{\frac{at^2}{1+at}}\left(2at\ln(1+at)+\frac{at^2}{1+at}\right)\right)\\
&= a.
\end{aligned}$$

239. Naći $\lim\limits_{x\to0}\frac{y}{x}$, ako kriva $y=f(x)$ ulazi u koordinatni početak$(0,0)$, kad $x\to0$ $\left(\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0\right)$ pod uglom α.

◀ Imamo da je $\frac{y}{x}=\tan\beta$, gde je β ugao između tetive određene tačkama (x,y) i $(0,0)$ i apscisne ose. Prema pretpostavci $\beta\to\alpha$. Sledi, $\lim\limits_{x\to0}\frac{y}{x}=\tan\alpha$. ▶

240. Dokazati, da je

$$\lim_{x\to+0}x^{f(x)}=1,$$

ako neprekidna kriva $y=f(x)$ ulazi u koordinatni početak kad $x\to0$ $\left(\lim\limits_{x\to0}f(x)=0\right)$ i za $0<x<\varepsilon$ cela ostaje unutra oštrog ugla, obrazovanog pravama $y=-kx$ i $y=kx$ $(k\neq\infty)$.

◀ Za $0 < x < \varepsilon$ možemo zapisati nejednakost

$$x^{kx} < x^{f(x)} < x^{-kx} \quad (k > 0,\ \varepsilon < 1)$$

(po uslovu zadatka je $-kx < f(x) < kx$), odakle sledi

$$1 = \lim_{x\to+0} x^{kx} \leq \lim_{x\to+0} x^{f(x)} \leq \lim_{x\to+0} x^{-kx} = 1.$$

Dakle, $\lim\limits_{x\to+0} x^{f(x)} = 1$, što je i trebalo dokazati. ▶

241. Dokazati, da ako funkcija f ima drugi izvod f'', to je

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

◀ Po Lopitalovom pravilu, imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ & \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \right) \\ &= f''(x). \end{aligned}$$

Napomena. Treba voditi računa da dvostruka primena Lopitalovog pravila nije moguća. ▶

242. Ispitati diferencijabilnost funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

u tački $x = 0$.

◀ Dokažimo, pre svega, da je $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$. Imamo,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Polazeći od definicije izvoda u 0 imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x^2(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 1 - x - xe^x}{4x(e^x - 1) + 2x^2 e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x - xe^x}{12e^x + 12xe^x + 2x^2 e^x} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Sledi, funkcija je diferencijabilna u tački $x = 0$ i $f'(0) = -\frac{1}{12}$. ►

243. Naći kosu asimptotu funkcije

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \quad (x > 0).$$

◄ Jednačina kose asimptote ima oblik: $y = kx + b$. Nađimo k. Imamo

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$

Zatim nalazimo b:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e} \right) \\ &= \frac{1}{e^2} \lim_{x \to +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) = \frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \left(\frac{e - (1+t)^{\frac{1}{t}}}{t} \right) \\ &= \frac{1}{e^2} \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \left(\frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right) \\ &= -\frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} = -\frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \frac{-\ln(1+t)}{2t + 3t^2} = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

Znači, kosa asimptota glasi: $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}$. ►

244. Ispitati mogućnost primene Lopitalovog pravila u sledećim primerima:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2 \sin^2 x}}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}$;

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$; d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}}$.

◄ a) Svi uslovi za primenu prvog Lopitalovog pravila su ispunjeni, osim poslednjeg: postojanje limesa količnika izvoda. c) i d) isto kao pod a). b) nije ispunjen uslov: $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ za $x \neq a$, naime, za $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ je $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 = 0$. Sledi, u sva tri navedena slučaja nije moguće primeniti Lopitalovo pravilo. ►

2.9 Tejlorova formula

1^0 Tejlorova formula na razmaku. Neka je: **1)** funkcija f definisana na segmentu $[a, b]$; **2)** f ima na $[a, b]$ sve izvode do reda $(n-1)$ uključujući i

$(n-1)$–izvod; **3)** za $a < x < b$ postoji konačan izvod $f^{(n)}(x)$. Tada za svako $x \in [a,b]$ i $p > 0$ postoji takvo $\theta \in]0,1[$, da bude ispunjena formula:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x), \end{aligned}$$

gde je

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!p} f^{(n)}(a + \theta(x-a))$$

(ostatak u obliku Šlemilha-Roša). Za $p = n$ dobijamo ostatak u Lagranžovom obliku:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_1(x-a)), (0 < \theta_1 < 1).$$

Ako je $p = 1$ imamo ostatak u Košijevom obliku:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} (1-\theta_2)^{n-1} f^{(n)}(a + \theta_2(x-a)), (0 < \theta_2 < 1).$$

2^0 **Tejlorova formula u lokalnom obliku.** Ako je: **1)** funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x_0; **2)** u tački x_0 postoji konačan izvod reda n, $f^{(n)}(x_0)$, onda je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

(kad $x \to x_0$).

3^0 Stavljajući u svim navedenim formulama $a = x_0 = 0$, dobijamo odgovarajuće Maklorenove formule. Iz Maklorenove formule u lokalnom obliku dobijamo sledećih pet važnih razlaganja (kad $x \to 0$) :

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$.

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

4^0 **Rešeni zadaci.**

Napisati razlaganje sledećih funkcija po celim pozitivnim stepenima promenljive x zaključno do navedenog člana.

245. $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ do člana x^2.

◂ Predstavljanjem funkcije f u obliku

$$f(x) = (1+x)^{100}(1-2x)^{-40}(1+2x)^{-60}$$

i primenom razlaganja IV, imamo

$$\begin{aligned}(1+x)^{100} &= 1+100x+50\cdot 99x^2+o\left(x^2\right),\\ (1-2x)^{-40} &= 1+80x+80\cdot 41x^2+o\left(x^2\right);\\ (1+2x)^{-60} &= 1-120x+120\cdot 61x^2+o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Množenjem desnih delova dobijenih razlaganja i uzimajući samo članove zaključno do x^2, dobijamo

$$f(x) = 1+60x+1950x^2+o\left(x^2\right).$$

Napomena. Dobijeno razlaganje naravno važi kad $x \to 0$. ▸

246. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ do člana x^4. Koliko je $f^{(4)}(0)$?

◂ Predstavimo funkciju f u obliku

$$f(x) = 1+\left(2x+2x^2\right)\left(1+x^3\right)^{-1}$$

i koristeći prema IV razlaganje: $\left(1+x^3\right)^{-1} = 1-x^3+o\left(x^5\right)$ imamo

$$\begin{aligned}f(x) &= 1+\left(2x+2x^2\right)\left(1-x^3+o\left(x^5\right)\right) = 1+2x+2x^2-2x^4+o\left(x^4\right);\\ \frac{f^{(4)}(0)}{4!} &= -2 \Rightarrow f^{(4)}(0) = -48.\ ▸\end{aligned}$$

247. $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ do člana x^3.

◂ Saglasno razlaganju IV, imamo

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \sqrt{1-2x+x^3} = \left(1-\left(2x-x^3\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(2x-x^3\right)-\frac{1}{8}\left(2x-x^3\right)^2-\frac{1}{16}\left(2x-x^3\right)^3+o\left(x^3\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \sqrt[3]{1-3x+x^2} = \left(1-\left(3x-x^2\right)\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= 1-\frac{1}{3}\left(3x-x^2\right)-\frac{1}{9}\left(3x-x^2\right)^2-\frac{5}{81}\left(3x-x^2\right)^3+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Sada je

$$f(x) = f_1(x)-f_2(x) = \frac{1}{6}x^2+x^3+o\left(x^3\right).\ ▸$$

248. e^{2x-x^2} do člana x^5.

◀ Saglasno formuli I, sledi

$$\begin{aligned} e^{2x-x^2} &= 1+\left(2x-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(2x-x^2\right)+\frac{1}{6}\left(2x-x\right)^3 \\ &+\frac{1}{24}\left(2x-x^2\right)^4+\frac{1}{120}\left(2x-x^2\right)^5+o\left(x^5\right) \\ &= 1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right). \end{aligned}$$ ▶

249. $x\left(e^x-1\right)^{-1}$ do člana x^4.

◀ Koristeći razlaganja I i IV, imamo

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x-1} &= x\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)\right)^{-1} \\ &= \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right)^{-1} \\ &= \left(1+\alpha\left(x\right)\right)^{-1}=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4+o\left(\alpha^4\right) \\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{120}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{36}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24} \\ &-\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{16}+o\left(x^4\right) \\ &= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o\left(x^4\right). \end{aligned}$$ ▶

250. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ do člana x^{13}.

◀ Smenom $x^3=t$, i koristeći razlaganje

$$\sin t=t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}+o\left(t^6\right),$$

i formulu IV, dobijamo

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sin t} &= t^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}+o\left(t^5\right)\right)^{\frac{1}{3}}=t^{\frac{1}{3}}\left(1+\alpha\left(t\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= t^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{9}\alpha^2+o\left(\alpha^2\right)\right) \\ &= t^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)^2+o\left(t^5\right)\right) \\ &= t^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{t^2}{18}-\frac{t^4}{3240}+o\left(t^5\right)\right)=x\left(1-\frac{x^6}{18}-\frac{x^{12}}{3240}+o\left(x^{15}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \quad x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o\left(x^{16}\right). \ \blacktriangleright$$

251. $\ln\cos x$ do člana x^6.

◀

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2 x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{2} - \frac{\sin^6 x}{3} + o\left(x^7\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^6}{3} + o\left(x^7\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{3} + o\left(x^7\right)\right) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o\left(x^7\right). \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

252. $\sin(\sin x)$ do člana x^3.

◀ Prema II, imamo

$$\begin{aligned}
\sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o\left(\sin^4 x\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + o\left(x^4\right)\right) + o\left(\sin^4 x\right) \\
&= x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right). \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

253. $\tan x$ do člana x^5.

◀ Imamo,

$$\begin{aligned}
y &= \tan x, \ y(0) = 0; \\
y'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x, \ y'(0) = 1; \\
y''(x) &= 2\cos^{-3} x \cdot \sin x, \ y''(0) = 0; \\
y'''(x) &= 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x, y'''(0) = 2; \\
y^{(4)}(x) &= 24\cos^{-5} x \cdot \sin^3 x + 12\cos^{-3} x \cdot \sin x + 4\cos^{-3} x \cdot \sin x; \\
y^{(4)}(0) &= 0; \\
y^{(5)}(x) &= 120\cos^{-6} x \cdot \sin^4 x - 24\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 16\cos^{-2} x; \\
y^{(5)}(0) &= 16.
\end{aligned}$$

Sada, po Maklorenovoj formuli, dobijamo

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right). \ \blacktriangleright$$

254. $\ln \frac{\sin x}{x}$ do člana x^6.

◀ Primenom formula II i IV, nalazimo

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o\left(x^7\right) \quad (x \to 0), \\ \ln \frac{\sin x}{x} &= \ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + o\left(\alpha^3\right), \end{aligned}$$

gde je $\alpha(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o\left(x^7\right)$. Tada je

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sin x}{x} &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o\left(x^7\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360}\right) - \frac{x^6}{648} + o\left(x^7\right) \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o\left(x^7\right), \quad (x \to 0). \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

255. Funkciju $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ $(x > 0)$ razložiti po celim pozitivnim stepenima razlomka $\frac{1}{x}$ do člana $\frac{1}{x^3}$.

◀ Transformacijom funkcije f i primenom formule IV, imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = x\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\ &= x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - 1\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

256. Naći razlaganje funkcije $f(x) = \ln(x+h)$ $(x > 0)$ po celim pozitivnim stepenima priraštaja h do člana h^n, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Prema V, je

$$\begin{aligned} \ln(x+h) &= \ln x + \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{h^n}{nx^n} + o\left(\left(\frac{h}{x}\right)^n\right). \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

257. Neka je

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h) \qquad (1)$$

$(0 < \theta < 1)$, gde je $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Dokazati, da je $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

◀ Pošto $f^{(n+1)}(x)$ postoji i razlikuje se od 0, to prema Maklorenovoj formuli sa ostatkom u Peanovom obliku, sledi

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o\left(h^{n+1}\right). \tag{2}$$

Oduzimanjem jednakosti (1) od (2) i skraćivanjem sa $\frac{h^n}{n!}$, dobijamo

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{h} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h},$$

odakle

$$\theta = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}}{\frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{h}}.$$

Prelaskom u dobijenoj jednakosti na limes, kad $h \to 0$ i uzimajući u obzir da je $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, dobijamo $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$. ▶

258. Neka je $f(x) = 1 + kx + o(x)$, kad $x \to 0$. Dokazati, da je onda

$$\lim_{x \to 0} (f(x))^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

◀ Pošto je $(f(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln f(x)}$ $(f(x) > 0$ kad $x \to 0)$, to je prema uslovu zadatka i formule V

$$\lim_{x \to 0} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+kx+o(x))} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}(kx+o(x))} = e^k,$$

što je i trebalo dokazati. ▶

259. Neka $f \in C^{(2)}[0,1]$ i neka je $f(0) = f(1) = 0$, pri čemu je $|f''(x)| \leq A$ za $x \in]0,1[$. Dokazati, da je $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$ kad $x \in [0,1]$.

◀ Po Tejlorovoj formuli, imamo

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) - f'(x)x + f''(\xi_1)\frac{x^2}{2}, \; 0 < \xi_1 \leq 1; \\ f(1) &= f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2}, \; 0 \leq x < \xi_2 < 1, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2\right), \; 0 < x < 1.$$

Ocenjujući tu jednakost po apsolutnoj vrednosti, dobijamo

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2}\left(2x^2 - 2x + 1\right), \ 0 \leq x \leq 1.$$

Pošto je $0 \leq 2x^2 - 2x + 1 \leq 1$ za $0 \leq x \leq 1$, to je $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$, što je i trebalo dokazati. ▶

260. Neka je f dva puta diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}$ i neka je $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right| < +\infty$ $(k = 0, 1, 2)$. Dokazati, nejednakost $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

◀ Po Tejlorovoj formuli je

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x - x_0) + f''(\xi)\frac{(x_0 - x)^2}{2},$$

odakle sledi $|f(x_0)| \leq |f(x)| + |f'(x)||x - x_0| + |f''(\xi)|\frac{|x_0-x|^2}{2} \leq M_0 + M_1y + M_2\frac{y^2}{2}$ $(y = |x_0 - x|)$. Pošto je $M_0 + M_1y + \frac{1}{2}M_2y^2 \geq 0$ za sve y, to je $M_1^2 \leq 2M_0M_2$. ▶

261. Oceniti apsolutnu grešku približnih formula:

a) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ za $0 \leq x \leq 1$;

b) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ za $|x| \leq 0,5$;

c) $\tan x \approx x + \frac{x^3}{3}$ za $|x| \leq 0,1$;

d) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ za $0 \leq x \leq 1$.

◀ a) Polazeći od ostatka u Lagranžovom obliku, imamo

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} = R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!}.$$

b) Na isti način (uz razlaganje II) dobijamo

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| = |R_5(x)| < \frac{|x|^5}{5!} \leq \frac{1}{3840}.$$

c) Po formuli za ostatak u Lagranžovom obliku, sledi

$$\tan x - x - \frac{x^3}{3} = R_5(x) = \frac{\tan^{(5)}(\xi)}{5!}x^5.$$

Dalje, na osnovu primera 253, dobijamo

$$|R_5(x)| = \frac{1}{120}\left|\tan^{(5)}(\xi)\right||x|^5 \leq \frac{1}{\cos^6(0,1)}\frac{16,012}{120}|x|^5$$

$$< \frac{16,012\,|x|^5}{120\,(1-0,005)^6} < \frac{16,012\,|x|^5}{120\,(1-6\cdot 0,005)} < \frac{16,6}{120}\left|x^5\right| < 1,39\cdot 10^{-6}.$$

d) U ovom slučaju, imamo

$$0 \le (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \le \frac{x^3}{16} \le \frac{1}{16},$$

odakle sledi

$$\max_{0\le x\le 1}\left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right| < \frac{1}{16}. \;\blacktriangleright$$

262. Za koje x je sa tačnošću $0,0001$ ispunjena približna formula $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$?

◀ Prema formuli za ostatak u Lagranžovom obliku, dobijamo

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{\cos\xi}{24}x^4 \le \frac{x^4}{24} \le 0,0001,$$

odakle nalazimo ocenu: $|x| \le 0,1\sqrt[4]{24} < 0,222.$ ▶

263. Dokazati formulu

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r$$

$(n \ge 2,\ a > 0,\ x > 0)$ gde je $0 < r < \frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}$.

◀ Saglasno nejednakosti, dokazane u primeru 186, imamo

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= a + \frac{x}{na^{n-1}},\ \psi(x) = \sqrt[n]{a^n + x};\\
\varphi(0) &= \psi(0) = a,\ \varphi'(0) = \psi'(0) = \frac{1}{na^{n-1}};\\
\varphi''(x) &= 0,\ \psi''(x) < 0;
\end{aligned}$$

zato je

$$a + \frac{x}{na^{n-1}} - \sqrt[n]{a^n + x} = r > 0.$$

Sa druge strane, prema Tejlorovoj formuli sa ostatkom u Lagranžovom obliku, dobijamo

$$r = \frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}} - \frac{\psi''(\xi)}{6}x^3.$$

S obzirom da je

$$\psi'''(\xi) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right)(a^n + \xi)^{\frac{1}{n} - 3} > 0,$$

to je $r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{2n-1}}$. ►

264. Koristeći Tejlorovu formulu, približno izračunati:

a) $\sqrt[5]{250}$; b) $\sin 18^0$; c) $\arctan 0,8$; d) $\arcsin 0,45$; e) $(1,1)^{1,2}$ i oceniti grešku.

◄ a) Imamo

$$\sqrt[5]{250} = 3\sqrt[5]{1+\frac{7}{243}} = 3\left(1+\frac{7}{5\cdot 243} - R_3\right) = 3,0171 - 3R_3,$$

gde je $3R_3$ saglasno oceni, dobijene pri rešavanju primera 263, $n = 5$, $a = 3$, $x = 7$:

$$0 < 3R_3 < \frac{4}{50}\cdot\frac{49}{3^9} < \frac{4}{3^9} < 0,0002.$$

b) Saglasno Maklorenovoj formuli sa ostatkom u Lagranžovom obliku, dobijamo

$$\sin 18^0 = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{10^3} + \frac{1}{120}\frac{\pi^5}{10^5} + R_7,$$

gde je $|R_7| < \frac{1}{7!}\frac{\pi^7}{10^7}$. I tako je

$$\begin{aligned}
\sin 18^0 &\approx \frac{\pi}{10}\left(1-\frac{\pi^2}{600}+\frac{\pi^4}{12\cdot 10^5}\right)\\
&\approx 0,314159\left(1-\frac{9,869604}{600}+\frac{(9,869404)^2}{12\cdot 10^5}\right)\\
&\approx 0,314159\,(1-0,016449+0,000079) \approx 0,309017.
\end{aligned}$$

c) Tejlorova formula $(x_0 = 1)$: daje

$$\begin{aligned}
\arctan 0,8 &= \arctan(1-0,2)\\
&\approx \arctan 1 - (\arctan x)'\,|_{x=1}\cdot 0,2 + \frac{1}{2}0,04\,(\arctan x)''\,|_{x=1}\\
&\quad -\frac{1}{6}\cdot 0,008\,(\arctan x)'''\,|_{x=1} \approx \frac{\pi}{4} - 0,1 - 0,01 - 0,00066\\
&\approx 0,67474.
\end{aligned}$$

Pošto je $(\arctan x)^{(4)}\,|_{x=1} = 0$, a $(\arctan x)^{(5)} = 24\frac{1-10x^2+5x^4}{(1+x^2)^5} < 12$ kad je $0,8 < x < 1$, to prema formuli za ostatak u Lagranžovom obliku, dobijamo procenu greške:

$$|R| < \frac{12}{5!}(0,2)^5 < 3,2\cdot 10^{-5}.$$

d) Prema istoj formuli za ostatak, imamo $(0 \leq x \leq 0,5)$:

$$\begin{aligned} \arcsin 0,45 &= \arcsin(0,5-0,05) = \arcsin 0,5 - 0,05\,(\arcsin x)'|_{x=0,5} \\ &+\frac{0,0025}{2!}\,(\arcsin x)''|_{x=0,5} - \frac{0,000125}{2!}\,(\arcsin x)'''|_{x=0,5} + R_4 \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{0,05}{0,5\sqrt{3}} + \frac{0,0025}{3\cdot 0,5\sqrt{3}} - \frac{0,000125}{3\cdot 0,75\cdot 0,5\sqrt{3}} + R_4 \\ &\approx 0,523598 - \frac{1}{\sqrt{3}}\,(0,1-0,001666+0,000111) + R_4 \\ &\approx 0,46676 + R_4. \end{aligned}$$

Sada apsolutnu grešku ocenjujemo na sledeći način:

$$|\arcsin 0,45 - 0,46676| = |R_4| < \frac{1}{4!}0,00000625\,(\arcsin x)^{(4)}|_{x=\frac{1}{2}} < 0,000006.$$

e) Slično prethodnom, imamo $(0 \leq x \leq 1)$:

$$\begin{aligned} (1,1)^{1,2} &= 1,1\,(1+0,1)^{0,2} \\ &= 1,1\left(1+\frac{0,1}{5} - \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5}\cdot 0,01 + \frac{6}{125}\cdot 0,001 + R_4\right) \\ &\approx 1,12117 + 1,1R_4, \end{aligned}$$

gde je $1,1\,|R_4| < 1,1\cdot\frac{21}{625}\cdot 10^{-4} < 5\cdot 10^{-6}$. ►

265. Izračunati:

a) $\sin 1^0$ sa tačnošću do 10^{-8}; b) $\lg 11$ sa tačnošću do 10^{-5}.

◄ a) Odredimo broj članova razlaganja funkcije $y = \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{180}\right)$, po Maklorenovoj formuli, radi postizanja date tačnosti. Njega možemo dobiti iz ostatka datog u Lagranžovom obliku. Imamo

$$\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n-1}\frac{1}{(2n-1)!} < 10^{-8} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

odakle sledi $n \geq 3$. Na taj način je

$$\sin 1^0 = \sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{6\,(180)^3} \approx 0,01745241.$$

b) Postupajući slično, nalazimo $f(x) = \ln(1+x)$, $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} \lg 11 &= \lg(10+1) = \lg 10 + \lg(1+0,1) = 1 + \frac{1}{\ln 10}\ln(1+0,1) \\ &\approx 1 + \frac{1}{\ln 10}\left(0,1 - 0,5\cdot 10^{-2} + 0,3333\cdot 10^{-3} - 0,25\cdot 10^{-4} + R_5\right) \end{aligned}$$

$\left(\frac{|R_5|}{\ln 10} < 10^{-6}\right)$. I tako je, $\lg 11 \approx 1{,}04139$. ►

Koristeći razlaganja I-V, naći sledeće limese:

266. $z = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right)$.

◄ Primenom I i IV, nalazimo

$$\begin{aligned} z &= \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{2x^6} + o\left(\frac{1}{x^{11}}\right)\right)\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{6x^4}\right. \\ &\quad + o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{2x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \\ &\quad \left. -1 - \frac{1}{2x^6} + o\left(\frac{1}{x^{11}}\right)\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(\frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$ ►

267. $L = \lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$.

◄ Primenom formule V, imamo

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}.$$ ►

268. $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$.

◄ Primenom razlaganja II i III, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right)}{x^2\left(x + o\left(x^2\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3\left(x^3 + o\left(x^4\right)\right)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$ ►

269. $L = \lim\limits_{x\to 0} x^{-5}\left(\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}\right)$.

◄ Prema I i V, imamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^5 x}{120} + o\left(x^6\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{9} + o\left(x^4\right)\right)\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{36} + \frac{x^5}{120} - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} + o\left(x^5\right)\right) = \frac{19}{90}. \end{aligned}$$

270. $L = \lim_{x\to 0} x^{-3}\left(1-(\cos x)^{\sin x}\right)$.

◀ Polazeći od predstavljanja $u^v = e^{v\ln u}$ $(u>0)$ i razlaganja I i V, nalazimo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} x^{-3}\left(1-e^{\sin x\ln\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\sin x\ln\cos x+o\left(x^3\right)\right)}{x^3} \\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+o\left(x^2\right)}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$ ▶

271. $L = \lim_{x\to 0} x^{-3}\left(\sinh(\tan x)-x\right)$.

◀ Na osnovu I i rezultata primera 253, sledi:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\frac{1}{6}\tan^3 x+o\left(x^3\right)-x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)-x}{x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$ ▶

Za beskonačno male veličine y kad $x\to 0$, odrediti glavni član oblika cx^n, gde je c konstanta, ako je:

272. $y = \tan(\sin x)-\sin(\tan x)$.

◀ Ustanovimo najpre razlaganje:

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o\left(x^8\right).$$

Zaista, polazeći od jednakosti $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i koristeći razlaganja I, III i IV, dobijamo

$$\begin{aligned} \tan x &= \sin x\left(1-\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sin x+\frac{1}{2}\sin^3 x+\frac{3}{8}\sin^5 x+\frac{5}{16}\sin^7 x+o\left(x^8\right) \\ &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right) \\ &\quad +\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^5+\frac{5}{16}x^7+o\left(x^8\right) \\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o\left(x^8\right), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Koristeći tu formulu, a takođe i pomenuta razlaganja, dobijamo

$$y = \tan(\sin x)-\sin(\tan x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sin x+\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{2}{15}\sin^5 x+\frac{17}{315}\sin^7 x-\tan x+\frac{\tan^3 x}{6}\\
&\quad -\frac{\tan^5 x}{5!}+\frac{\tan^7 x}{7!}+o\left(x^8\right)\\
&= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^3\\
&\quad +\frac{2}{15}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^5+\frac{17}{315}x^7-x-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7\\
&\quad +\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5\right)^3-\frac{1}{120}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^5+\frac{x^7}{7!}+o\left(x^8\right)\\
&= \frac{x^7}{30}+o\left(x^8\right);
\end{aligned}$$

odavde je $cx^n \equiv \frac{x^7}{30}$, $c=\frac{1}{30}$, $n=7$. ▶

273. $y=(1+x)^x-1$.

◀ Iz I i V, sledi

$$\begin{aligned}
y &= e^{x\ln(1+x)}-1 = x\ln(1+x)+o\left(x^2\right)\\
&= x\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)+o\left(x^2\right)=x^2+o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Dakle, $cx^n\equiv x^2$, $c=1$, $n=2$. ▶

274. $y=1-\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

◀ Na osnovu formule $u^v=e^{v\ln u}$ $(u>0)$, i razlaganja V i I, nalazimo

$$\begin{aligned}
y &= 1-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}=1-e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-1}=1-e^{-\frac{x}{2}+o(x)}\\
&= 1-\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)=\frac{x}{2}+o(x);
\end{aligned}$$

Znači, $cx^n\equiv\frac{x}{2}$, $c=\frac{1}{2}$, $n=1$. ▶

275. Odrditi, koeficijente A i B, tako da kad $x\to 0$, važi asimptotska formula:

$$\cot x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O\left(x^5\right).$$

◀ Imamo

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O\left(x^5\right),$$

odakle se dobija

$$\left(x+Bx^3\right)\cos x=\left(1+Ax^2\right)\sin x+O\left(x^7\right).$$

Prema II i III, dobijamo

$$\begin{aligned}&\left(x+Bx^3\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+O\left(x^6\right)\right)\\=&\left(1+Ax^2\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+O\left(x^7\right)\right)+O\left(x^7\right),\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}&x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}+O\left(x^7\right)+Bx^3-B\frac{x^5}{2}\\=&x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O\left(x^7\right)+Ax^3-\frac{Ax^5}{6}+O\left(x^7\right).\end{aligned}$$

Sledi, $-\frac{1}{2}+B=A-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{24}-\frac{B}{2}=\frac{1}{120}-\frac{A}{6}$, odnosno, $A=-\frac{2}{5}$, $B=-\frac{1}{15}$. ▶

276. Ako $x\to 0$, za koje vrednosti koeficijenata, A, B, C i D je ispunjena asimptotska formula

$$e^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O\left(x^5\right)?$$

◀ Imamo

$$e^x\left(1+Cx+Dx^2\right)=1+Ax+Bx^2+O\left(x^5\right). \tag{1}$$

Pošto je $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+O\left(x^5\right)$, stoga iz (1) dobijamo

$$\begin{aligned}&1+Ax+Bx^2+O\left(x^5\right)\\=&\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O\left(x^5\right)\right)\left(1+Cx+Dx^2\right)\end{aligned}$$

odakle sređivanjem izraza do stepena najviše 4, sledi

$$\begin{aligned}&1+Ax+Bx^2+O\left(x^5\right)\\=&1+Cx+Dx^2+x+Cx^2+Dx^3+\frac{x^2}{2}+\frac{C}{2}x^3+\frac{D}{2}x^4+\frac{x^3}{6}+\frac{Cx^4}{6}+\frac{x^4}{24}\end{aligned}$$

Za određivanje nepoznatih koeficijenata A, B, C i D imamo sistem

$$\begin{aligned}C+1&=A;\ D+\frac{1}{2}C+\frac{1}{6}=0;\\D+C+\frac{1}{2}&=B;\ \frac{D}{2}+\frac{C}{6}+\frac{1}{24}=0,\end{aligned}$$

čije je rešenje: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{12}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{12}$. ►

277. Smatrajući x malim po apsolutnoj vrednosti, izvesti približnu formulu oblika

$$x = \alpha \sin x + \beta \tan x,$$

sa tačnošću do člana x^5.

◄ Primenom razlaganja II kao i razlaganje za funkciju $x \mapsto \tan x$ (primer 253), dobijamo

$$x = \alpha\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \beta\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + O\left(x^5\right),$$

odakle je $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Pošto je $\Delta\, s = \Delta\, \varphi$ $(R = 1)$, a $\sin \Delta\, \varphi < \Delta\, \varphi < \tan \Delta\, \varphi$ to je moguće izabrati brojeve α i β takve da važi jednakost

$$\Delta\, \varphi = \alpha \sin \Delta\, \varphi + \beta \tan \Delta\, \varphi \quad (\Delta\, \varphi \to 0)$$

sa najboljom tačnošću, što je i urađeno u navedenom primeru. ►

278. Oceniti relativnu grešku sledećeg Čebiševljevog pravila: kružni luk je približno jednak zbiru bočnih strana ravnokrakog trougla, konstruisanog nad tetivom tog luka sa visinom jednakom $\sqrt{\frac{4}{3}}$ centralnog rastojanja tetive od luka.

◄ Iz uslova primera sledi da je

$$s^\star = 2\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{4}{3}\left(1 - \cos \varphi\right)^2},$$

gde je 2φ centralni ugao luka $(R = 1)$; $s^\star$ je približna vrednost dužine tog luka, dobijena Čebiševljevim pravilom. Dakle, treba oceniti $\left|\frac{s - s^\star}{s}\right|$. Imamo,

$$\begin{aligned} \left|\frac{s - s^\star}{s}\right| &= \left|\frac{\varphi - 2\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{4}{3}\left(1 - \cos \varphi\right)^2}}{\varphi}\right| \\ &\approx \left|1 - \sqrt{1 - \frac{\varphi^4}{90}}\right| \approx \frac{\varphi^4}{180}. \end{aligned}$$ ►

2.10 Ekstremumi funkcija

1^0 Neka je funkcija f definisana svuda u nekoj okolini tačke c. Kažemo da funkcija f ima u tački c lokalni maksimum (minimum), ako postoji okolina tačke c, tako da je $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$ za sve x iz te okoline.

Lokalni maksimum i lokalni minimum se jednim imenom zovu ekstremumi funkcije f.

Ako je funkcija f diferencijabilna u tački c i ima u toj tački ekstremum, tada je $f'(c) = 0$. Koreni jednačine $f'(x) = 0$ nazivaju se tačkama mogućeg ekstremuma ili stacionarnim tačkama. U kandidate za apscise lokalnih ekstremuma spadaju i one tačke oblasti definisanosti u kojima izvod funkcije ne postoji. Te tačke zajedno sa stacionarnim tačkama funkcije zovu se kritičnim tačkama.

2^0 Dovoljni uslovi za ekstremume.

Prvo pravilo. Neka je funkcija f diferencijabilna u nekoj okolini tačke c, sa izuzetkom možda same tačke c, i neka je neprekidna u tački c. Tada funkcija f u tački c ima lokalni maksimum (minimum) ako prvi izvod $f'(x)$ prolazeći kroz tačku c menja znak od $+$ na $-$ ($-$ na $+$). Ako izvod $f'(x)$ ne menja znak, prolazeći kroz tačku c, onda funkcija u tački c nema lokalni ekstremum.

Drugo pravilo. Neka funkcija f u datoj tački c mogućeg ekstremuma ima konačan drugi izvod. Tada funkcija f u tački c ima maksimum (minimum) ako je $f''(c) < 0$ ($f''(c) > 0$).

Treće pravilo. Neka je n neki ceo pozitivan broj i neka funkcija $y = f(x)$ ima u nekoj okolini tačke c izvod reda $n-1$, a u samoj tački c izvod reda n. Neka je u tački c ispunjeno:

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Tada, ako je n paran broj, funkcija $y = f(x)$ ima u tački $x = c$ ekstremum i to minimum (maksimum) za $f^{(n)}(c) > 0$ ($f^{(n)}(c) < 0$).

3^0 **Apsolutni ekstremum.** Neprekidna funkcija f na segmentu $[a, b]$ postiže najveću (najmanju) vrednost ili u kritičnim tačkama ili na krajevima a i b segmenta $[a, b]$.

4^0 **Rešeni zadaci.**

Ispitati ekstremume sledećih funkcija:

279. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

◄ Ekstremume ćemo ispitati pomoću prvog izvoda. Diferenciranjem, dobijamo

$$y'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

Izjednačavanjem izvoda sa nulom, nalazimo da je $x = 0$ stacionarna tačka. Proverimo dovoljan uslov. Za bilo koje $\varepsilon > 0$ i parno n imamo

$$y'(-\varepsilon) = -\frac{1}{n!} (-\varepsilon)^n e\varepsilon < 0, \quad y'(\varepsilon) = -\frac{1}{n!} e^n e^{-\varepsilon} < 0.$$

Sledi, ako je n paran, funkcija nema ekstremuma. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i n neparan prirodan broj; tada je

$$y'(-\varepsilon) = -\frac{1}{n!}(-\varepsilon)^n e\varepsilon > 0, \; y'(\varepsilon) = -\frac{1}{n!}\varepsilon^n e^{-\varepsilon} < 0.$$

Znači, u tački $x = 0$ funkcija ima maksimum jednak 1. ►

280. $y = x^m (1-x)^n$; $m, n \in \mathbb{N}$.

◄ Nađimo izvod i izjednačimo ga sa nulom:

$$y'(x) = (m+n)\; x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left(\frac{m}{m+n} - x\right) = 0.$$

Rešenja (koreni) te jednačine: $x_1 = 0\ (m > 1)$, $x_2 = 1\ (n > 1)$, $x_3 = \frac{m}{m+n}$ su stacionarne tačke. Proverimo dovoljan uslov.

Neka je $0 < \varepsilon < \frac{m}{m+n}$. Za parno m je $y'(-\varepsilon) < 0$, $y'(\varepsilon) > 0$, sledi, u tački $x_1 = 0$ funkcija ima minimum jednak 0.

Slično, za tačku $x_2 = 1$: za parno n, $y'(1-\varepsilon) < 0$, $y'(1+\varepsilon) > 0$. Zato funkcija u toj tački ima minimum, jednak 0. Za neparno n : $y'(1-\varepsilon) > 0$, $y'(1+\varepsilon) > 0$, tj. funkcija u toj tački nema ekstremum. Na kraju za tačku $x_3 = \frac{m}{m+n}$ imamo

$$y'\left(\frac{m}{m+n} - \varepsilon\right) > 0, \; y'\left(\frac{m}{m+n} + \varepsilon\right) < 0.$$

Znači, u toj tački funkcija ima maksimum, i on iznosi

$$y\left(\frac{m}{m+n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

U slučaju $m = 1$ $(n = 1)$ dobijamo isti rezultat. ►

281. $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

◄ Izjednačavanjem izvoda sa nulom

$$y' = \frac{1}{9}\,\frac{\frac{1}{3} - x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = 0,$$

nalazimo stacionarnu tačku $x_1 = \frac{1}{3}$. U tačkama $x_2 = 0$ i $x_3 = 1$ izvod ne postoji. Neka je $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$; tada je

$$\begin{aligned} y'\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) &> 0, \; y'\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) < 0, \; y'(-\varepsilon) > 0, \; y'(\varepsilon) > 0 \\ y'(1-\varepsilon) &< 0, \; y'(1+\varepsilon) > 0 \end{aligned}$$

Sledi, za $x_1 = \frac{1}{3}$ funkcija ima maksimum, i on iznosi $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$. Za $x_2 = 0$ funkcija nema ekstremum, a za $x_3 = 1$ funkcija ima minimum jednak 0. ►

282. Ispitati ekstremume funkcije $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$, $n \in \mathbb{N}$, u tački $x = x_0$, ako je funkcija φ neprekidna u toj tački i $\varphi(x_0) \neq 0$.

◄ Iz datih uslova sledi da postoji okolina $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, u kojoj funkcija φ ima isti znak kao $\varphi(x_0)$. Pošto za parno n, razlika $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \varphi(x_0)$ u $\delta-$ okolini tačke x_0 ima znak kao i $\varphi(x_0)$, to tada u tački x_0 funkcija f ima minimum ako je $\varphi(x_0) > 0$, tj. maksimum ako je $\varphi(x_0) < 0$. Ako je n neparan prirodan broj, razlika $f(x) - f(x_0)$ u proizvoljnoj $\delta-$okolini tačke x_0, uzima vrednosti različite po znaku, što znači da u toj tački nema ekstremum. ►

283. Neka je $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ i neka je x_0 stacionarna tačka funkcije f, tj. $P_1(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$. Dokazati, da je $sgn f''(x_0) = sgn P_1'(x_0)$, pretpostavljajući da $P_1'(x_0)$ postoji i da je $Q(x)$ neprekidna funkcija.

◄ Po definiciji drugog izvoda u tački x_0, nalazimo

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P_1(x_0 + \Delta x)}{\Delta x \cdot Q^2(x_0 + \Delta x)} = \frac{P_1'(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

Odavde, sledi da je $sgn f''(x_0) = sgn P_1'(x_0)$. ►

284. Može li se tvrditi, da ako funkcija f u tački x_0 ima maksimum, to u nekoj dovoljno maloj okolini te tačke sleva od x_0 funkcija f raste, a zdesna od nje, opada.

◄ Ne može. Na primer funkcija $f(x) = 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ i $f(0) = 2$, u tački $x_0 = 0$ ima maksimum, jer je

$$f(x) - f(0) = -x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) < 0, \ x \neq 0.$$

U isto vreme, njen izvod

$$f'(x) = -4x - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}, \ x \neq 0$$

u svakom od intervala $]-\delta, 0[$ i $]0, \delta[$, $\delta > 0$ uzima vrednosti različite po znaku, što znači da u svakom takvom intervalu funkcija nije monotona. ►

285. Dokazati da funkcija

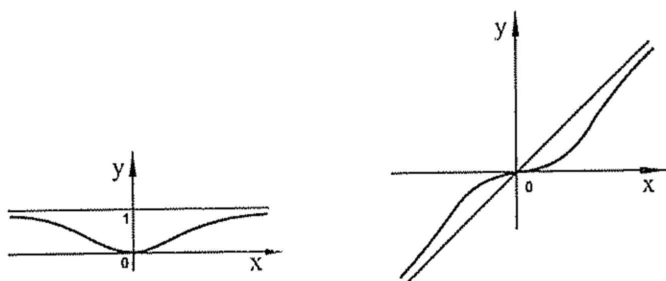
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ima u tački $x = 0$ minimum, a funkcija

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

u tački $x = 0$ nema ekstremum, iako je $f^{(n)}(0) = 0$, $g^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Nacrtati grafike tih funkcija.

◀ Nađimo priraštaje funkcija f i g u tački $x = 0$. Imamo: $\Delta f(0) = e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}$, $\Delta g(0) = \Delta x \cdot e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}$. Pošto je $\Delta f(0) > 0$, to funkcija f u tački $x = 0$ ima minimum jednak 0. Znak priraštaja $\Delta g(0)$ funkcije g u svakoj okolini nule je promenljiv, pa stoga funkcija g u nuli nema ekstremum. Grafici su dati redom na (sl.84). ▶



sl 84

286. Ispitati ekstremume funkcija:

a) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$ za $x \neq 0$ i $f(0) = 0$.

b) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \cos\frac{1}{x}\right)$ za $x \neq 0$ i $f(0) = 0$.

Nacrtati grafike tih funkcija.

◀ a) Ispitajmo znak priraštaja funkcije f u tački $x = 0$. imamo,

$$\Delta f(0) = e^{-\frac{1}{|\Delta x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{\Delta x}\right) > 0$$

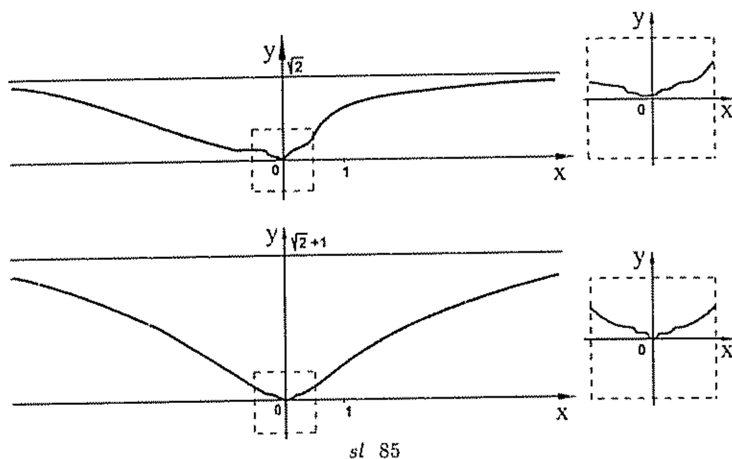
za sve $\Delta x \neq 0$; sledi, funkcija ima za $x = 0$ minimum, jednak $f(0) = 0$. Za $x \neq 0$ funkcija je diferencijabilna, i zato za nalaženje stacionarnih tačaka, razmotrimo jednačinu $f'(x) = 0$. Očigledno je

$$y' = x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right) sgnx - \cos\frac{1}{x}\right), \ x \neq 0.$$

Pošto je $\left|\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right| \leq \sqrt{2}$, to izvod funkcije prilikom prolaženja kroz tačke u kojima je jednak nul, ne menja znak. Zato, osim $f_{\min} = f(0) = 0$, funkcija neme više ekstremnih vrednosti.

U slučaju b) se analognim zaključivanjem dobija isti rezultat: funkcija ima jedinstvenu ekstremnu vrednost, jednaku nuli za $x = 0$.

Grafici funkcija su dati na (sl.85). ▶



sl 85

Naći ekstremume sledećih funkcija:

287. $y = \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$.

◀ Imamo, $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$. Pošto je $y'(1) = 0$, to je tačka $x = 1$ stacionarna. Lako se vidi da je za $x < 1$, $y' > 0$ a za $x > 1$, $y' < 0$. Odavde sledi, da za $x = 1$ funkcija ima maksimum jednak $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. ▶

288. $y = |x|\, e^{-|x-1|}$.

◀ Imamo,

$$y' = e^{-|x-1|} sgn x - |x|\, e^{-|x-1|} sgn\,(x-1) \quad (x \neq 0 \text{ i } x \neq 1).$$

Pošto prvi izvod ne postoji u tačkama $x = 0$ i $x = 1$, a u njima je funkcija očigledno neprekidna, i kako je $f(-1) = 0$ to su te tri tačke, tačke mogućeg ekstremuma. Za znak prvog izvoda, imamo

$$\begin{aligned} y'(-1-\varepsilon) &> 0,\ y'(-1+\varepsilon) < 0 \ \left(y_{\max} = e^{-2}\right); \\ y'(-\varepsilon) &< 0,\ y'(\varepsilon) > 0 \ (y_{\min} = 0); \\ y'(1-\varepsilon) &> 0,\ y'(1+\varepsilon) < 0 \ (y_{\max} = 1). \end{aligned}$$ ▶

Naći najmanju i najveću vrednost sledećih funkcija:

289. $f(x) = \left|x^3 - 3x + 2\right|$ na segmentu $[-10, 10]$.

◀ Nađimo izvod $f'(x)$:

$$f'(x) = (2x - 3)\, sgn\left(x^2 - 3x + 2\right);\ x \neq 1,\ x \neq 2;$$

odakle dobijamo tačke u kojima funkcija može da ima ekstremume:

$$x_1 = \frac{3}{2} \left(f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0\right); \ x_2 = 1, \ x_3 = 2$$

$(f'(1), f'(2)$ ne postoje). Upoređujući vrednosti

$$f(x_1) = \frac{1}{4}; \ f(x_2) = 0; \ f(x_3) = 0; \ f(-10) = 132; \ f(10) = 72,$$

zaključujemo da je najveća vrednost 132, a najmanja 0. ►

290. $f(x) = \sqrt{5-4x}$ na segmentu $[-1, 1]$.

◄ Pošto izvod

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$$

postoji i razlikuje se od nule na segmentu $[-1, 1]$, to su najveća i najmanja vrednost funkcije postignute na krajevima tog segmenta, tj. $f(-1) = 3$, $f(1) = 1$. ►

Naći infimum i supremum sledećih funkcija:

291. $f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$, $x \in]0, +\infty[$.

◄ Nađimo izvod

$$f'(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!} < 0; \ x > 0.$$

Upoređujući brojeve $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, nalazimo da je $\inf\limits_{x>0} f(x) = 0$, $\sup\limits_{x>0} f(x) = 1$, na osnovu toga što f opada na $]0, +\infty[$. ►

292. $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$ na intervalu $]-\infty, +\infty[$.

◄ Uzimajući u obzir parnost funkcije f dovoljno je posmatrati polu interval $x \geq 0$. Imamo

$$f'(x) = -2\sqrt{2} x e^{-x^2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x^2\right),$$

odakle nalazimo tačke mogućeg ekstremuma:

$$x_1 = 0, \ x_k^2 = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Upoređujući brojeve

$$f(0) = 1, \ f(x_k) = (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3\pi}{4} - k\pi}, \ k \in \mathbb{N}_0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

dobijamo da je

$$\inf_{-\infty<x<+\infty} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}}, \quad \sup_{-\infty<x<+\infty} f(x) = 1. \ \blacktriangleright$$

293. $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ na skupu $x < \xi < +\infty$, a zatim nacrtati grafike funkcija

$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \text{ i } m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

◄ Nalazimo da je

$$f'(\xi) = \frac{3-\xi^2-2\xi}{(3+\xi^2)^2};$$

a odatle tačke $\xi_1 = -3$, $\xi_2 = 1$ mogućeg ekstremuma. Razmatranjem brojeva

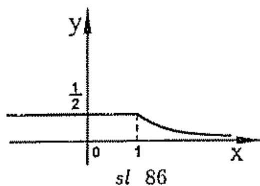
$$f(-3) = -\frac{1}{6}; \ f(1) = \frac{1}{2}; \ \lim_{\xi\to x+0} f(\xi) = \frac{1+x}{3+x^2}; \ \lim_{\xi\to+\infty} f(\xi) = 0$$

i upoređujući ih među sobom, nalazimo da je

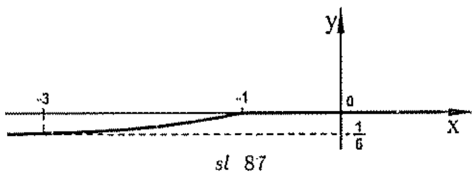
$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \le 1; \\ \frac{1+x}{3+x^2}, & x > 1; \end{cases}$$

$$m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}, & x \le -3; \\ \frac{1+x}{3+x^2}, & -3 < x \le -1; \\ 0, & x > -1. \end{cases}$$

Grafici funkcija $M(x)$ i $m(x)$ prikazani su na (**sl.86, 87**). ►



sl 86



sl 87

294. Neka je $M_k = \sup_x \left|f^k(x)\right|$, $k \in \mathbb{N}_0$. Naći M_0, M_1 i M_2, ako je $f(x) = e^{-x^2}$.

◄ Upoređujući vrednosti $f(0) = 1$ $(f'(0) = 0)$ i $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, nalazimo da je $M_0 = 1$. Radeći to isto sa vrednostima $f'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0\right)$ i $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$, dobijamo da je $M_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$. Analogno nalazimo da je $M_2 = 2e$. ►

295. Odrediti najveći član niza $a_n : n \in \mathbb{N}$ ako je
a) $a_n = n^{10}2^{-n}$; b) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+10000}$; c) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

◀ Stavljajući $n = x$, u datim primerima, možemo smatrati da su članovi niza, vrednosti odgovarajuće diferencijabilne funkcije, tj. da je $a_n = f(n)$.

Neka je x_0 stacionarna tačka funkcije f. Tada je $k \leq x_0 < k+1$ za neki prirodan broj k. Sada imamo: ako niz a_n ima najveći član, u oznaci $\max a_n$, to je on jednak najvećem među brojevima a_1, a_k, a_{k+1}.

a) Imamo $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$ $(x \geq 1)$. Izvod $f'(x) = 2^{-x}(10 - x\ln 2)x^9$ je jednak nuli, za $x = \frac{10}{\ln 2} \approx 14,5$. Upoređivanjem brojeva $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{14} = \frac{14^{10}}{2^{14}}$, $a_{15} = \frac{15^{10}}{2^{15}}$ dobijamo da je $\max a_n = \frac{14^{10}}{2^{14}} \approx 1,77 \cdot 10^7$.

b) Slično,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+10000}, \quad f'(x) = \frac{10^4 - x}{2\sqrt{x}\,(x+10^4)^2},$$

odakle je $f'(x) = 0$ za $x = 10^4$. I tako je $a_1 = \frac{1}{10001}$, $a_{10000} = 0,005$, tj. $\max a_n = 0,005$.

c) Ovde je $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$. Odavde nalazimo da je $f'(x) = 0$ kad je $x = e$. Upoređivanjem brojeva $a_1 = 1$; $a_2 = \sqrt{2}$; $a_3 = \sqrt[3]{3}$, nalazimo da je $\max a_n = \sqrt[3]{3} \approx 1,44$. ▶

296. Dokazati nejednakosti:
a) $|3x - x^3| \leq 2$ za $|x| \leq 2$;
b) $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$, za $0 \leq x \leq 1$ i $p > 1$;
c) $x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$ za $m > 0$, $n > 0$, $0 \leq x \leq a$;
d) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x + a$ $(x > 0,\ a > 0,\ n > 1)$;
e) $|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

◀ a) Nađimo

$$\max_{|x|\leq 2} |f(x)| = \max_{|x|\leq 2} |3x - x^3|.$$

Imamo, $f'(x) = 3 - 3x^2$. Odatle je $f'(x) = 0$, za $x = \pm 1$. Upoređujući sada vrednosti funkcije u stacionarnim tačkama i na krajevima intervala, $|f(-2)|$, $|f(-1)|$, $|f(1)|$, $|f(2)|$ nalazimo da je $\max\limits_{|x|\leq 2} |f(x)| = 2$, tj. $|3x - x^3| \leq 2$.

b) Razmotrimo funkciju $f(x) = x^p + (1-x)^p$. Njen izvod $f'(x) = px^{p-1} + p(1-x)^{p-1}$ ima nulu: $x = \frac{1}{2}$. Upoređivanjem brojeva $f(0) = 1$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$; $f(1) = 1$, dobijamo da je $\max\limits_{0\leq x\leq 1} f(x) = 1$, a $\min\limits_{0\leq x\leq 1} f(x) = \frac{1}{2^{p-1}}$. Odavde sledi nejednakost b)

c) Slično, nalazimo da je $\max\limits_{0\leq x\leq a} f(x) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$, gde je $f(x) =$

$x^m(a-x)^n$ i gde je maksimum postignut u tački $x = \frac{ma}{m+n}$; zato važi nejedakost **c)**

d) Ako je $x > 0$, $a > 0$, $n > 1$ važe nejednakosti $\sqrt[n]{x^n + a^n} - x \le a$ i $\sqrt[n]{\frac{x^n+a^n}{2}} - \frac{x}{2} \ge \frac{a}{2}$, koje se lako dobijaju, na osnovu metoda prethodnog paragrafa. Odatle i sledi nejednakost **d)**.

e) Posmatrajmo funkciju $f(x) = |a\sin x + b\cos x|$. Imamo,

$$f'(x) = (a\cos x - b\sin x)\, sgn\,(a\sin x + b\cos x).$$

Izvod ne postoji u tačkama, gde je $\tan x = -\frac{b}{a}$ $(b\cos x + a\sin x = 0)$, i postaje nula, u tačkama gde je

$$\tan x = \frac{a}{b} \quad (b\sin x = a\cos x). \tag{1}$$

Zamenjujući u jednakosti

$$f(x) = |a\sin x + b\cos x| = \sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x + 2ab\sin x\cos x}$$

vrednost $2ab\sin x\cos x = a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x$, dobijenu prema (1), imamo da je $f(x) \le \sqrt{a^2+b^2}$, što je i trebalo dokazati. ▶

297. Dokazati nejednakost

$$\frac{2}{3} \le \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \le 2$$

za $-\infty < x < +\infty$.

◀ Dokaz sledi na osnovu upoređivanja sledeća četiri broja:

$$f_{\max}(x);\ f_{\min}(x);\ \lim_{x\to-\infty} f(x);\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

gde je $f(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)^{-1}$. ▶

298. Odrediti "rastojanje od nule" polinoma

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

na segmentu $[-2,1]$, tj. naći $E_P = \sup\limits_{-2\le x\le 1} |P(x)|$.

◀ Imamo:

$$P'(x) = (x-1)^2(x+2) + 2x(x-1)(x+2) + x(x-1)^2.$$

Iz jednačine $P'(x) = 0$, nalazimo

$$x_1 = 1,\ x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Upoređivanjem brojeva $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ i $f(-2)$, dobijamo da je

$$E_P = \frac{9+6\sqrt{3}}{4}. \ ►$$

299. Odrediti q tako da je "rastojanje od nule" polinoma $P(x) = x^2 + q$ na segmentu $[-1,1]$, najmanje.

◄ Prema zadatku 298, treba naći q za koje je $E_P = \sup\limits_{-1\leq x\leq 1} |P(x)|$ minimalno. Upoređivanjem brojeva $P(0) = q; P(\pm 1) = q+1$, nalazimo, da je

$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |P(x)| = \max\{|q|, |q+1|\} = \begin{cases} |q|, & |q| \geq |q+1|; \\ |q+1|, & |q+1| \geq |q|; \end{cases}$$

$$\text{tj. } \sup_{-1\leq x\leq 1} |P(x)| = \left|q+\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}.$$

Dalje, imamo

$$\min E_P = \min_q \max\{|q|, |q+1|\} = \min_q \left\{\left|q+\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

za $q = -\frac{1}{2}$. ►

300. Apsolutnim rastojanjem dve funkcije f i g na segmentu $[0,1]$ naziva se broj

$$\Delta = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Odrediti apsolutno rastojanje funkcija $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$ na segmentu $[0,1]$.

◄ Diferencijabilna funkcija $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ uzima jednake vrednosti na krajevima segmentana $[0,1]$; $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ a u intervalu $]0,1[$ ima jedinstvenu stacionarnu tačku $x = \frac{2}{3}$. Sledi,

$$\Delta = \max\left\{|\varphi(0)|, \left|\varphi\left(\frac{2}{3}\right)\right|\right\} = \left|\varphi\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{4}{27}. \ ►$$

301. Funkciju $f(x) = x^2$ na segmentu $[x_1, x_2]$ približno zameniti linearnom funkcijom $g(x) = (x_1 + x_2)x + b$ tako da apsolutno rastojanje funkcija f i g bude minimalno i odrediti to rastojanje.

◄ Diferencijabilna funkcija $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ uzima jednake vrednosti

na krajevima segmentana $[x_1, x_2]$; $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = -b - x_1x_2$ a u intervalu $]x_1, x_2[$ ima jedinstvenu stacionarnu tačku $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$. Sledi,

$$\Delta = \min\left\{\max\left\{|\varphi(x_1)|, \left|\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|\right\}\right\},$$

odakle se dobija

$$|\varphi(x_1)| = \left|\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right| \text{ ili}$$

$$\varphi^2(x_1) = \varphi^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), \text{ tj.}$$

$$(x_1x_2)^2 + 2bx_1x_2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^4 + 2b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

Sledi, $b = -\frac{1}{8}\left(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2\right)$; $g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}\left(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2\right)$; $\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2$. ▶

Odrediti broj realnih korena (rešenja) i lokalizovati ih, ako je:

302. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

◀ Zapišimo jednačinu u obliku $y_1(x) = y_2(x)$, gde je $y_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ a $y_2(x) = 10$. Sada ispitajmo ekstreme funkcije $y_1(x)$. Njen izvod $y_1'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ ima za nule brojeve $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, gde je $y_1''(1) < 0$, $y_2''(3) > 0$; zato je $y_{1\max} = y_1(1) = 4$, $y_{1\min} = y_1(3) = 0$. Dalje je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y_1(x) = \pm\infty$. Dakle, kubna parabola $y_1(x)$ i prava $y_2(x)$ seku se u jednoj tački; tj. data jednačina ima jedan koren x_0 $(3 < x_0 < +\infty)$. ▶

303. $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0$.

◀ Zapisujući jednačinu u obliku $y_1(x) = y_2(x)$, gde je $y_1(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; $y_2(x) = -h$, i primenjujući istu shemu kao u prethodnom primeru, dobijamo

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= 3x^2 - 6x - 9;\ y_1'(-1) = 0;\ y_1'(3) = 0;\\
y_1''(-1) &< 0;\ y_1''(3) > 0;\ y_{1\max} = y_1(-1) = 5;\ y_{1\min} = y_1(3) = -27;\\
\lim_{x\to\pm\infty} y_1(x) &= \pm\infty.
\end{aligned}$$

Nule funkcije:

$$x_1 = \frac{3\left(1-\sqrt{5}\right)}{2};\ x_2 = 0;\ x_3 = \frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}.$$

Sada imamo: ako je $-\infty < h < -5$, jednačina ima jedan koren α_1

$$\left(\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} < \alpha_1 < +\infty\right);$$

za $-5 < h < 0$, jednačina ima tri realna korena: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

$$\left(\frac{3(1-\sqrt{5})}{2} < \beta_1 < -1, \ -1 < \beta_2 < 0, \ \frac{3(1+\sqrt{5})}{2} < \beta_3 < +\infty\right);$$

ako je $0 < h < 27$, to jednačina ima tri realna korena: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\left(-\infty < \gamma_1 < \frac{3(1-\sqrt{5})}{2}; \ 0 < \gamma_2 < 3, \ 3 < \gamma_3 < \frac{3(1+\sqrt{5})}{2}\right);$$

i na kraju, ako je $27 < h < +\infty$, jednačina ima jedan realan koren δ_1 $(-\infty < \delta_1 < \frac{3(1-\sqrt{5})}{2})$. ►

304. $\ln x = kx$.

◄ Zapišimo jednačinu u obliku $y_1(x) = y_2(x)$, gde je $y_1(x) = \frac{\ln x}{x}$, $y_2(x) = k$ $(k > 0)$. Pošto je $\lim\limits_{x\to+0} y_1(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y_1(x) = 0$; $y_1'(e) = 0$, to funkcija $y_1(x)$ na intervalu $]0, +\infty[$ uzima najveću vrednost u tački $x = e$, jednaku $\frac{1}{e}$. Pored toga, $y_1(1) = 0$. Ako je $k > \frac{1}{e}$, to se kriva $y_1(x)$ i prava $y_2(x)$ ne seku i tada polazna jednačina nema rešenja. Ako je $0 < k < \frac{1}{e}$, onda jednačina ima dva realna korena: α_1, α_2 $(1 < \alpha_1 < e;\ e < \alpha_2 < +\infty)$. Ako je $k < 0$, jednačina ima jedan realan koren β_1 $(0 < \beta_1 < 1)$. ►

305. $e^x = ax^2$.

◄ Zapišimo jednačinu u obliku $y_1(x) = y_2(x)$, gde je $y_1(x) = x^{-2}e^x$; $y_2(x) = a$. Diferenciranjem, nalazimo $y_1'(x) = x^{-2}e^x\left(1 - \frac{2}{x}\right)$. Funkcija $y_1(x)$ ima za $x = 2$ minimum jednak $\frac{e^2}{4}$, jer je $\lim\limits_{x\to+0} y_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} y_1(x) = +\infty$. Zato imamo: ako je $0 < a < \frac{e^2}{4}$, jednačina nema realnih rešenja na intervalu $]0, +\infty[$. Za $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$, jednačina ima dva realna korena : α_1, α_2 $(0 < \alpha_1 < 2;\ 2 < \alpha_2 < +\infty)$. Na osnovu toga što za $x < 0$ funkcija $y_1(x)$ raste $(\inf y_1(x) = 0,\ \sup y_1(x) = +\infty)$ za svako $a > 0$ uvek postoji jedan negativan koren . Dakle, za $0 < a < \frac{e^2}{4}$ jednačina ima jedan koren: α_1 $(-\infty < \alpha_1 < 0)$; za $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ tri korena: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ $(-\infty < \beta_1 < 0,\ 0 < \beta_2 < 2,\ 2 < \beta_3 < +\infty)$. ►

306. $\sin^3 x \cos x = a$.

◄ Razmotrimo izvod π−periodične funkcije $f(x) = \sin^3 x \cos x - a$. Imamo $f'(x) = \sin^2 x\left(3 - 4\sin^2 x\right)$. Njegove nule na $[0, \pi]$ su: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π. Lako se proverava da u tačkama $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{2\pi}{3}$ redom, funkcija postiže maksimum i minimum. Upoređivanjem brojeva: $f(0) = f(\pi) = a$; $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a$; $f_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a$, zaključujemo da za $0 < a < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ postoje dva korena funkcije $f(x)$: $0 < x_1 < \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} < x_2 < \frac{2\pi}{3}$; ako je $a > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ korena nema. Za

$-\frac{3\sqrt{3}}{16} < a < 0$, opet postoje dva korena: $\frac{\pi}{3} < x_3 < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} < x_4 < \pi$; i na kraju za $a < -\frac{3\sqrt{3}}{16}$ jednačina nema korena. ►

307. Pod kojim uslovima jednačina $x^3+px+q=0$ ima: a) jedan realan koren; b) tri realna korena. Nacrtati odgovarajuće oblasti u ravni (p,q).

◄ Pošto $f(x) \to \pm\infty$ kad $x \to \pm\infty$, gde je $f(x) = x^3+px+q$, to pod uslovima: ili $f_{\min} > 0$, ili $f_{\max} < 0$, ili $f'(x) \geq 0$ data jednačina ima samo jedan koren. Ako je $f_{\max} \geq 0$ i $f_{\min} \leq 0$, onda jednačina ima tri realna korena. Sudeći po izvodu $f'(x) = 3x^2+p$, nalazimo $f_{\max}$ i $f_{\min}$. Nule izvoda su: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $p<0$ (za $p>0$ jednačina ima jedan realan koren). Na osnovu znaka drugog izvoda u tačkama $x_{1,2}$, nalazimo da je

$$f_{\max} = q - \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad f_{\min} = q + \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Na osnovu rečenog, za postojanje tri realna korena, treba da bude ispunjeno: $f_{\max} \geq 0$ i $f_{\min} \leq 0$. Odatle sledi,

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \leq q \leq -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

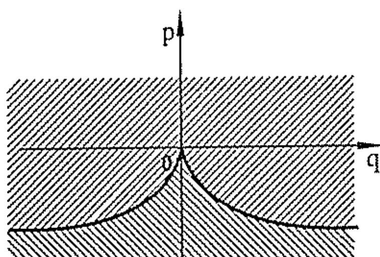
tj. $|q| \leq -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}$, ili $q^2 + \frac{4}{27}p^3 \leq 0$.

Za postojanje samo jednog realnog korena, treba da bude, ili $f_{\min} > 0$, ili $f_{\max} < 0$, ili $f'(x) \geq 0$. Iz svega ovoga sledi, da je

$$q^2 + \frac{4}{27}p^3 > 0$$

(slučaj $p > 0$ je uključen u tu nejednakost).

Odgovarajuće oblasti u ravni (p,q) date su na (sl.88). ►



sl 88

2.11 Tok i grafik funkcije

Ispitivanje i crtanje grafika funkcije $y = f(x)$ izvodi se po sledećoj shemi:

1. Odredi se oblast definisanosti, periodičnost, nule, znak, simetričnost grafika, tačke prekida i intervali neprekidnosti.

2. Asimptote.

3. Monotonost funkcije (intervali rašćenja i opadanja).

4. Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke.

5. Crtanje grafika funkcije.

1^0 Rešeni zadaci.

Ispitati tok i nacrtati grafik sledećih funkcija:

308. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

◄ **1.** Funkcija je definisana i neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$, pozitivna je za $x > 2$, a negativna za $x < 2 : y(2) = 0$.

2. Iz $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm 1$ sledi, da je prava $y = 1$ asimptota grafika funkcije, kad $x \to +\infty$, a prava $y = -1$, kad $x \to -\infty$.

3. Pošto je izvod

$$y' = \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \begin{cases} < 0, & x < -\frac{1}{2}; \\ > 0, & x > -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

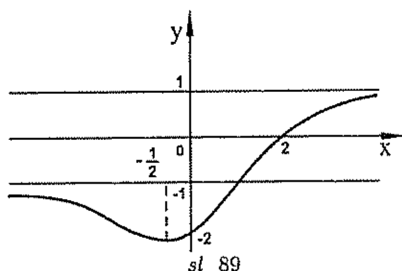
to funkcija opada za $x < -\frac{1}{2}$ a raste za $x > -\frac{1}{2}$, za $x = -\frac{1}{2}$ ima minimum, jednak $-\sqrt{5} \approx -2,24$.

4. Sudeći po znaku drugog izvoda :

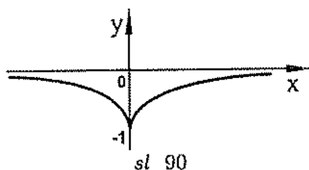
$$y'' = -\frac{4\left(x + \frac{3+\sqrt{41}}{8}\right)\left(x - \frac{\sqrt{41}-3}{8}\right)}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \begin{cases} < 0, & x < -\frac{\sqrt{41}+3}{8}; \\ > 0, & -\frac{\sqrt{41}+3}{8} < x < \frac{\sqrt{41}-3}{8} \\ < 0, & x > \frac{\sqrt{41}-3}{8} \end{cases}$$

zaključujemo, da je za $x < -\frac{\sqrt{41}+3}{8} \approx -1,18$ i za $x > \frac{\sqrt{41}-3}{8} \approx 0,42$ grafik funkcije konkavan, a za $-\frac{\sqrt{41}+3}{8} < x < \frac{\sqrt{41}-3}{8}$ konveksan. Prevojne tačke su: $x_1 \approx -1,18$; $y_1 \approx -2,06$; i $x_2 \approx 0,42$ $y_2 \approx -1,46$.

5. Grafik je nacrtan na (sl.89). ▶



sl 89



sl 90

309. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

◀ **1.** Funkcija je definisana, neprekidna i nenegativna za sve x; njen grafik je simetričan u odnosu na osu Oy, jer je $y(x) = y(-x)$.

2. Pošto je $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$, to je $y = 0$ asimptota; drugih asimptota nema.

3. Po znaku izvoda

$$y' = \frac{2\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}\right)}{3x^{\frac{1}{3}}\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}} \begin{cases} < 0, & x < 0; \\ > 0, & x > 0 \end{cases}$$

zaključujemo, da funkcija opada za $x < 0$ a raste za $x > 0$, dakle, za $x = 0$ ima minimum, jednak -1.

4. Pošto je

$$y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{3}}\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{10}{3}}\right) < 0 \quad (0 < |x| < +\infty),$$

to je grafik funkcije konkavan i nema prevojnih tačaka.

5. Na osnovu dobijenog crtamo grafik, (sl.90). ▶

310. $y = \frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

◀ **1.** Funkcija je definisana, neprekidna i pozitivna za svako $x > 0$.

2. Iz očigledne jednakosti $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$ sledi, da je $x = 0$ vertikalna asimptota. Kosa asimptota je $y = kx + b$, gde je $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (y - x) = \frac{3}{2}$, tj. $y = x + \frac{3}{2}$.

3. Prvi izvod y' zadovoljava nejednakosti

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}(2x-1) \begin{cases} < 0, & x < \frac{1}{2}; \\ > 0, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

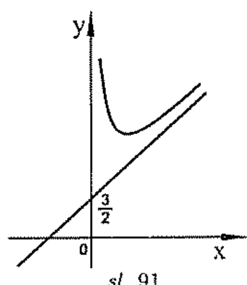
sledi, funkcija opada za $0 < x < \frac{1}{2}$ a raste ako je $x > \frac{1}{2}$, tj. za $x = \frac{1}{2}$ funkcija ima minimum, jednak $\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2,60$.

4. Pošto je

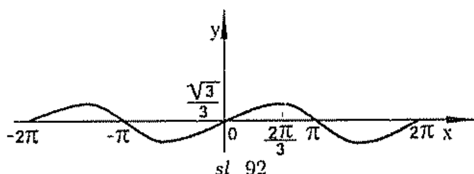
$$y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}} > 0 \ (0 < x < +\infty),$$

to je grafik funkcije konveksan.

5. Grafik je nacrtan na (sl.91). ▶



sl 91



sl 92

311. $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

◀ **1.** Funkcija je definisana i neprekidna za sve x; periodična je sa periodom 2π; ima koordinatni početak za centar simetrije; $y = 0$ za $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Očigledno je $sgn y = sgn \sin x$.

2. Asimptota nema. Uzimajući u obzir periodičnost, ispitaćemo je samo na segmentu $[0, 2\pi]$.

3. Na osnovu znaka prvog izvoda

$$y' = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2} \begin{cases} > 0, & 0 \le x < \frac{2\pi}{3}; \\ < 0, & \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}; \\ > 0, & \frac{4\pi}{3} < x \le 2\pi, \end{cases}$$

zaključujemo, da za $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3} < x \le 2\pi$ funkcija raste, a za $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ funkcija opada; redom u tačkama $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ i $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ ima maksimum i minimum, koji iznose $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$ i $-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,58$.

4. Kako je

$$y'' = \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^2} \begin{cases} < 0, & 0 < x < \pi; \\ > 0, & \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

to je za $0 < x < \pi$ grafik konveksan, a za $\pi < x < 2\pi$ grafik je konkavan; pa je prevojna tačka data sa $x_1 = \pi$, $y_1 = 0$.

5. Grafik je nacrtan na (sl.92). ▶

312. $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

◀ **1.** Funkcija postoji, neprekidna je i pozitivna za sve $x \in]-\infty, -1] \cup$

$[1, +\infty[$; pri čemu je $y > 1$ za sve x iz oblasti definisanosti; grafik je simetričan u odnosu na ordinatnu osu; $y(-1-0) = y(1+0) = 2^{\sqrt{2}}$.

2. Pošto je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$, to je $y = 1$ asimptota funkcije, kad $x \to \infty$.

3. Imamo

$$y' = xy\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)\ln 2 \begin{cases} > 0, & x < -1 \\ < 0, & x > 1, \end{cases}$$

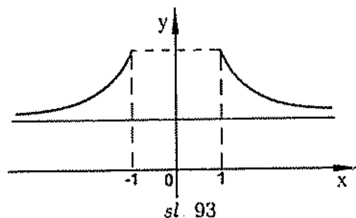
sledi, funkcija za $x < -1$ raste, a za $x > 1$ opada, u tačkama $x = \pm 1$ ima krajevni maksimum, jednak $2^{\sqrt{2}}$ (funkcija f, $a \le x < \alpha\,(\beta < x \le b)$ ima u tački $a\,(b)$ krajnji maksimum, ako postoji polu okolina $]a, \delta[\subset [a, \alpha[$ $(]\beta, \delta[\subset]\beta, b])$ takva, da je $f(a) > f(x)$ $(f(b) > f(x))$ za sve x iz te polu okoline. Analogno se definiše krajnji minimum).

4. Očigledno je

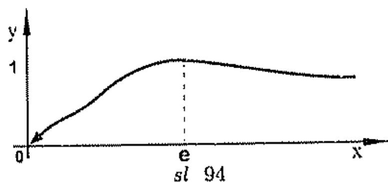
$$\begin{aligned} y'' &= y\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + x^2\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2\right. \\ &\quad \left. + x^2\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)\right) \\ &> y\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right) \\ &= y\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right)\ln 2 > 0 \end{aligned}$$

sledi, grafik funkcije je konveksan.

5. Grafik je dat na (sl.93). ▶



sl. 93



sl 94

313. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

◀ **1.** Funkcija je definisana, neprekidna (kao kompozicija elementarnih funkcija: $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$) i pozitivna za $x > 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, zato je $y = 1$ asimptota.

3. Iz jednakosti

$$y' = \frac{y}{x^2}(1 - \ln x)\begin{cases} > 0, & 0 < x < e; \\ < 0, & e < x < +\infty, \end{cases}$$

proističe, da za $0 < x < e$ funkcija raste, a za $e < x < +\infty$ opada, za $x = e$ ima maksimum, jednak $e^{\frac{1}{e}}$; pored toga je $y(+0) = 0$.

4. Prevojne tačke, konkavnost i konveksnost nećemo ispitivati.

5. Grafik je nacrtan na (sl.94). ▶

314. $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

◀ **1.** Funkcija je definisana za $x > -1$; $x \neq 0$; pozitivna i neprekidna u toj oblasti. Pošto je $\lim\limits_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, to je $x = 0$ tačka otklonjivog prekida.

2. Iz relacije $\lim\limits_{x\to-1+0} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$ sledi da je prava $x = -1$ asimptota grafika funkcije, kad $x \to -1 + 0$, a prava $y = 1$ kad $x \to +\infty$.

3. Izvod

$$y' = y\left(\frac{1}{x(x + 1)} - \frac{\ln(x + 1)}{x^2}\right); \quad -1 < x < 0, \ 0 < x < +\infty$$

je negativan u oblasti definisanosti. Zaista, uzimajući u nejednakosti primera 161,g) $\frac{a-b}{b} = x$, imamo nejednakost

$$\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x \ \ (x > 0),$$

koja je ispunjena i za $-1 < x < 0$. Polazeći od nje, dobijamo

$$y' = y\left(\frac{1}{x(x + 1)} - \frac{\ln(x + 1)}{x^2}\right) < y\left(\frac{1}{x(x + 1)} - \frac{x}{x^2 + x^3}\right) = 0.$$

Na taj način, funkcija opada na svakom od intervala definisanosti.

4. Pokažimo da je drugi izvod

$$y'' = y\left(\left(\frac{1}{x(x + 1)} - \frac{\ln(x + 1)}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^3}\left(2\ln(1 + x) - \frac{2x + 3x^2}{(1 + x)^2}\right)\right)$$

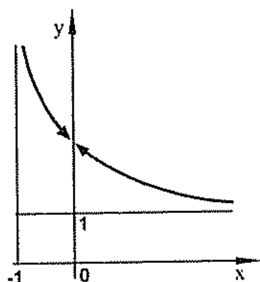
pozitivan. U tom cilju razmotrimo funkciju

$$\varphi(x) = 2\ln(1 + x) - \frac{2x + 3x^2}{(1 + x)^2}.$$

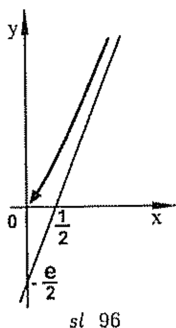
Pošto je $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{(1+x)^3} > 0; -1 < x < +\infty$ i $\varphi(0) = 0$, to je $\varphi(x) < 0$,

za $-1 < x < 0$ i $\varphi(x) > 0$, ako je $0 < x < +\infty$. Tada je $\frac{1}{x^3}\varphi(x) > 0$ za $-1 < x < 0$, $0 < x < +\infty$; Dakle, za sve vrednosti promenljive iz oblasti definisanosti funkcije, imamo da je $y'' > 0$, tj. grafik funkcije je konveksan, na svakom od intervala definisanosti.

5. Na osnovu rečenog, crtamo grafik funkcije, (**sl.95**). ▶



sl 95



sl 96

315. $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x > 0)$.

◀ **1.** Funkcija je definisana, neprekidna i pozitivna za sve $x > 0$; $y(+0) = \lim\limits_{x\to+0} xe^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$.

2. Za kosu asimptotu $y = kx + b$, imamo:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y - ex) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - e\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} - e\right) = \lim_{x\to+\infty} e\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right) = -\frac{e}{2}.$$

3. Imamo

$$y' = y\left(\frac{1}{x(x+1)} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) > 0.$$

Odavde sledi da funkcija raste za $x > 0$.

4. Drugi izvod

$$y'' = y\left(\frac{2}{x(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+3}{x(1+x)^2}\right)$$

je pozitivan. Da je to tako, uvedimo novu promenljivu $t = \frac{1}{x}$ i primenimo primer 186, stavljajući:

$$\varphi(t) = \left((1+t)\ln(1+t) + t^2\right)^2;\ \psi(t) = t^4 + 3t^3 + t^2;\ t_0 = 0,\ k = 4.$$

Tada su ispunjeni svi uslovi primera 186. Sledi, $y'' > 0$ za $x > 0$ tj. grafik funkcije je konveksan.

5. Grafik je nacrtan na (sl.96). ►

316. $y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$.

◄ **1.** Funkcija je definisana, neprekidna i pozitivna za sve vrednosti x, izuzev tačaka ± 1, za koje je

$$y(-1-0) = 0;\ y(-1+0) = +\infty;\ y(1-0) = +\infty;\ y(1+0) = 0.$$

Grafik je simetričan u odnosu na y osu.

2. Imamo prave $x = -1$ i $x = 1$ za vertikalne i pravu $y = 0$ za horizontalnu asimptotu funkcije.

3. Nalazimo

$$y' = 2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2(1-x^2)^2}.$$

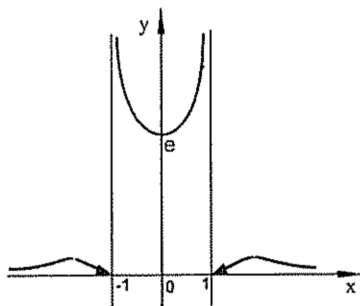
Pošto je $y' > 0$ za $-\infty < x < -\sqrt{3}; 0 < x < 1; 1 < x < \sqrt{3}$, to na svakom od tih intervala funkcija raste; dalje je $y' < 0$, za $-\sqrt{3} < x < -1; -1 < x < 0; \sqrt{3} < x < +\infty$, tj. na tim intervalima funkcija opada. U tački $x = 0$ ima minimum jednak e, a u tačkama $x = \pm\sqrt{3}$ funkcija ima maksimum, jednak $\frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0,15$.

4. Za drugi izvod dobijamo

$$y'' = 2y \frac{2x^6(3-x^2)^2 + x^2(1-x^2)(9+x^2+7x^4-x^6)}{(1-x^2)^4(1+x^2)^2},$$

i očigledno je $y'' > 0$ za $|x| < 1$. Zatim je $y''(\sqrt{1,1}) > 0$; $y''(\sqrt{3}) < 0$ i $y''(x) \to +0$ kad $x \to +\infty$. Sledi, u svakom od intervala $]1, \sqrt{3}[\,,]\sqrt{3}, +\infty[$, a zbog parnosti i u svakom od intervala $]-\infty, -\sqrt{3}[\,,]-\sqrt{3}, -1[$ funkcija ima bar po jednu prevojnu tačku.

5. Grafik je nacrtan na (sl 97). ►



sl 97

Ispitati tok i nacrtati grafike krivih koje su date parametarski:

317. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

◀ **1.** Obe funkcije x, y su definisane i neprekidne za $-\infty < t < +\infty$ i pri tom je $-\infty < x \leq 1$; $-\infty < y < +\infty$. Dakle, funkcija $y = y(x)$ je definisana za $-\infty < x \leq 1$.

2. Pošto $x(t) \to -\infty$; $y(t) \to \mp\infty$, $\frac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty$ kad $t \to \pm\infty$, to grafik funkcije nema asimptota.

3. Izvod

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{1-t^2}{1-t}$$

za $t_1 = -1$ postaje nula ($x_1 = -3$) a za $t_2 = 1$ ($x_2 = 1$) ima otklonjiv prekid, gde je

$$\lim_{t\to 1}\frac{dy}{dx} = 3.$$

4. Drugi izvod

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}\frac{\left(1-t^2\right)^2}{(1-t)^3}$$

ima prekid u tački $t = 1$. Iz tabele

t	$t < -1$	$-1 < t < 1$	$t > 1$
x	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$x < 1$
y	$y > -2$	$-2 < y < 2$	$y < 2$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} < 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

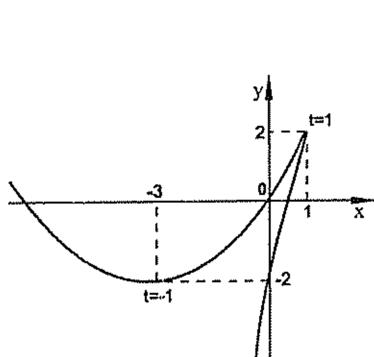
sledi da funkcija opada za $x < -3$ a raste ako je $-3 < x < 1$; za $x = -3$ ima minimum jednak -2 a za $x = 1$ maksimum jednak 2. Ako zatim x raste od $-\infty$ do 1, grafik funkcije je konkavan, a ako x opada od 1 do $-\infty$ grafik je konveksan, i prevojna tačka je $(1, 2)$.

5. Na osnovu dobijenog, na (sl. **98**) nacrtan je grafik krive. ▶

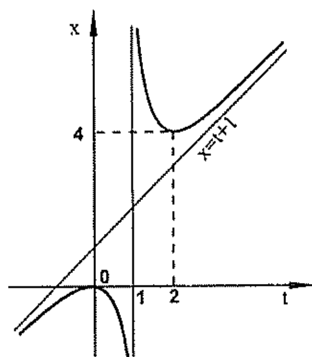
318. $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.

◀ Funkcija $x(t)$ je definisana i neprekidna za svako $t \neq 1$, očigledno prave $t = 1$ i $x = t + 1$ su njene asimptote. Zatim je $x'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$, odakle sledi da $x(t)$ raste na svakom od intervala $]-\infty, 0[$; $]2, +\infty[$ a opada na $]0, 1[$ i $]1, 2[$; znači $x_{\max} = 0$ za $t = 0$; $x_{\min} = 4$ za $t = 2$. Grafik funkcije $x = x(t)$

nacrtan je na (sl.99).



sl. 98



sl 99

Funkcija $y(t)$ je definisana i neprekidna za sve $t \neq \pm 1$; prave $t = \pm 1$ su asimptote. Pošto je $y'(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} < 0$, to funkcija $y(t)$ opada na svakom od intervala definisanosti (sl.100).

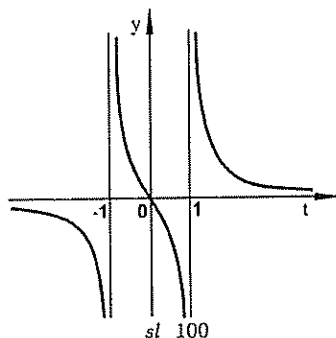
Iz ispitivanja navedenih funkcija, sledi da je $y = y(x)$ definisana za $-\infty < x \leq 0$; $4 \leq x < +\infty$. Pošto $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to +0$ kad $t \to \pm\infty$; $x(t) \to -\frac{1}{2}, y(t) \to \pm\infty$ kad $t \to -1 \pm 0$; to su prave $y = 0$ i $x = -\frac{1}{2}$ asimptote grafika funkcije $y = y(x)$. Pored toga, $\frac{y}{x} \to \frac{1}{2}$, $y - \frac{x}{2} \to -\frac{3}{4}$ kad $t \to 1$, sledi, $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ je kosa asimptota.

Nalazimo izvode:

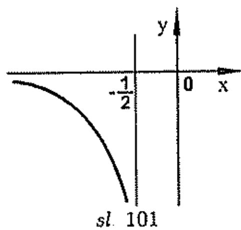
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3};$$

iz kojih sledi, da je $y''_{x^2} = 0$ za $t_0 \approx -0,32$; $t_1 = 1$; $x(t_0) \approx -0,07$; $y(t_0) \approx 0,37$. Najpre se crta grafik na odvojenim intervalima.

Ako je $-\infty < t < -1$, to je $-\infty < x < -\frac{1}{2}$; $-\infty < y < 0$; $y'_x < 0$; $y''_{x^2} < 0$ (sl.101). Za $-1 < t \leq 0$, je $-\frac{1}{2} < x \leq 0$; $0 \leq y < +\infty$. Drugi izvod $y''_{x^2} > 0$ za $-1 < t < t_0$ i $y''_{x^2} < 0$ za $t_0 < t < 0$; sledi, za $t = t_0$ dobijamo prevojnu tačku (x_0, y_0), gde je $x_0 \approx -0,07$; $y_0 \approx 0,37$ (sl.102).

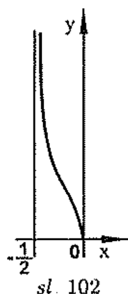


sl 100

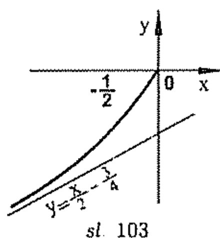


sl. 101

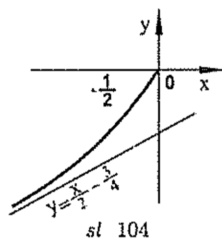
Neka je $0 \leq t < 1$. Tada je $-\infty < x \leq 0$, $-\infty < y \leq 0$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} > 0$ (**sl.103**). Za $1 < t \leq 2$, je $4 \leq x < +\infty$, $\frac{2}{3} \leq y < +\infty$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} < 0$ (**sl.104**).



sl. 102



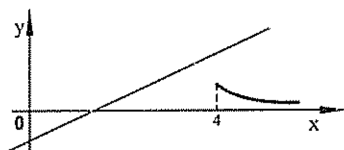
sl. 103



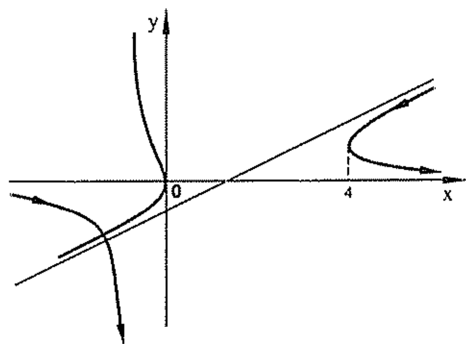
sl. 104

Na kraju, za $2 \leq t < +\infty$, je $x \geq 4$; $0 < y \leq \frac{2}{3}$; $y'_x < 0$; $y''_{x^2} > 0$ (**sl.105**).

Konačan grafik dat je na (sl. **106**). ►



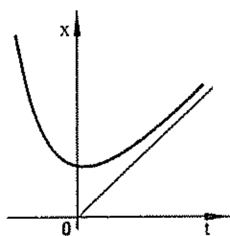
sl. 105

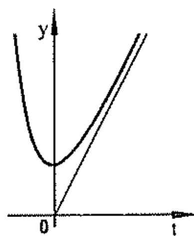


sl. 106

319. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

◄ Na uobičajeni način detaljno ispitamo funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$, i nacrtamo njihove grafike (**sl.107**).

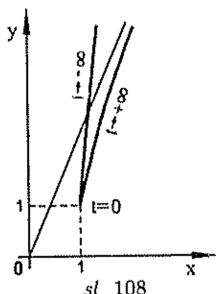




sl. 107

Odatle sledi da treba razmatrati slučajeve $t < 0$ i $t > 0$. Pošto je $y'_x = 2\left(1 + e^{-t}\right) > 0$; $y''_{x^2} = -2\left(e^{t} - 1\right)$ to je u prvom slučaju funkcija rastuća i konkavna, a u drugom opet rastuća i konveksna. Za $x = 1$ funkcija ima

minimum jednak 1. Dalje, kad $t \to +\infty$, $\frac{y}{x} \to 2$, tako da je tada prava $y = 2x$ kosa asimptota grafika funkcije (sl.108). ►



sl 108

320. $x = \frac{a}{\cos^3 t}$, $y = \tan^3 t$ $(a > 0)$.

◄ Lako se ustanovljava da je grafik krive $y = y(x)$ simetričan u odnosu na obe ose i da je dovoljno uzeti da $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Za te vrednosti parametra t je $x > 0$ i $y \geq 0$. Iz činjenice da je tada

$$y'_x = \sin t \text{ i } y''_{x^2} = \frac{1}{3a} \cos^5 t \sin^{-1} t$$

dobijamo intervale monotonosti, konveksnosti i konkavnosti funkcije. Nalaženjem limesa

$$k = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-} \frac{y(t)}{x(t)} \text{ i } b = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-} (y(t) - k \cdot x(t))$$

dobijamo da funkcija nema kosu asimptotu.

Grafik krive za sve t $(\cos t \neq 0)$ dat je na (sl.109). ►

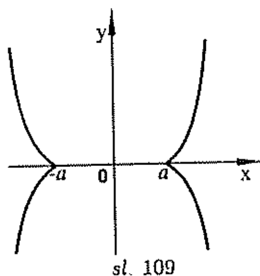
Predstaviti jednačine krivih u parametarskom obliku, i nacrtati njihove grafike, ako je :

321. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

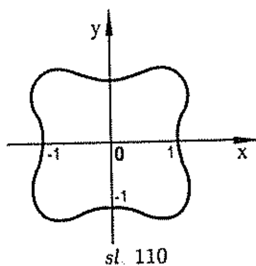
◄ Uzimajući $y = tx$ $(t \geq 0)$, sledi

$$x = \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}, \quad y = t\sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}.$$

Detaljnim ispitivanjem funkcija x, y dobijaju se svojstva date krive (sl.110),



sl. 109



sl. 110

čiji je grafik simetričan u odnosu na obe ose i na koordinatni početak. ▶

322. $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

◀ Smenom $y = tx$, dobijamo

$$x = \frac{1}{t^2} - t, \ y = \frac{1}{t} - t^2 \ (t \neq 0).$$

Iz parametarskog predstavljanja krive, imamo i jednakosti:

$$y = -x^2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^4}, \ y^2 = x - t + t^2,$$

odakle sledi, $y^2 \sim x$ kad $t \to \pm 0$ (tada $x \to +\infty$, $y \to \pm\infty$); $y \sim x$ kad $t \to \pm\infty$ (tada $x \to \pm\infty$, $y \to -\infty$).

Polazeći zatim od jednakosti: $x-y = u$, $x+y = v$, dobijamo $\left(v^2 - u^2\right)^2 = 12v^2u + 4u^3$, odakle sledi simetričnost grafika u odnosu na pravu $v = 0$, tj. na pravu $x + y = 0$. Ostatak ispitivanja se ostavlja čitaocu. Grafik je dat na (sl. **111**). ▶

323. $x^y = y^x$ $(x > 0, \ y > 0)$.

◀ Neka je $y = (1+t)x$ $(1+t > 0, \ t \neq 0)$. Tada je

$$x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \ y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}.$$

Ako je $t = 0$, to funkcija $y = x$ zadovoljava polaznu jednačinu. Pošto $x(t) \to 1$, $y(t) \to +\infty$ kad $t \to +\infty$ i $x(t) \to +\infty$, $y(t) \to 1$ kad $t \to -1+0$, to su prave $x = 1$ i $y = 1$ asimptote grafika funkcije. S obzirom da je

$$\frac{dy}{dx} = (1+t)\,\frac{t - \ln(1+t)}{\frac{t}{1+t} - \ln(1+t)} < 0$$

(primer 161,g));

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^2}{(1+t)\,x} \cdot \frac{3t^2 - 2t\,(t+2)\ln(1+t) + (1+t)\ln^2(1+t)}{\left(\frac{t}{1+t} - \ln(1+t)\right)^3} > 0$$

$(3t^2 + (1+t)\ln^2(1+t) < 2t\,(t+2)\ln(1+t)$ prema primeru 186), to je funkcija $y = y(x)$ opadajuća i konveksna (sl.**53**). ▶

324. Nacrtati grafik krive $\cosh^2 x - \cosh^2 y = 1$.

◀ Grafik krive je simetričan u odnosu na obe ose. Ako je $x > 0$, $y > 0$ onda jednačina jedne grane krive glasi $\sinh x = \cosh y$, odakle je

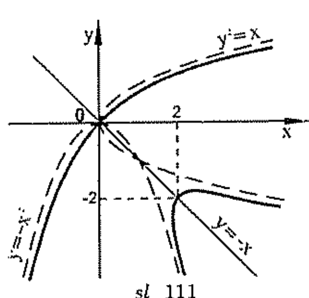
$x = \ln\left(\cosh y + \sqrt{1+\cosh^2 y}\right)$. Lako se dobija, da je prava $x = y$ kosa asimptota te funkcije. Iz izvoda

$$x'_y = \frac{\sinh y}{\sqrt{1+\cosh^2 y}},$$

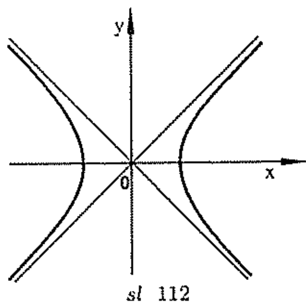
sledi da funkcija $x = x(y)$ raste za $y > 0$, a u tački $y = 0$ dostiže minimum, jednak $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Dalje je

$$x''_{y^2} = \frac{2\cosh y}{\left(1+\cosh^2 y\right)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

tj. grafik je konveksan. Uzimajući u obzir simetričnost krive u odnosu na obe ose, crtamo grafik krive (sl.112). ▶



sl. 111



sl. 112

Nacrtati grafike funkcija, koje su zadate u polarnom koordinatnom sistemu (ρ, φ), $\rho \geq 0$.

325. $\rho = a\frac{\tanh\varphi}{\varphi-1}$, gde je $\varphi > 1$ $(a > 0)$.

◀ Funkcija $\rho(\varphi)$ je neprekidna, kao elementarna; $\lim\limits_{\varphi\to 1+0} \rho(\varphi) = +\infty$, tj. ima asimptotu $\varphi = 1$; $\lim\limits_{\varphi\to+\infty} \rho(\varphi) = 0$, tj. kriva asimptotski ulazi u pol po spirali. Nađimo izvod

$$\rho'_\varphi = a\left(\frac{1}{\cosh^2\varphi\cdot(\varphi-1)} - \frac{\tanh\varphi}{(\varphi-1)^2}\right);$$

pošto je $\varphi - 1 < \frac{1}{2}\sinh 2\varphi$ za $\varphi > 1$, to je $\rho'_\varphi < 0$; sledi, funkcija $\rho(\varphi)$ opada (sl.113). ▶

326. $\varphi = \arccos\frac{\rho-1}{\rho^2}$.

◀ Oblast definisanosti funkcije dobija se iz nejednakosti

$$|\rho - 1| \leq \rho^2,$$

odakle sledi,

$$\rho_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq \rho < +\infty.$$

Limesi funkcije φ u graničnim tačkama su

$$\lim_{\rho \to \rho_1+0} \varphi(\rho) = \pi; \quad \lim_{\rho \to +\infty} \varphi(\rho) = \frac{\pi}{2}.$$

Pošto je $\rho - 1 \neq \rho^2$, to funkcija $\varphi(\rho)$ nema nula i pozitivna je. Njen izvod

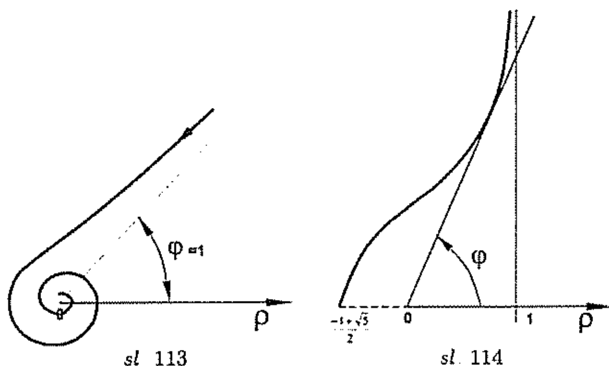
$$\varphi'_\rho = \frac{\rho - 2}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right)^2}}$$

pokazuje, da u tački $\rho = 2$ funkcija postiže minimum, jednak $\arccos \frac{1}{4}$. U tački $\rho = \rho_1$ izvod ne postoji; funkcija u toj tački postiže krajevni maksimum, jednak π. Za $\rho_1 < \rho < 2$ funkcija opada, a za $\rho > 2$ raste.

Kako je već napomenuto, funkcija ima vertikalnu asimptotu (prema limesima na krajevima intervala definisanosti). Nađimo njeno rastojanje a od pola. Imamo,

$$a = \lim_{\rho \to \infty} \rho \cos \varphi(\rho) = \lim_{\rho \to \infty} \rho \frac{\rho - 1}{\rho^2} = 1.$$

Grafik je dat na (sl.114). ▶



sl. 113 sl. 114

Nacrtati grafike familije krivih (a je parametar).

327. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

◀ Postoje dva slučaja: **a)** $a > 0$; **b)** $a < 0$.

a) $a > 0$. Oblast definisanosti je dat sa $|x| \leq 1$. Nule funkcije su $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{1+a}}$; za $-\sqrt{\frac{a}{1+a}} < x < 1$, funkcija $y = x + \sqrt{a(1-x^2)}$ je pozitivna, a za

$-1 < x < \sqrt{\frac{a}{1+a}}$ negativna; za $-1 < x < \sqrt{\frac{a}{1+a}}$ funkcija $y = x - \sqrt{a(1-x^2)}$ je negativna, a za $\sqrt{\frac{a}{1+a}} < x < 1$ pozitivna. Nađimo izvod

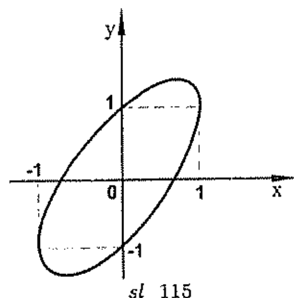
$$y' = 1 \pm \frac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}.$$

Odatle sledi, da funkcija $y = x + \sqrt{a(1-x^2)}$ za $x = \sqrt{\frac{1}{a+1}}$ ima maksimum jednak $\sqrt{a+1}$, a funkcija $y = x - \sqrt{a(1-x^2)}$ minimum za $x = -\sqrt{\frac{1}{a+1}}$, jednak $-\sqrt{a+1}$.

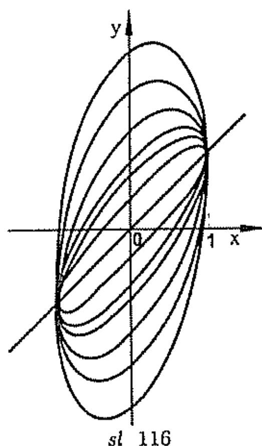
Iz izraza za drugi izvod

$$y'' = \pm \frac{a}{(1-x^2)\sqrt{a(1-x^2)}}$$

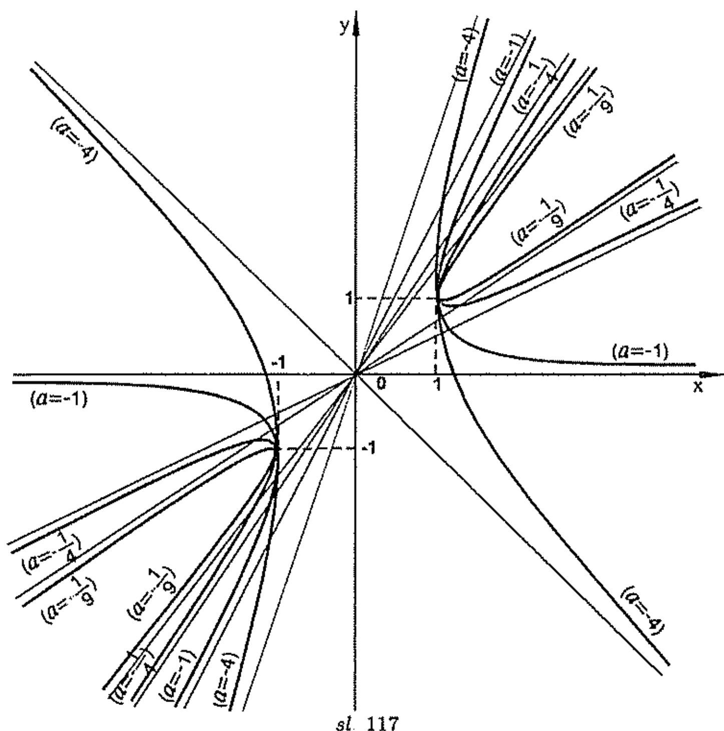
sledi, da je grafik prve grane konkavan, a druge konveksan (**sl.115**). Ako se a menja od 0 do $+\infty$ dobija se familija elipsi, koje sve prolaze kroz tačke $(-1,1)$ i $(1,1)$ (**sl.116**).



sl 115



sl 116



sl. 117

b) $a < 0$. Oblast definisanosti funkcije je $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Asimptote su $y = k_1 x + b$; $y = k_2 x + b$, gde je

$$k_{1,2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \pm \sqrt{-a\,(x^2 - 1)}}{x} = 1 \pm \sqrt{-a}; \ b = 0.$$

Grafik je dat na (**sl.117**). ►

328. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

◄ **1.** $a > 0$. Funkcija je pozitivna za $x > 0$, negativna za $x < 0$. Imamo

$$y' = e^{-\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

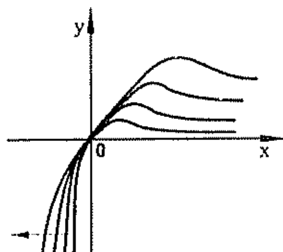
Odatle sledi, da za $x = a$ funkcija ima maksimum jednak $\frac{a}{e}$. Dalje je

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a}\right),$$

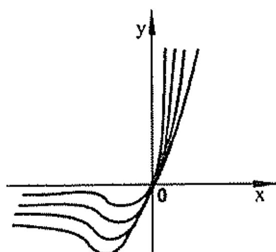
odakle se dobija da u tački $x = 2a$ funkcija ima prevoj, kao i da je za $x < 2a$ grafik konkavan, a za $x > 2a$ konveksan. Prava $y = 0$ je asimptota grafika funkcije, kad $x \to +\infty$.

2. Ako je $a < 0$, to se slučaj svodi na prethodni, ako se u njemu x zameni sa $-x$, a y sa $-y$.

Grafik familije krivih nacrtan je na (sl.**118, 119**). ►



sl. 118



sl. 119

2.12 Zadaci iz maksimuma i minimuma funkcija

329. Dokazati, da ako je funkcija f nenegativna, onda funkcija $F(x) = cf^2(x)$ $(c > 0)$ ima ekstremume u istim tačkama kao i f.

◄ Određenosti radi, neka funkcija f u tački x_0 ima maksimum. Tada postoji $\delta > 0$, tako da za sve x za koje je $0 < |x - x_0| < \delta$ važi $f(x) < f(x_0)$. Pošto je $f(x) \geq 0$ i $c > 0$, iz poslednje nejednakosti se dobija:

$$cf^2(x) < cf^2(x_0),$$

tj. $F(x) < F(x_0)$. Dobijeno znači, da funkcija F u tački x_0 postiže maksimum. U slučaju minimuma postupa se slično. ►

330. Dokazati, da ako funkcija φ raste u strogom smislu za $-\infty < x < +\infty$, onda funkcije f i $\varphi \circ f$ imaju ekstremume u istim tačkama.

◄ Neka funkcija f u tački x_0 ima maksimum. Tada za sve x iz okoline $0 < |x - x_0| < \delta$ važi :

$$f(x) < f(x_0).$$

Po pretpostavci o funkciji φ, imamo da je

$$\varphi(f(x)) < \varphi(f(x_0)),$$

za sve x iz navedene okoline. Analogno, se pokazuje da ako u x_0 funkcija $\varphi \circ f$ ima maksimum, tada u toj tački funkcija f ima maksimum. ►

331. U kojem sistemu logaritama postoji broj, jednak svom logaritmu?

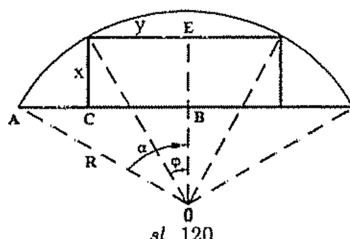
◄ Neka je y osnova traženog sistema logaritama. Tada saglasno uslovu, imamo

$$\log_y x = x \quad (x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1)$$

odakle je $y = x^{\frac{1}{x}}$. Funkcija y je već ispitana u primeru 313. Odatle sledi da je $y \leq e^{\frac{1}{e}}$, tj. u svim sistemima sa osnovom y $(0 < y < e^{\frac{1}{e}},\ y \neq 1)$ takvi brojevi x postoje. ▶

332. U dati kružni odsečak koji je manji od polukruga upisati pravougaonik maksimalne površine.

◀ Neka je x visina a $2y$ širina pravougaonika. Sa (**sl.120**). imamo



sl. 120

$$S = 2xy = 2R^2 \sin\varphi\,(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Izjednačavanjem izvoda sa nulom,

$$S'(\varphi) = 2R^2\left(2\cos^2\varphi - \cos\varphi\cos\alpha - 1\right) = 0,$$

imamo

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}.$$

Luk φ_2 ne odgovara smislu zadatka.

Pošto je $S'(\varphi_1 - \varepsilon) > 0$; $S'(\varphi_1 + \varepsilon) < 0$ ($\varepsilon > 0$ dovoljno malo), to za

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}$$

funkcija $S(\varphi)$ ima maksimum. ▶

333. U elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ upisati pravougaonik maksimalne površine, tako da mu stranice budu paralelne osama elipse.

◀ Ako sa x, y označimo dužine stranica pravougaonika, onda je površina $S = 4xy$. Jednostavnosti radi, uzmimo

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

Tada je $S = 2ab\sin 2t$, odakle sledi da je $S_{\max} = 2ab$ za $t = \frac{\pi}{4}$, pa je $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. S obzirom da znamo stranice, lako je upisati pravougaonik. ▶

334. Kroz tačku $M(x, y)$ elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ postaviti tangentu, tako da sa koordinatnim osama gradi trougao najmanje površine.

◀ Jednačina tangente na elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u tački sa koordinatama (x_0, y_0) glasi

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

odakle sledi da tangenta gradi na svakoj od osa redom odsečke $\frac{a^2}{x_0}$ i $\frac{b^2}{y_0}$. Znači, površina trougla je $S=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}$. Parametrizujući jednačinu elipse (kao u prethodnom primeru), dobijamo da je $S=\frac{ab}{\sin 2t}$, tj. $S_{\min}=ab$ za $t=\frac{\pi}{4}$; pa je onda $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_0=\frac{b}{\sqrt{2}}$. ▶

335. Poprečni presk otvorenog kanala ima oblik ravnokrakog trapeza. Odrediti nagibni ugao bočne strane kanala, tako da je obim pokvašenog dela trapeza najmanji, ako je površina poprečnog preseka S a visina h?

◀ Obim P određen je formulom (sl.**121**).

$$P=a+\frac{2h}{\sin\varphi} \tag{1}$$

a površina preseka

$$S=h\,(a+h\cot\varphi)\,. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) nalazimo

$$P=\frac{S}{h}-h\cot\varphi+\frac{2h}{\sin\varphi}.$$

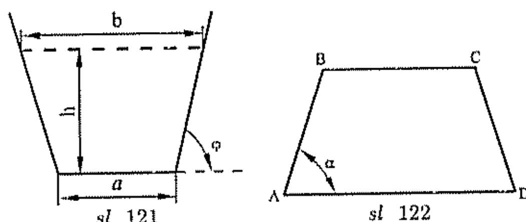
Izvod

$$P'=h\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right)$$

pokazuje, da za $\varphi=\frac{\pi}{3}$ funkcija P postiže minimum. ▶

336. Krivinom zatvorene konture, koja ograničava lik površine S, naziva se količnik obima te konture i obima kružnice površine takođe S. Odrediti oblik ravnokrakog trapeza $ABCD$ (AD je paralelno sa BC), koji ima najmanju krivinu, ako je osnovica $AD=2a$ i oštar ugao $BAD=\alpha$.

◀ Neka je $\prod$ krivina trapeza. Tada, saglasno definiciji, imamo (sl.**122**).



sl 121 sl 122

$$\prod=\frac{L}{2\sqrt{\pi S}},$$

gde je $S = \frac{BC+2a}{2} AB \sin\alpha$; $L = 2AB + BC + 2a$. Pošto je

$$2a - BC = 2AB \cos\alpha, \tag{1}$$

to uzimajući $AB = x$, dobijamo

$$\prod(x) = \frac{2a + x(1-\cos\alpha)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha}}.$$

Ispitujući ekstremume funkcije $\prod(x)$, dobijamo da ona ima minimum za $x = a\sec^2\frac{\alpha}{2}$. Iz (1) sledi, $BC = 2a\tan^2\frac{\alpha}{2}$. Pošto je sada $AD + BC = AB + CD$, to se u takav trapez može upisati kružnica, tj. trapez je tangentni. ►

337. Koji isečak kružnice poluprečnika R treba uzeti, da bi se od ostatka dobila kupa maksimalne zapremine?

◄ Ako je α centralni ugao preostalog isečka, onda je zapremina odgovarajuće kupe data sa

$$\frac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

Ispitivanje ekstremuma ove funkcije, dobija se da ona ima maksimum za $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. ►

338. Dva broda plove konstantnim brzinama u i v po pravama koje grade ugao θ. Odrediti najkraće rastojanje između njih, ako su oni u jednom trenutku udaljeni od preseka puteva za a i b.

◄ Po kosinusnoj teoremi sledi

$$r^2 = (a + ut)^2 + (b + vt)^2 - 2(a + ut)(b + vt)\cos\theta$$

(**sl.123**), gde je r rastojanje između njih u trenutku t. Ispitujući ekstremume funkcije $r^2(t)$, nalazimo

$$r'(t_0) = 0;\ t_0 = \frac{(bu + av)\cos\theta - au - bv}{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2}.$$

Zamenjivanjem t_0 u $r^2(t)$, dobijamo

$$r_{\min} = \frac{|ub - va|\sin\theta}{\sqrt{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2}}.$$

Ako u zamenimo sa $-u$, onda na osnovu jednakosti

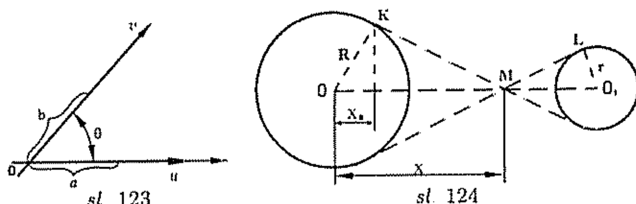
$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \text{ i } \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

dobijamo

$$r_{\min} = \frac{|ub+va|\sin\theta}{\sqrt{u^2-2uv\cos\theta+v^2}}. \blacktriangleright$$

339. Svetlosna tačka se nalazi na pravoj odeđenoj centrima sfera poluprečnika R i r, koje se ne seku. Odrediti položaj svetlosne tačke na toj pravoj, tako da je zbir osvetljenih delova sfera najveći, pod uslovom da je svetlosna tačka van tih sfera.

◀ Izrazimo zbir osvetljenih površina sfera kao funkciju od x (**sl.124**).



sl 123 *sl.* 124

Imamo

$$\begin{aligned} S &= 2\pi R(R-x_0) = 2\pi R^2\left(1-\frac{R}{x}\right); \\ S_1 &= 2\pi r^2\left(1-\frac{r}{a-x}\right) \quad (a \geq r+x), \end{aligned}$$

gde je a rastojanje između centara sfera. Treba ispitati ekstremume funkcije $f = S+S_1$. Nalazimo vrednosti x, za koje je postignut maksimum te funkcije; pri tom je

$$a \geq r + x = r + \frac{a}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

odakle sledi $a \geq r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$.

Ako je $f'(x) < 0$, onda je maksimalna vrednost postignuta za $x_1 = a-r$, i tada važi nejednakost

$$a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}. \blacktriangleright$$

340. Na kojoj visini iznad centra okruglog stola poluprečnika a treba staviti električnu lampu, da bi osvetljenost krajeva stola bila najbolja?

◀ Pod osvetljenošću se podrazumeva veličina

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

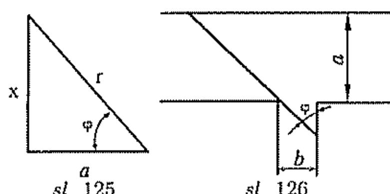
gde je r rastojanje od izvora svetlosti do tačke osvetljenja, $k = const$, φ ugao, predstavljen na (**sl.125**). Imamo

$$I(x) = \frac{kx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

odakle nalazimo visinu x_0, za koju je postignut maksimum funkcije $I(x)$: $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. ▶

341. U reci širine a metara izgrađen je pod pravim uglom kanal širine b metara. Koja je maksimalna dužina broda koji može ući u taj kanal?

◀ Dužina broda l, kao što sledi iz (**sl.126**),



sl 125 *sl* 126

jednaka je

$$\frac{b}{\sin\varphi} + \frac{a}{\cos\varphi}.$$

Ispitivanjem ekstremuma funkcije l, dobijamo, da ona uzima maksimum za

$$\varphi = \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Na taj način, maksimalno moguća dužina broda jednaka je

$$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

metara. ▶

342. Dnevni rashodi plovidbe broda sastoje se iz dva dela: konstantnog, jednakog a rubalja, i promenljivog, koji raste proporcionalno kubu brzine. Pri kojoj brzini v je plovidba broda najekonomičnija?

◀ Pretpostavimo da brod prelazi $S km$ za T dana. Tada je rashod R jednak

$$Ta + kTv^3,$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti. No, kako je $T = \frac{S}{v}$, to je

$$R = \frac{Sa}{v} + kSv^2,$$

odakle nalazimo brzinu, za koju je rashod minimalan:

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}. \ ▶$$

343. Teret težine P, koji leži na horizontalnoj hrapavoj ravni, treba pomeriti primenom sile. Pod kojim uglom sa horizontalnom ravni je ta sila najmanja, ako je koeficijent trenja tereta jednak k?

◀ Razlaganjem sile na komponente (vertikalnu i horizontalnu) i prema njihovoj ravnoteži dobijamo (**sl.127**).

$$T = F_p k = (P - F\sin\alpha)\, k = F_T = F\cos\varphi,$$

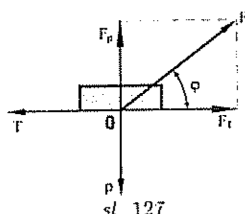
odakle je $F = \frac{kP}{k\sin\varphi + \cos\varphi}$.

Ispitujući ekstremume funkcije $F(\varphi)$, nalazimo da je za $\varphi = \arctan k$ veličina sile F najmanja. ▶

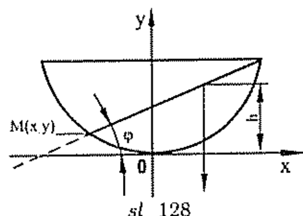
344. U čašu, koja ima oblik polukugle poluprečnika a, spuštena je osovina $l > 2a$.

Naći položaj ravnoteže osovine.

◀ Nađimo potencijalnu energije $\prod$ osovine u odnosu na dno čaše. Imamo $\prod = mgh$, gde je $h = \frac{l}{2}\sin\varphi + y$ visina težišta osovine u odnosu na dno čaše (**sl.128**).



sl 127



sl 128

Dalje, pošto je

$$\tan\varphi = \frac{a-y}{a-x} = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

to dobijamo $x = -a\cos 2\varphi$.

Koristeći jednačinu polukružnice, nalazimo, da je

$$y = a\,(1 - \sin 2\varphi)\,.$$

I tako je $\prod = mg\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + a\,(1 - \sin 2\varphi)\right)$. Pošto osovina teži položaju sa minimalnom potencijalnom energijom, to je neophodno naći φ_0, za koje funkcija $\prod$ postiže minimum. Imamo

$$\cos\varphi_0 = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}.$$

Pošto je $\cos\varphi \le 1$, to je ravnoteža moguća samo za $l \le 4a$; za $l > 4a$ ravnoteža je nemoguća. ▶

2.13 Zadaci za samostalni rad

Naći izvod sledećih funkcija:

1. $f(x)=\begin{cases}\sin^2\pi x, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{I}.\end{cases}$

2. a) $f(x)=\inf\limits_{0\le\xi\le x}\{\cos\xi\}$; b) $f(x)=\sup\limits_{\frac{\pi}{2}\le\xi\le x}\{\cos\xi\}$.

3. $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n|x|}$.

4. a) $f(x)=\varphi(\varphi(x))$; b) $f(x)=\psi(\varphi(x))$;

c) $f(x)=\varphi(\psi(x))$; d) $f(x)=\psi(\varphi(x))$, gde je $\varphi(x)=\begin{cases}x, & |x|\le1;\\ x^2, & |x|>1;\end{cases}$

$\psi(x)=\begin{cases}e^x, & x\ge0;\\ 1, & x<0.\end{cases}$

5. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cosh\frac{x}{2^k}$.

6. a) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\arctan\frac{\pi n^2+4kx^2}{4n^2-\pi kx^2}$; b) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\sin\frac{k^2x}{n^3}\right)$

Naći levi i desni izvod sledećih funkcija:

7. a) $y=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, gde je φ rastojanje do najbližeg celog broja;

b) $y=\min(\tan x, 2-\sin 2x)$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $y=\max\left(4^{|x|},x^2\right)$.

8. $f(x)=\left[x^2\right]\left|\sin\pi x^2\right|$ (nacrtati grafik ove funkcije).

9. a) $f(x)=\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$ $(x\ne1)$, $f(1)=1$;

b) $f(x)=\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$ $(x\ne1)$, $f(1)=0$.

10. a) $f(x)=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,e^{x\sin t^2}$; b) $f(x)=\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,e^{x\sin t^2}$.

11. $f(x)=[x]^{[x]}$ $(x\ge1)$. **12.** $f(x)=\begin{cases}|\sin\pi x|^{\frac{3}{2}}, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{I}.\end{cases}$

13. Naći $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ u tački x_0 funkcije $f(x)$, ako je:

a) $f(x)=|x|^{[x]}$; b) $f(x)=\frac{1}{1-\ln|\sin x|}$.

14. Pod kojim uslovom je funkcija

$$f(x)=|x|^{2\alpha}\left[|x|^{2\beta}\right]\quad(x\ne0)\ \text{ i }\ f(0)=0$$

diferencijabilna u tački $x=0$?

15. Neka je

$$f_k(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k C_i^n x^i(1-x)^{n-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Izvesti rekurentnu vezu za funkcije $f_k(x)$.

16. Izračunati Dinijeve brojeve

$$\begin{aligned} D^{\pm}f(x) &= \overline{\lim}_{h\to\pm 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \\ D_{\pm}f(x) &= \underline{\lim}_{h\to\pm 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{aligned}$$

za funkcije:

a) $y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0; \\ 0, & x\le 0; \end{cases}$ b) $y=\begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x}+bx\cos^2\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

17. Naći $D'_{20}(x)$, ako je

$$\begin{aligned} D_{k+1}(x) &= \frac{D_k^2(x)}{\left(1-x^2D_k^2(x)\right)D_{k-1}(x)} \quad (k=1,2,\ldots,19), \\ D_0 &= 1,\ D_1=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

18. Dokazati, da je skup tačaka, u kojima se desni i levi izvod razlikuju, najviše prebrojiv.

Naći izvod funkcije, ako je :

19. $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1; \\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}sgn x, & |x|>1. \end{cases}$ **20.** $f(x)=\frac{[x]}{\pi}\left\{[x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\right\}$ $(x\ge 0)$.

21. $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|\right\}$.

22. Pokazati, da postoji jednoznačna realna funkcija $y=y(x)$, definisana jednačinom

$$x=12y^5-30y^4+40y^3-30y^2+15y+1.$$

Naći jednostrane izvode y'_x, ako je:

23. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ u tački $t=1$.

24. $x=t+3\sqrt[3]{1+t}$, $y=2t-10\sqrt[5]{1+t}$ u tački $t=0$.

25. $x=\sin^2 t$; $y=\cos^2 t$ u tačkama $t=0$ i $t=\frac{\pi}{2}$. Po čemu se razlikuje data funkcija od funkcije $y=1-x$?

Naći y'_x, ako je:

26. $\arctan\left(x^2+y^2\right)-\ln xy-1=0$. **27.** $\sin\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{y}+\sqrt{x^2+y^2}=0$.

Naći $y'(0)$, ako je :

28. $x^2\sin\frac{1}{y}+\frac{y}{x}\sin x=0$ $(x\neq 0)$ i $y(0)=0$.

29. $x^2\arctan\frac{y}{x}+\tan(x+y)-1=0$ $(x\neq 0)$ i $y(0)=\frac{\pi}{4}$.

Naći $\Delta y(0)$ i $dy(0)$, ako je:

30. $y = \sqrt{x}$. **31.** $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ **32.** $x = t^2 + |t|$; $y = t^3 + t$; $\Delta t = dt = 1$.

33. $x = t^4 - 4t^2$; $y = t^5 - 5t$; $\Delta t = dt = 1$. **34.** $x = y^8 + 5y$.

35. Izračunati $dy(0)$, ako je $\frac{x^2}{y} + \sin\frac{y}{x} = 0$ $(x \neq 0)$, $y(0) = 0$.

Neka su u i v diferencijabilne funkcije od x.

Izračunati $dy(0)$, ako je:

36. $y = u^v$; $du(0) = 5dx$; $dv(0) = -\frac{2}{e}dx$; $u(0) = e$; $v(0) = 1$.

37. $y = \arcsin\frac{u}{v}$; $du(0) = 3dx$; $dv(0) = \sqrt{2}dx$; $u(0) = 1$; $v(0) = \sqrt{2}$.

Neka je $d_{\pm}y(x) = f'_{\pm}(x)\,dx$. Naći $d_{\pm}y(0)$, ako je

38. $y = |\sin x|$. **39.** $y = \arctan\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ i $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

40. $x = |t|^{-t} - 1$; $y = \tan t$; $x(0) = 0$ $\left(|t| < \frac{\pi}{2}\right)$.

41. Naći $y''(0)$, ako je

$$y = x^3\left(\sin\left(\ln^m|x|\right) + \cos\left(\ln^m|x|\right)\right) \quad (x \neq 0) \text{ i } f(0) = 0,$$

gd je $m = \frac{p}{2q+1}$; $p, q \in \mathbb{Z}$. Da li je neprekidan drugi izvod u nuli? Može li se izabrati m, tako da postoji $y''(0)$?

42. Za koje vrednosti α, funkcija $f(x) = |x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ i $f(0) = 0$, ima neprekidan drugi izvod?

43. Naći y'', ako je $y = \varphi(\psi(x))$ i

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & |x| < 2; \\ \sin x, & |x| > 2; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} e^x, & |x| < 2; \\ \cos x, & |x| > 2. \end{cases}$$

44. Izračunati uopšteni drugi izvod funkcije $y(x)$ u tački prekida, ako je $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$.

45. Naći drugi izvod funkcije $y(x)$, koja je inverzna funkciji $x = x(y)$, ako je

a) $x = y + y^3$; b) $x = y + \sin y$.

46. Naći $d^2y(0)$ funkcije $y = |x|^{\alpha}\arctan\frac{1}{|x|}$ $(x \neq 0)$ i $y(0) = 0$.

47. Naći $y''_{x^2}(0)$, ako je $x = 2t - t^2$; $y = (t-1)^4$.

48. Odrediti drugi izvod y''_{x^2} funkcije, date parametarski:

$$x = \begin{cases} 2t, & t < 1; \\ t^2, & t \geq 1; \end{cases} \quad y = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arcsin t, & |t| \leq 1; \\ 1 + t - t^2, & |t| > 1. \end{cases}$$

49. Naći drugi izvod funkcije $y(x)$, zadate jednačinom

$$\sin xy = x + y - \frac{\pi}{2} \quad (y > 0),\ x = \frac{\pi}{2}.$$

50. Naći $f_{500}(x)$, ako je

$$f_{n+1}(x) = xf'_{n+1}(x);\ f_1(x) = \frac{x\left(1-11x^{10}+10x^{11}\right)}{(1-x)^2}.$$

51. Naći $y'(0)$, ako je funkcija $y(x)$ zadata jednačinom $y^5+x^3+x^2-y^2 = 0$ i dva puta je neprekidno diferencijabilna u okolini nule.

Odrediti $y^{(50)}(0)$, **ako je:**

52. $y = \sin x^2$. **53.** $y = \frac{1}{1-x+x^2}$. **54.** $y = \frac{1}{x^4+1}$. **55.** $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

56. Da li funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| \le 1; \\ -\sqrt{4-(3-|x|)^2}, & 1 < |x| \le 2. \end{cases}$$

57. Neka je: **1)** $f \in C^{(2)}(\mathbb{R})$; **2)** za bilo koje x i h važi: $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$;**3)** $f''(x) \neq 0$.

Dokazati: a) ako je $\theta = \theta(x)$, to je $\theta = \frac{1}{2}$; b) ako je $|\theta'| < \infty$ i $\theta = \theta(h)$, to je $\lim\limits_{h\to 0} \theta = \frac{1}{2}$.

58. Neka je

$$(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x+\theta(x))^{-1+\frac{1}{n}} \quad (x \ge 0;\ n > 1).$$

Naći limese funkcije $\theta(x)$ kad $x \to +0$ i kad $x \to +\infty$.

59. Neka su funkcije f i g diferencijabilne na segmentu $[x_1, x_2]$, tako da je $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$.

Dokazati, da je

$$\frac{1}{g(x_2)-g(x_1)} \begin{vmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \\ g(x_1) & g(x_2) \end{vmatrix} = \frac{1}{g'(\xi)} \begin{vmatrix} \varphi(\xi) & g(\xi) \\ \varphi'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix},$$

gde je $x_1 < \xi < x_2$.

60. Pokazati, da je izvod funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3}{2}\ln x\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

neprekidan za $x \ge 0$, iako je funkcija $\xi(x)$, koja zadovoljava relaciju $f'(x) = f'(\xi(x))x$, $0 < \xi(x) < x$, prekidna.

61. Dokazati, da ako je $f'(x)$ neprekidna i monotona na segmentu $[0, h]$,

pri čemu je $f(0) = 0$, onda je funkcija $x \mapsto \xi(x)$ neprekidna na tom segmentu (primer 60).

62. Da li važi Lagranžova teorema na segmentu $[a, b]$ za diferencijabilnu funkciju $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, gde je i imaginarna jedinica? Razmotriti primer: $f(x) = \cos x + i \sin x$ na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

63. Pokazati, da Dirihleova funkcija nije ni rastuća ni opadajuća.

64. Ispitati rastućost na $[1, 2]$ sledećih funkcija:
a) $y = [x]$; b) $y = (x-1)[x]$; c) $y = x$, $x \in \mathbb{Q}$.

65. Dokazati, da su zbir i proizvod pozitivnih funkcija, od kojih je jedna rastuća a druga nije opadajuća, rastuća funkcija.

66. Dokazati nejednakosti:
a) $\frac{2\ln(1+x)}{x} - \frac{3x+2}{(1+x)^2} > 0$ za $x > 0$;
b) $\frac{2}{x(x+1)} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x+3}{x(x+1)^2} > 0$ za $x > 0$

Ispitati monotonost sledećih funkcija

67. $y = (2+x)\ln(1+x) - 2x$. **68.** $y = \frac{e^x}{x^x[x]!}$.

69. $x = \sin t - t + \frac{t^3}{6}$, $y = 4t^5 - 5t^4 + 1$.

70. $\rho = \varphi \tan \varphi$ $(\varphi > 0)$. Nacrtati grafike tih funkcija.

71. Neka je

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ C = \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$
$$E = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k,\ F = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,\ G = \sum_{k=1}^{n} b_k c_k,$$

gde su a_k, b_k, c_k realni brojevi. Dokazati, da je

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & G \\ E & G & C \end{vmatrix} \geq 0.$$

72. Dokazati, da je $x^{\frac{1}{x}} < 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ za $1 < x < e$.

73. Neka je f diferencijabilna funkcija na $[a, b]$, tako da je $f(a) = 0$ i da postoji realan A, da je $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ za $x \in [a, b]$. Dokazati, da je $f(x) = 0$, za sve $x \in [a, b]$.

74. Ispitati prevojne tačke grafika sledećih funkcija:
a) $y = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x^5 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Nacrtati grafike tih funkcija.

Ispitati konkavnost, konveksnost i prevojne tačke grafika sledećih funkcija $y(x)$.

75. $x = t\ln t, y = -6et - 3t^2$.

76. $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$. **77.** $\rho = \frac{1}{\varphi}$ $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$.

78. $\rho = \varphi - \varphi^2$; $\varphi \geq 0$ (ρ, φ su polarne koordinate).

79. Ispitati konkavnost i konveksnst funkcije $y(x)$ zadate implicitno jednačinom: $x^3 - y^3 - 3x^2y - 3y + 1 = 0$, u okolini tačke $M(-1,0)$.

80. Neka je f konveksna funkcija na $]a,b[$. Dokazati, da je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) < \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right)$$

gde je $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ $(n \geq 2)$.

Primenom teoreme prethodnog primera, dokazati nejednakosti:

81. $\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdots(2^n-1)}{2\cdot 4\cdots 2^{n-1}} < \left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

82. $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ $(x_i > 0; i = 1, 2, \ldots, n)$.

83. Može li se kod nizova, prilikom oslobađanja neodređenosti, primenjivati Lopitalovo pravilo?

Primenom Lopitalovig pravila, naći:

84. $\lim\limits_{x\to+0}\left[2\frac{1-e^{-1}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\right]$, gde je $[\,]$ celobrojna vrednost.

85. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\cot x - \frac{15-6x^2}{15x-x^3}\right)}{x\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right)}$. **86.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\sqrt{1+x}} - \frac{2}{x}\right)^{\frac{\cosh x}{2x}}$.

87. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^{x^x}-1}{x-1}\right)^{(x-1)^{-1}}$. **88.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{100}x}{x^{99}\sin x}\right)^{\frac{2}{3x^2}}$.

89. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{100}x}{x^{\varepsilon-\frac{1}{x}}}$ $(\varepsilon > 0)$.

Polazeći od Tejlorove formule u lokalnom obliku, razložiti po celim pozitivnim stepenima x **do člana najvećeg reda zaključno, sledeće funkcije:**

90. $f(x) = x^6\sin\frac{1}{x}$ za $x \neq 0$, $f(0) = 0$. **91.** $f(x) = e^{x^3|x|}$. Da li je tačno razlaganje

$e^{x^3|x|} = 1 + x^3|x| + \frac{x^8}{2!} + \frac{x^{11}|x|}{3!} + \cdots + \frac{x^{3n}|x|^n}{n!} + o\left(x^{4n}\right)$?

92. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$, do člana x^{10}. Da li važi razlaganje

$e^{-\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!x^{2n}} + o\left(\frac{1}{x^{2n}}\right)$?

93. $f(x) = \frac{x^2}{\ln|x|}$ $(x \neq 0)$ i $f(0) = 0$.

94. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ (do člana x^3).

95. $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ (do člana x^3).

96. Neka je

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

$(0 < \theta < 1)$, pri čemu je $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ i neprekidna. Dokazati, da je

$$\lim_{h\to 0} \theta = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

Polazeći od Tejlorove formule sa ostatkom u Lagranžovom obliku razložiti sledeće funkcije do navedenog člana:

97. $f(x) = x^{x^3}$ za $x \neq 0$; i $f(0) = 1$, do člana x^2 $(0 \leq x \leq 1)$.

98. $f(x) = \sin|x|^5$ ($|x| \leq 1$; do člana najvećeg reda. Da li je tačna formula:

$$\sin|x|^5 = |x|\left(x^4 - \frac{x^{14}}{3!} + \frac{x^{19}}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{10n-6}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!} x^{10n+4}\right)$$

$(0 < \xi < 1)$?

99. $x^4 + y^4 + \sin xy - 1 = 0$ (do člana x^3 na segmentu $|x| \leq 1$).

Odrediti koeficijente A, B, C tako da za $x \to 0$ budu ispunjene asimptotske formule sa najvećim mogućim redom tačnosti u odnosu na x. Ustanoviti taj red.

100. $\arctan x = \frac{x+Ax^3}{1+Bx^2} + O^\star(x^n)$. **101.** $\arcsin x = \frac{x+Ax^3}{1+Bx^2} + O^\star(x^n)$.

102. $\ln(1+x) = \frac{x+Ax^3}{1+Bx^2} + O^\star(x^n)$. **103.** $\sqrt[k]{1+x} = \frac{1+Ax}{1+Bx} + O^\star(x^n)$.

104. $(1+x)^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx} + O^\star(x^n)$.

105. Napisati sedam prvih članova razlaganja po lokalnoj Maklorenovoj formuli funkcije $y(x)$, ako je $x = y + y^7$.

106. Primenom Tejlorove formule, naći:

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(30\frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{x^7}\right).$$

Ispitati ekstremume sledećih funkcija $y = y(x)$:

107. a) $y = |x|$, $x \neq 0$; $y(0) = 1$. b) $y = |x|$, $x \neq 0$. c) $y = D(x)$ (Dirihleova funkcija).

d) $y = x^2$, $x \in \mathbb{Q}$; $y = x^4$, $x \in \mathbb{I}$.

108. $y = |x|^{\frac{1}{\sqrt{2}}} |1-x|^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$. **109.** $y = \cos^{100} x + \cosh^{100} x$.

110. $y = \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|)$. **111.** $x = 3t - t^3$; $y = 4t - t^4$ $(0 \leq t \leq 1)$.

112. $\rho = 1 + \cos\varphi$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. **113.** $x^3 + y^3 + x^2 y + 1 = 0$.

114. Može li se tvrditi, da ako neprekidna funkcija f u nekoj maloj okolini tačke x_0, sleva od te tačke raste, a zdesna od nje opada, ima u toj tački maksimum?

Naći najmanju i najveću vrednost sledećih funkcija:

115. $f(x) = e^{-\frac{\pi^2}{x^2}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{\pi^2}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$ na $[-\pi, \pi]$.

116. $f(x) = -\ln|\sin x|$, $x \neq k\pi$; $f(k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$ na $|x| \leq 4\pi$.

Naći $\inf f(x)$ **i** $\sup f(x)$ **sledećih funkcija:**

117. $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x\right)$ $\left(x \neq \frac{\pi}{4}\right)$ i $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ na intervalu $0 < x < +\infty$.

118. $f(x) = |\sin x - |x - a||$ na intervalu $-1 < x < 1$.

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

119. a) $f(x) = \sup\{\sin x, \cos x, \tan x\}$; b) $f(x) = \inf\{\sin x, \cos x, \tan x\}$.

120. $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$. **121.** $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = \cos 3t$.

Naći geometrijsko mesto tačaka, čije koordinate zadovoljavaju jednačine:

122. $\left(1 - x^2 - \left|1 - x^2\right|\right)^2 + y^2 = 0$.

123. $(2 - x^2 - \left|1 - x^2\right| - |1 - y| - |y|)(2 - y^2 - \left|1 - y^2\right| - |1 - x| - |x|) = 0$.

124. $x^2 + y^2 + 9 - \left|x^2 + y^2 - 1\right| - |2 - y| - |y + 3| - |x| - |5 - x| = 0$

125. $2 - y - |1 - y - x| - |1 + x - y| - |y| = 0$.

2.14 Rezultati

1. $f'(k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$; $f'(x)$ ne postoji za $x \neq k$.

2. a) $f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & \pi \leq x < +\infty; \end{cases}$ b) $f'(x) = \begin{cases} 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}; \\ -\sin x, & \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi; \\ 0, & 2\pi \leq x < +\infty. \end{cases}$

3. $f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ za } |x| \leq 1; \\ \text{ne postoji za } |x| > 1. \end{cases}$

4. a) $f'(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 4x^2, & |x| > 1; \end{cases}$ b) $f'(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ 2e^{2x}, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

c) $f'(x) = \begin{cases} e^x, & 0 < x < 1; \\ 2xe^{x^2}, & |x| > 1; \\ 0, & -1 < x < 0; \end{cases}$ d) $f'(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ e^{e^x + x}, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

5. $f'(x) = \frac{\cosh x}{x} - \frac{\sinh x}{x^2}$, $x \neq 0$; $f'(0) = 0$. **6.** a) $f'(x) = x$; b) $f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$.

7. a) $y'_{\pm}(x) = -\frac{sgn\left(\sin\frac{2\pi}{x}\right)}{x^2}$, $x \neq \frac{2}{k}$; $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$;
$y'_{+}\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^k \frac{k^2}{4}$; $y'_{-}\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{k+1} \frac{k^2}{4}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$;
b) $y'_{\pm}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}; \\ -2\cos 2x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ $y'_{+}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'_{-}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$;
c) $y'_{\pm}(0) = \pm\frac{\ln 2}{2}$; $y'_{+}(1) = 2$; $y'_{-}(1) = 2\ln 2'$; $y'_{+}(2) = 8\ln 2$; $y'_{-}(2) = 4$; $y'_{+}(-1) = -2\ln 2$; $y'_{-}(-1) = -2$; $y'_{+}(-2) = -4$; $y'_{-}(-2) = -8\ln 2$;
$y'_{\pm}(x) = \begin{cases} \frac{\ln 2}{2} 4^{|x|} sgn x, & 0 < |x| < 1,\ 2 < |x| < +\infty; \\ 2x, 1 < |x| < 2. \end{cases}$

8. $f'_{\pm}(x) = 2\pi x\left[x^2\right]\cos\pi x^2 \cdot sgn\left(\sin\pi x^2\right)$, $x \neq \pm\sqrt{k}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$;
$f'_{\pm}\left(\pm\sqrt{k}\right) = \pm 2\pi k^{\frac{3}{2}}$; $f'_{\mp}\left(\pm\sqrt{k}\right) = \mp 2\pi(k-1)\sqrt{k}$.

9. a) $f'_{\pm}(x) = \frac{2^{\frac{x}{1-x}}\ln 2}{(1-x)^2\left(1-2^{\frac{x}{1-x}}\right)^2}$ $(x \neq 0;\ x \neq 1)$; $f'_{+}(1) = 0$; $f'_{-}(1) = +\infty$;
b) $f'_{\pm}(x) = \frac{2^{\frac{x}{1-x}}\ln 2}{(1-x)^2\left(1-2^{\frac{x}{1-x}}\right)^2}$ $(x \neq 0;\ x \neq 1)$; $f'_{+}(1) = +\infty$; $f'_{-}(1) = 0$.

10. a) $f'_{\pm}(x) = e^{|x|} sgn x$ $(x \neq 0)$; $f'_{\pm}(0) = \pm 1$;
b) $f'_{\pm}(x) = -e^{-|x|} sgn x$ $(x \neq 0)$; $f'_{\pm}(0) = \mp 1$;

11. $f'_{\pm}(x) = 0$ $(x \neq 1, 2, 3, \ldots)$; $f'_{+}(k) = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; $f'_{-}(k) = +\infty$ $(k = 2, 3, \ldots)$.

12. $y'_{\pm}(k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.** a) $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$; b) $f'_{\pm}(k\pi) = \pm\infty$, $k \in \mathbb{Z}$.

14. $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$; za $\beta > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. **15.** $f_{k+1}(x) = x f_k(x) + \frac{1}{n} x(1-x) f'_k(x)$.

16. a) $D^{\pm} f(x) = D_{\pm} f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ b) $D^{+} f(0) = 1$, $D^{-} f(0) = 0$, $D_{+} f(0) = -1$, $D_{-} f(0) = 0$.
b) $D^{\pm} f(x) = D_{\pm} f(x) = a\sin^2\frac{1}{x} + b\cos^2\frac{1}{x} + \frac{b-a}{x}\sin\frac{2}{x}$, $x \neq 0$; $D^{\pm} f(0) = \max(a, b)$, $D_{\pm} f(0) = \min(a, b)$.

17. $D'_{20}(x) = a^{59}(1-b)\frac{40a'b + b'a}{(1-ba^{40})^2} + a^{19}\frac{20a'(1-b) - b'a}{1-ba^{40}}$,
$a = \frac{5 - x^2 + 9 - 10x^2 + x^4}{4}$, $b = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{a} - 2\right)^2$.

19. $f'(x) = \max\left(1, x^2\right)$. **20.** $f'(x) = [x]\,|\sin\pi x|$.

21. $f'(x) = \varphi(x)$, gde je $\varphi(x)$ rastojanje broja x do najbližeg celog broja.

23. 3. **24.** $\frac{12}{5}$. **25.** -1. **28.** $y'(0) = 0$. **29.** $y'(0) = -1$. **31.** $dy(0) = 0$.

32. $\triangle\, y(0) = \pm 2$, $dy(0)$ ne postoji. **33.** $\triangle\, y(0) = \pm 4$, $\pm 4\sqrt{3}$, 206, $-250, 18$, 26, $22 \pm 4\sqrt{3}$; $dy(0) = 75$.

34. $dy(0) = 0, 2dx$. **35.** $dy(0) = k\pi dx$ $(dx < 0;\ k \in \mathbb{Z})$.

36. $dy(0) = 3dx$. **37.** $dy(0) = 2dx$. **38.** $d_{\pm} y(0) = \pm dx$. **39.** $d_{+} y(0) =$

$-dx$.

40. $d_{\pm}y(0) = 0$. **41.** $y''(0) = 0$; da ; $m < 0$. **42.** $\alpha > 4$.

43. $y' = \begin{cases} -\cos x, & |x| > 2; \\ e^x, & -2 < x < \ln 2; \\ e^x(\cos e^x - e^x \sin e^x), & \ln 2 < x < 2. \end{cases}$ **44.** $f''_{\pm}(0) = -\frac{1}{3}$.

46. $d^2y(0) = \pi(dx)^2\ (\alpha = 2)$, $d^2y(0) = 0\ (\alpha < 2)$.

47. $y''_{x^2}(0) = 2$. **48.** $y''_{x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -\infty < t < -1; \\ \frac{t}{2\pi}\left(1-t^2\right)^{-\frac{3}{2}}, & |t| < 1 \\ -\frac{1}{4t^3}, & t > 1. \end{cases}$

49. $y''_{x^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{(2-\pi)^2}{4}$. **50.** $\sum\limits_{i=1}^{10} i^{100}x^i$. **51.** $y'(0) = \pm 1$, $y'(0) = 0$.

52. $y^{(50)}(0) = 26 \cdot 27 \cdots 50$. **53.** 0. **54.** 0. **55.** $\pm\frac{3}{2^{59}}95!!$. **58.** $n^{\frac{n}{1-n}} \cdot \frac{1}{2}$.
62. ne. **64.** a) ne b) da; c) da. **67.** raste. **68.** opada. **69.** za $0 < t < 1$ funkcija opada; za $t < 0$ i $t > 1$ funkcija raste. **70.** svaka grana funkcije raste. **74.** nema prevoja. **75.** za $0 < t < e^{-1}$ i $t > e$ funkcija je konkavna; za $e^{-1} < t < e$ konveksna. **76.** konveksna. **77.** konkavna. **78.** za $0 < \varphi < \varphi^{\star}$ funkcija je konveksna; za $\varphi^{\star} < \varphi < 1$ konkavna, gde je $\tan\varphi^{\star} = \frac{1-2\varphi^{\star}}{\varphi^{\star}-\varphi^{\star 2}}$. Prevoja nema. **79.** za $x < -1$ konveksna, za $x > -1$ konkavna. **83.** ne. **84.** 0. **85.** $-\frac{8}{525}$. **86.** $e^{-\frac{1}{12}}$. **87.** e. **88.** e^{-11}. **89.** 0. **90.** $f(x) = o\left(x^3\right)$. **91.** $f(x) = 1 + o\left(x^3\right)$; da. **92.** $o\left(x^{10}\right)$; da, za $x \neq 0$. **93.** $f(x) = o\left(x^2\right)$. **94.** $y_1 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$; $y_2 = -2 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$. **95.** $y(x) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{26}{81}x^2 + o\left(x^3\right)$. **97.** $f(x) = 1 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$. **98.** $f(x) = \frac{f^{(IV)}(\xi)}{4!}x^4$; da. **99.** $y_1 = 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{24} + \frac{y_1^{(IV)}(\xi_1)}{4!}x^4$, $y_2 = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{24} + \frac{y_2^{(IV)}(\xi_1)}{4!}x^4$. **100.** $A = \frac{4}{15}$, $B = \frac{3}{5}$, $n = 7$. **101.** $A = -\frac{17}{60}$, $B = -\frac{9}{20}$, $n = 7$. **102.** $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{2}{3}$, $n = 4$. **103.** $A = \frac{k+1}{2k}$, $B = \frac{k-1}{2k}$, $n = 3$. **104.** $A = C = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $n = 4$. **105.** $y = x + o\left(x^6\right)$. **106.** $-\frac{\pi}{4}$. **107.** a) $y_{\max} = 1$;b),c) nema ekstremuma. d) $y_{\min} = 0$. **108.** $y_{\min} = 0$ za $x = 0$ i $x = 1$; $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ za $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **109.** $y_{\min} = 2$ za $x = 0$. **110.** $y_{\max} = 1$ za $x = 2k\pi$. **111.** $y_{\min} = 0$ za $x = 0$. **112.** $y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ za $x = \frac{3}{4}$. **113.** $y_{\min} = -1$ za $x = 0$; $y_{\max} = -\frac{3}{\sqrt[3]{3!}}$ za $x = \frac{2}{\sqrt[3]{3!}}$. **14.** ne. **115.** $\sqrt{2}e^{-\pi}$. **116.** 0. **117.** $-1; \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}}$.

118. $\inf f(x) = \begin{cases} \sin 1 - a - 1, & -\infty < a \leq a - 1; \\ -\sin a, & -1 \leq a \leq 0; \\ 0, & 0 \leq a \leq 1 + \sin 1; \\ 1 - a - \sin 1, & -\infty < a \leq -\sin 1. \end{cases}$

$\sup f(x) = \begin{cases} 1 + a + \sin 1, & -\sin 1 \leq a < +\infty \\ 1 - a - \sin 1, & -\infty < a \leq -\sin 1. \end{cases}$

119. a) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi; \\ \tan x, & \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le x < \frac{\pi}{2},\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$ funkcija f je $2\pi-$periodična.

b) $f(x) = \begin{cases} \tan x, & -\frac{\pi}{2} < x \le 0,\ \frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \\ \sin x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{2}; \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le x \le \frac{5\pi}{4}. \end{cases}$

120. kriva pripada konusu $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **121.** pripada cilindru $y = \frac{2}{a}x^2 - a$. **122.** segment $|x| \le 1$. **123.** unutrašnji deo $\frac{3}{4}$ kvadrata. **124.** unutrašnji deo pravougaonika $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 2$ tako da je: $x + y^2 \le 1$. **125.** ravan trougla sa vrhovima: $M_1(-1,0)$; $M_2(0,1)$; $M_3(1,0)$.

Glava 3

Neodređeni integral

3.1 Jednostavniji neodređeni integrali

1^0 Pojam neodređenog integrala. Funkcija F je primitivna za funkciju f na razmaku X, ako je u svakoj tački razmaka X funkcija F diferencijabilna i ima izvod $F'(x)$ jednak $f(x)$ za svako $x \in X$. Skup svih primitivnih funkcija date funkcije f na razmaku X naziva se neodređenim integralom funkcije f (na tom razmaku) i označava se sa $\int f(x)dx$. Ako je F proizvoljna primitivna za funkciju f na razmaku X, to je

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta.

2^0 Glavna svojstva neodređenog integrala:

a) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

b) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$;

c) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$ (A je konstanta, $A \neq 0$);

d) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

3^0 Tablični integrali:

I. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $x > 0$, $(\alpha \neq -1)$; Ako funkcija $x \mapsto x^\alpha$ ima smisla[1] i za $x < 0$ onda formula važi i na svakom intervalu koji je podskup njenog definicionog skupa;

II. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, na svakom intervalu koji ne sadrži tačku $x = 0$;

III. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C_1; \\ -\operatorname{arccot} x + C_2; \end{cases}$ **IV.** $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$; na svakom intervalu koji ne sadrži tačke: $-1, 1$;

[1] Prim. prevodioca

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C_1; \\ -\arccos x + C_2; \end{cases}$ $|x| < 1$; **VI.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$; pri čemu, u slučaju kada se javlja $\sqrt{x^2 - 1}$, formula važi na intervalima definisanim sa $|x| > 1$;

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + C$;

VIII. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; **IX.** $\int \cos x dx = \sin x + C$;

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$; $x \neq k\pi$; **XI.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$; $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$;

XII. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$; **XIII.** $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$; $x \neq 0$;

XIV. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$; **XV.** $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$.

4^0 Osnovne metode integraljenja:

a) Metod uvođenja nove promenljive. Ako je $\int f(x)dx = F(x) + C$, to je

$\int f(u)du = F(u) + C$, gde je $u = \varphi(x)$.

b) Metod razlaganja. Ako je $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, to je

$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$, ako funkcije f_1 i f_2 imaju primitivne.

c) Metod smene. Ako je f neprekidna funkcija, tada uzimajući $x = \varphi(t)$, gde je φ neprekidna funkcija zajedno sa svojim izvodom φ' dobijamo

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

d) Parcijalno integraljenje. Ako su u i v diferencijabilne funkcije i ako postoji primitivna za uv', tada je

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

5^0 Rešeni zadaci.

Koristeći tablične integrale naći:

1. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}dx$.

◄ Pošto je $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x|$ $= (\cos x - \sin x)sgn(\cos x - \sin x)$, to prema formulama VIII i IX imamo

$$I(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ -(\sin x + \cos x) + C_{-1}, & \frac{\pi}{4} - 2\pi \leq x < \frac{\pi}{4} - \pi; \\ \sin x + \cos x + C_0, & \frac{\pi}{4} - \pi \leq x < \frac{\pi}{4}; \\ -(\sin x + \cos x) + C_1, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4} + \pi; \\ \dots\dots\dots \\ (-1)^n(\sin x + \cos x) + C_n, & \frac{\pi}{4} + (n-1)\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + n\pi; \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Saglasno definiciji primitivne funkcije, mora da važi $I(\frac{\pi}{4} + k\pi) = I(\frac{\pi}{4} + k\pi - 0)$

za svako $k \in \mathbb{Z}$, odakle se dobija $C_k = 2k\sqrt{2} + C$, $k = \left[\frac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi}\right]$, $C = C_0$.
Dakle,

$$I(x) = (-1)^k(\sin x + \cos x) + 2k\sqrt{2} + C, \ k = \left[\frac{\pi - \frac{\pi}{4} + x}{\pi}\right]. \ ▶$$

2. Ako je $\int f(x)dx = F(x) + C$, tada je $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ $(a \neq 0)$. Dokazati.

◀ Očigledno je

$$f(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b)d(ax+b) \ (a \neq 0)$$

zato primenom metoda uvođenja nove promenljive imamo

$$\int f(ax+b)dx = \int \frac{1}{a}f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u) + C,$$

gde je $u = ax + b$. ▶

Naći integrale:

3. $\int \sqrt[3]{1-3x}dx$.

◀ Koristeći rezultat prethodnog primera imamo da je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt[3]{1-3x}dx = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{1}{3}}\, d(1-3x) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C. \ ▶ \end{aligned}$$

4. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

◀ Slično prethodnom je za $x \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right| + C. \ ▶ \end{aligned}$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

◀ Za $|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$, imamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C. \blacktriangleright$$

6. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.
◀ Očigledno je za $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{1+\sin x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \\ &= -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

7. $\int \frac{xdx}{4+x^4}$.
◀ Pošto je

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{u}{a} + C,\ a \neq 0,$$

to je $$\int \frac{xdx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4} \arctan\frac{x^2}{2} + C. \blacktriangleright$$

8. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$.
◀ Kako je za $x \neq \pm a$,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a}\right) \\ &= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \text{ to je} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3dx}{x^8-2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C,\ x \neq \pm\sqrt[8]{2}. \blacktriangleright$$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

◀ Za $x \neq 0$, imamo

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{dx}{x\,|x|\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}, \text{ te je}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} \\ &= -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C. \end{aligned}$$ ▶

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

◀ Pošto je

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{sgnx dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} \quad (|x|>1),$$

to je $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$ ▶

11. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

◀ Koristeći jednakost $|x| = xsgnx$, imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{|x|^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{sgnx}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{sgnx}{2}\cdot 2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{|x|\,sgnx}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$ ▶

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$.

◀ Iz uslova sledi da je $x(x+1)>0$. Za $x>0$ imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \\ &= 2\int \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}} = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+C. \end{aligned}$$

Slično, za $1+x<0$ sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x}\sqrt{-x-1}} = -2\int \frac{d\left(\sqrt{-x-1}\right)}{\sqrt{-x}} \\ &= -2\int \frac{d\left(\sqrt{-x-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{-x-1}\right)^2}} = -2\ln\left(\sqrt{-1-x}+\sqrt{-x}\right)+C. \end{aligned}$$

Formalno, objedinjujući oba slučaja, dobijamo

$$I(x) = 2sgnx\cdot\ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|}\right)+C\ (x<-1;\ x>0). \ ▶$$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

◀ Podintegralna funkcija je definisana za $0<x<1$. Imamo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} = 2\arcsin\sqrt{x}+C. \ ▶$$

14. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

◀

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{d(e^x)}{1+e^{2x}} = \arctan e^x + C. \ ▶$$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

◀ Zbog

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}},$$

sledi $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}} = -\ln\left(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}\right)+C.$ ▶

16. $\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.
◀ Uzimajući u obzir jednakost:

$$\frac{dx}{x\ln x} = d\ln(\ln x)\ (x>1),\ \text{imamo da je}$$

$$\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)} = \int \frac{d\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)|+C. \ ▶$$

17. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.
◀ Primenjujući da je $(\sin x+\cos x)dx = d(\sin x-\cos x)$, dobijamo za $x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ da je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx = \int (\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x) \\ &= \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C. \ ▶ \end{aligned}$$

18. $\int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}$.
◀ Kako je $\sin x\cos x dx = \frac{d(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)}{2(a^2-b^2)}$, to je za $a\neq\pm b$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}} = \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{d(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)}{2\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}} \\ &= \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+C,\ a^2\neq b^2. \ ▶ \end{aligned}$$

19. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$.

◀ Pošto je $\frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}} = \frac{d(\sqrt{2}\cos x)}{\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2 x-1}}$, dobijamo za $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$ $k\in\mathbb{Z}$, da je

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}\cos x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\cos x\right)^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|+C. \ ▶$$

20. $\int \frac{\sinh x dx}{\sqrt{\cosh 2x}}$.

◀ Očigledno je

$$\int \frac{\sinh x dx}{\sqrt{\cosh 2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}\cosh x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\cosh x\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{\cosh 2x}\right) + C. ▶$$

21. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.
◀ Imamo

$$I(x) = \int \frac{dx}{(\tan^2 x + 2)\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C_n,$$

$n\pi - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Zbog neprekidnosti primitivne funkcije sledi

$$I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - 0\right) = I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + 0\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{n+1}; \quad C_{n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + C_n.$$

Odavde nalazimo da je

$$C_n = \frac{n\pi}{\sqrt{2}} + C, \quad C = C_0.$$

Pošto je $n < \dfrac{2x + \pi}{2\pi} < n + 1$,

to je $n = \left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$. Dakle,

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{2x + \pi}{2\pi}\right] + C; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi;$$

$$I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi} I(x). ▶$$

22. $\int \frac{dx}{\sin x}$.
◀ Imamo da je

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = d\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|,$$

te je $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int d\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C, \; x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$ ▶

23. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

◀ Iz prethodnog primera sledi da je za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \blacktriangleright$$

24. $\int \frac{dx}{\sinh x}$.

◀ Transformišući podintegralnu funkciju, za $x \neq 0$, dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sinh x} &= \int \frac{dx}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tanh\frac{x}{2}\cosh^2\frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{d\tanh\frac{x}{2}}{\tanh\frac{x}{2}} = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

25. $\int \frac{\sinh x \cosh x dx}{\sqrt{\sinh^4 x + \cosh^4 x}}$.

◀ Imamo da je

$$\begin{aligned}f(x)\,dx &= \frac{\sinh x \cosh x dx}{\sqrt{\sinh^4 x + \cosh^4 x}} = \frac{\sinh x \cosh x dx}{\sqrt{\frac{(\sinh^2 x + \cosh^2 x)^2 + (\cosh^2 x - \sinh^2 x)^2}{2}}} \\ &= \frac{\sinh 2x dx}{2\sqrt{\frac{1}{2}\cosh^2 2x + \frac{1}{2}}} = \frac{d(\cosh 2x)}{2\sqrt{2}\sqrt{\cosh^2 2x + 1}}.\end{aligned}$$

Onda je

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{\sinh x \cosh x dx}{\sqrt{\sinh^4 x + \cosh^4 x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\cosh 2x)}{\sqrt{\cosh^2 2x + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\cosh 2x + \sqrt{\cosh^2 2x + 1}\right) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\cosh 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\sinh^4 x + \cosh^4 x}\right) + C. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

26. $\frac{dx}{\cosh^2 x \sqrt[3]{\tanh^2 x}}$.

◀ Očigledno je

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x \sqrt[3]{\tanh^2 x}} = \int \tanh^{-\frac{2}{3}} x d(\tanh x) = 3\sqrt[3]{\tanh x} + C \ (x \neq 0). \quad \blacktriangleright$$

27. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

◀ Imamo da je

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}, \text{ i onda je}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x) + C = F(x) + C, \end{aligned}$$

gde $F \in C(-\infty, +\infty)$. Iz uslova $F(0) = 0$, $F(-0) = F(+0) = F(0)$ nalazimo da je $\varepsilon(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} sgn x$. ▶

28. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

◀ Iz jednakosti

$$\frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \text{ dobijamo}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + C. \end{aligned}$$ ▶

29. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx$.

◀ Neka je $n \neq -2$; tada je

$$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx = \frac{2}{n+2} \int \frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2}} = \frac{2}{n+2} \ln \left| x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}} \right| + C,$$

$n \neq -2$. Ako je $n = -2$, to je $\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x| + C$, $x \neq 0$. ▶

30. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

◀ Imamo

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}\sin x\right)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right) + C. \blacktriangleright$$

31. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

◄ Posle jednostavnih transformacija, sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\tan x dx}{(\tan^4 x + 1)\cos^2 x} = \int \frac{\tan x d(\tan x)}{\tan^4 x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\tan^2 x)}{\tan^4 x + 1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x) + C, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{4} + C, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned} \blacktriangleright$$

32. $\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx$.

◄ Posle deljenja imenioca i brojioca sa 4^x, imamo da je za $x \neq 0$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{d\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1}\right| + C = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

33. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

◄ Polazeći od jednakosti $\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\sqrt{1+x^2}\right)$, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+x^2}} \\ &= \int \frac{d\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = 2\int \frac{d\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Primenom metoda razlaganja, izračunati integrale:

34. $\int x(1-x)^{10} dx$.

◄ Polazeći od očiglednog identiteta $x \equiv 1 - (1-x)$, dobijamo

$$I(x) = \int x(1-x)^{10} dx = \int (1-(1-x))(1-x)^{10} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int (1-x)^{10}dx - \int (1-x)^{11}dx \\
&= -\int (1-x)^{10}d(1-x) + \int (1-x)^{11}d(1-x) \\
&= -\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12} + C. \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

35. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$.

◀ Razlažući x^2 po stepenima $1-x$, sledi

$$x^2 \equiv (1-x)^2 - 2(1-x) + 1;$$

Zato je

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{100}}dx \\
&= \int \frac{dx}{(1-x)^{98}} - 2\int \frac{dx}{(1-x)^{99}} + \int \frac{dx}{(1-x)^{100}} \\
&= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C
\end{aligned}$$

$(x \neq 1)$. ▶

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

◀ Oslobađanjem korena iz imenioca dobijamo

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)^{\frac{1}{2}}d(x-1) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right) + C, \ (x \geq 1). \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

37. $\int x\sqrt{2-5x}dx$.

◀ Pošto je

$$x \equiv -\frac{1}{5}(2-5x) + \frac{2}{5}, \text{ to je}$$

$$I(x) = \int x\sqrt{2-5x}dx = -\frac{1}{5}\int \left((2-5x)^{\frac{3}{2}} - 2(2-5x)^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{25}\int \left((2-5x)^{\frac{3}{2}} - 2(2-5x)^{\frac{1}{2}}\right) d(2-5x)\\
&= \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C\\
&= -\frac{8+30x}{375}\sqrt{(2-5x)^3} + C \quad \left(x \le \frac{2}{5}\right). \ ▶
\end{aligned}$$

38. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

◀ Zbog $x \equiv -\frac{1}{3}(1-3x) + \frac{1}{3}$, sledi

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}} = -\frac{1}{3}\int \left((1-3x)^{\frac{2}{3}} - (1-3x)^{-\frac{1}{3}}\right) dx\\
&= \frac{1}{9}\int \left((1-3x)^{\frac{2}{3}} - (1-3x)^{-\frac{1}{3}}\right) d(1-3x)\\
&= \frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C\\
&= -\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C \quad \left(x \ne \frac{1}{3}\right). \ ▶
\end{aligned}$$

39. $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

◀ Pošto je

$$x^3 dx = \frac{1}{2}x^2 d(x^2+1) = \frac{1}{2}\left((1+x^2)-1\right) d(1+x^2), \text{ to je}$$

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left((1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\right) d(1+x^2)\\
&= \frac{3}{14}\left(1+x^2\right)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C. \ ▶
\end{aligned}$$

40. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

◀ Najpre je

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right).$$

Onda je[2]

[2] Primedba prevodioca

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \begin{cases} \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2} + C_{-1}, & x < -2; \\ \frac{1}{3}\ln\frac{1-x}{x+2} + C_0, & -2 < x < 1; \\ \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2} + C_1, & x > 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

41. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

◀ Integraljenjem jednakosti

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2},$$

nalazimo da je

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C. \blacktriangleright$$

42. $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

◀ Pošto je $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$ i

$$\frac{1}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}, \text{ to je}$$

$$I(x) = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C. \blacktriangleright$$

43. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$.

◀ Polazeći od identičnosti

$$1 \equiv \left(\frac{(x+a)-(x+b)}{a-b}\right)^2,$$

dobijamo da je

$$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{a-b}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right) + \frac{1}{(x+a)^2}\right).$$

Sada je za $x \neq -a; x \neq -b$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(-\frac{1}{x+b} - \frac{2}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| - \frac{1}{x+a}\right) + \\ &= -\frac{a+b+2x}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

44. $\int \sin^4 x dx$.
◄ Integraljenjem jednakosti

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x,\end{aligned}$$

dobijamo

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \ ►$$

45. $\int \cot^2 x dx$.
◄ Pošto je $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, to je za $k\pi < x < (k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\cot x - x + C_k. \ ►$$

46. $\int \tan^3 x dx$.
◄ Imamo

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \tan x d(\tan x) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C_k \ \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right). \ ►\end{aligned}$$

47. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.
◄ Polazeći od primera 22, $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|$ dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} \\ &= \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x} + C_k \ \left(\frac{k\pi}{2} < x < \frac{(k+1)\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}\right). \ ►\end{aligned}$$

48. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$.
◄ Očigledno je

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx &= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \int \sin x d(\sin x) \\ &= \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C_k \ (k\pi < x < (k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}). \ ►\end{aligned}$$

49. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

◀ Polazeći od jednakosti $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\cot x)$, nalazimo da je

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^4 x} &= -\int \frac{1}{\sin^2 x} d(\cot x) = -\int (\cot^2 x + 1) d(\cot x) \\ &= -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C_k \ (k\pi < x < (k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$ ▶

50. $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

◀ Kako je

$$\frac{dx}{1+e^x} = \frac{d(e^x)}{e^x(e^x+1)} = \frac{(e^x+1)-e^x}{e^x(e^x+1)} d(e^x) = \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1}\right) d(e^x),$$

to je

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{d(e^x)}{e^x} - \int \frac{d(e^x)}{e^x+1} = x - \ln(e^x+1) + C.$$ ▶

51. $\int \cosh x \cosh 3x dx$.

◀ Imamo

$$\int \cosh x \cosh 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x + \cosh 4x)\, dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{8}\sinh 4x + C.$$ ▶

52. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x}$.

◀ Zbog $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, dobijamo za $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = \int \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = -\coth x - \tanh x + C.\end{aligned}$$ ▶

Primenom zgodne smene, naći sledeće integrale:

53. $\int x^3(1-5x^2)^{10} dx$.

◀ Stavljajući $1 - 5x^2 = t$, nalazimo $xdx = -\frac{1}{10}dt$; te je

$$x^3(1-5x^2)^{10} dx = \frac{1}{50}(t^{11} - t^{10}) dt,$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}I(x) &= \int x^3(1-5x^2)^{10} dx = \frac{1}{50}\int (t^{11} - t^{10}) dt \\ &= \frac{1}{50}\left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11}\right) + C = -\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11} + C.\end{aligned}$$ ▶

54. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$.
◀ Smenom $\sqrt{2-x}=t$, $dx=-2tdt$, imamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} &= -2\int (4-4t^2+t^4)dt = -2\left(4t-\frac{4}{3}t^3+t^5\right)+C \\ &= -\frac{2}{15}(32+8x-3x^2)\sqrt{2-x}+C \ (x<2).\end{aligned}$$ ▶

55. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
◀ Uzimajući $\sqrt{1-x^2}=t$, dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int \left(1-2t^2+t^4\right)dt = -\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)+C \\ &= -\frac{1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}+C \ (|x|<1).\end{aligned}$$ ▶

56. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$.
◀ Stavljajući $2-5x^3=t^3$, dobijamo

$$\begin{aligned}I(x) &= \int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx = -\frac{1}{25}\int (2-t^3)t^4dt \\ &= -\frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{8}t^8\right)+C = -\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C.\end{aligned}$$ ▶

57. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$.
◀ Smenom $\sin x=t^2$, $\cos xdx=2tdt$, $\cos^4 x=(1-t^4)^2$ imamo

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx = 2\int (1-t^4)^2t^2dt \\ &= \frac{2}{3}t^3-\frac{4}{7}t^7+\frac{2}{11}t^{11}+C \\ &= \left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C_k,\end{aligned}$$

$(2k\pi \le x \le (2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z})$. ▶

58. $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.
◀ Smenom $1+\cos^2 x=t$, dobijamo $\cos x\sin xdx=-\frac{1}{2}dt$ i

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1-t}{t} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - 1\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2} \cos^2 x + C. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

59. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

◀ Smenom $\tan x = t$, za $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dobijamo

$$I(x) = \int t^2(t^2+1) dt = \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C = \tan^3 x \left(\frac{\tan^2 x}{5} + \frac{1}{3}\right) + C_k. \ \blacktriangleright$$

60. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$

◀ Neka je $e^{-\frac{x}{2}} = t$, tada je $\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}} = -2dt$;

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}} dx}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{-\frac{x}{2}})} = -2 \int \frac{t dt}{t+1} \\ &= -2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = -2t + 2\ln(1+t) + C \\ &= -2e^{\frac{x}{2}} - x + \ln(1+e^{\frac{x}{2}}) + C. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

61. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

◀ Stavimo $t = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}$. Dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= -2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -2 \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C \\ &= x - 2\ln\left(1 + \sqrt{1+e^x}\right) + C. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

62. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

◀ Smenom $t = \arctan \sqrt{x}$, imamo

$$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = 2 \int t dt = t^2 + C = \arctan^2 \sqrt{x} + C \ (x > 0). \ \blacktriangleright$$

63. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

◀ Ako uzmemo $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ za $|x| < 1$, dobijamo

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \tan(\arcsin x) + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C. \ \blacktriangleright$$

64. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

◀ Uzmimo $x = \frac{\sqrt{2}}{\sin 2t}$. Ako $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[$, to $t \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$; ako $x \in]\sqrt{2}, +\infty[$ to $t \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Primetimo da je za te vrednosti x i t : $sgn \cot 2t = sgn t = sgn x$; zato imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}} = -4 sgn \cot 2t \int \frac{dt}{\sin^3 2t} \\ &= -\frac{sgn t}{2} \int \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2}{\sin^3 t \cos^3 t} dt = sgn t \left(\frac{\cos 2t}{\sin^2 2t} - \ln |\tan t| \right) + C. \end{aligned}$$

Iz jednakosti $\sin 2t = \frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$, uzimajući u obzir $|\tan t| < 1$ za $|t| < \frac{\pi}{4}$, imamo da je

$$\tan t = \frac{x \pm \sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}} = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{x^2-2}}, & x > \sqrt{2}; \\ \frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}, & x < -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} I(x) &= sgn x \left(\frac{x^2}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + sgn x \ln \left| x + \sqrt{x^2-2} \right| \right) + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln \left| x + \sqrt{x^2-2} \right| + C. \end{aligned}$$ ▶

65. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

◀ Smenom $x = a \sin t$, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1+\cos 2t)dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C \end{aligned}$$

$(|x| \le a)$. ▶

66. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

◀ Smenom $x = a \tan t$, imamo $(a \neq 0)$;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$ ▶

67. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

◀ Neka je $x = a\cos 2t$. Tada je $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \cot t$, $dx = -2a\sin 2tdt$ i

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = -4a\int \cos^2 tdt = -4a\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C \\ &= a\cdot \arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}+C \ (-a \le x < a). \end{aligned}$$ ▶

68. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx.$

◀ Stavljajući $x = 2a\sin^2 t$ (primer 44) dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = 8a^2\int \sin^4 tdt = a^2(3t-2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t)+C \\ &= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C \ (0 \le x < 2a). \end{aligned}$$ ▶

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

◀ Smenom $x-a = (b-a)\sin^2 t$, posle jednostavnih transformacija nalazimo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int dt = 2t+C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C, \ (a < x < b).$$ ▶

70. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx \ (b > a).$

◀ Primenjujući smenu iz prethodnog primera dobijamo da je za $a < x < b$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = 2(b-a)^2\int \sin^2 t\cos^2 tdt \\ &= \frac{(b-a)^2}{2}\int (1-\cos 4t)dt = \frac{(b-a)^2}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C \\ &= \frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + \frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C. \end{aligned}$$ ▶

71. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx.$

◀ Smenom $x = a\sinh t$ ($dx = a\cosh tdt$), sledi $\sqrt{a^2+x^2} = a\cosh t$, te je

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = a^2\int \cosh^2 tdt == \frac{a^2}{4}\sinh 2t + \frac{a^2 t}{2}+C.$$

Iz jednakosti $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{x}{a}$ imamo $e^t = \frac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Zbog $e^t > 0$ je $t = \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| - \ln a$. Očigledno je sada

$$\begin{aligned} \sinh 2t &= 2\sinh t \cosh t = 2\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} \\ &= 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2}, \end{aligned}$$

te je konačan rezultat datog integrala

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C. \blacktriangleright$$

72. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$.

◀ Podintegralna funkcija je definisana za $x < -a$ i $x \geq a$. Neka je $x \geq a$. Tada se smenom $x - a = 2a\sinh^2 t$ dobija

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = 4a\int \sinh^2 t dt = a\sinh 2t - 2at + C.$$

Uzimajući u obzir da je $a\sinh 2t = \sqrt{x^2-a^2}$, $\sinh t = \sqrt{\frac{x-a}{2a}} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $t = \ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right) - \ln\sqrt{2a}$, imamo

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right) + C.$$

Ako je $x < -a$, smenom $x + a = -2a\sinh^2 t$ imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = -4a\int \sinh^2 t dt = -\sinh 2t + 2at + C \\ &= -\sqrt{x^2+a^2} + 2a\ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}\right) + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

◀ Ako je $x+a > 0$ i $x+b > 0$ $(b > a)$ to se smenom $x+a = (b-a)\sinh^2 t$ dobija

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2\int dt = 2t + C = 2\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right) + C.$$

Za $x + a < 0$ i $x + b < 0$ ($b > a$) smenom $x + b = -(b-a)\sinh^2 t$ sledi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = -2\int dt = -2t + C = -2\ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}\right) + C. \blacktriangleright$$

74. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx$.

◀ Pretpostavljajući da je $b > a$, $x+a > 0$, $x+b > 0$ smenom $x+a = (b-a)\sinh^2 t$ sledi

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}dx = \frac{(b-a)^2}{4}(\cosh 4t - 1)\, dt$$

$$\text{i } \int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx = \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{\sinh 4t}{4} - t\right) + C.$$

Pošto je

$$t = \ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right) - \ln\sqrt{b-a}, \quad \sinh 4t = \frac{4(2x+b+a)}{(b-a)^2}\sqrt{(x+a)(x+b)},$$

$$\text{to je } I(x) = \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right) + C.$$

Ako je $x+a < 0$, $x+b < 0$ ($b > a$) smenom $x+b = -(b-a)\sinh^2 t$, sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx = -\frac{(b-a)^2}{4}\int (\cosh 4t - 1)dt \\ &= -\frac{(b-a)^2}{16}\sinh 4t + \frac{(b-a)^2}{4}t + C \\ &= \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}\right) + C. \end{aligned}$$

Parcijalim integraljenjem naći sledeće integrale:

75. $\int x^2 \arccos x dx$.

◀

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^2 \arccos x dx = \int \arccos x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^3}{3}\cdot \arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 d\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\ &= \frac{x^3}{3}\cdot \arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int \sqrt{1-x^2}d\left(x^2\right) \\ &= \frac{x^3}{3}\cdot \arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C \quad (|x| \le 1). \end{aligned}$$ ▶

76. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

◀
$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = \int \arcsin x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$(x \neq 0; |x| < 1)$. Poslednji integral se nalazi na sledeći način:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} = \int \frac{sgn x d(|x|)}{sgn x \cdot |x|^2 \sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2-1}} \\ &= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2-1}} = -\ln\left|\frac{1}{|x|} + \sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C. \end{aligned}$$

Konačno je

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C. \ ▶$$

77. $\int \arctan\sqrt{x}dx$.

◀ Parcijalnim integraljenjem sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \arctan\sqrt{x}dx = x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}dx \\ &= x\arctan\sqrt{x} - \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\right)dx \\ &= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int \frac{d(\sqrt{x})}{1+x} \\ &= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C \ (x \geq 0). \ ▶ \end{aligned}$$

Naći integrale :

78. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

◀ Parcijalnim integraljenjem se dobija

$$\begin{aligned} I(x) &= \int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C \ (|x| \leq 1). \ ▶ \end{aligned}$$

79. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

◀ Parcijalnim integraljenjem je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\left(\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= \sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int dx \\ &= \sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - x + C. \end{aligned}$$ ▶

80. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

◀ Posle očiglednih transformacija i parcijalnim integraljenjem imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx \\ &= \frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x}{2}d\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} \\ &= \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$ ▶

81. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx.$

◀ Parcijalnim integraljenjem sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Iz dobijene jednakosti se dobija:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ (a \neq 0).$$ ▶

82. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx.$

◄ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx = \int xd\left(\frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{x}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}dx + C \\ &= \frac{x}{4}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{4}\int \sqrt{a^2+x^2}dx + C. \end{aligned}$$

Nađimo integral $I_1(x) = \int \sqrt{a^2+x^2}dx$.

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int \sqrt{a^2+x^2}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx \\ &= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx \\ &= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}dx + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C; \end{aligned}$$

Odavde je

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C,$$

tako da konačno imamo

$$I(x) = \frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C. \text{ ►}$$

83. $\int x\sin\sqrt{x}dx$.
◄ Zbog $xdx = 2(\sqrt{x})^3d(\sqrt{x})$ imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x\sin\sqrt{x}dx = 2\int (\sqrt{x})^3\sin\sqrt{x}d(\sqrt{x}) = -2\int (\sqrt{x})^3d(\cos\sqrt{x}) \\ &= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6\int x\cos\sqrt{x}d(\sqrt{x}) \\ &= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6\int xd(\sin\sqrt{x}) \\ &= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} - 12\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}d(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\int \sqrt{x}d(\cos\sqrt{x}) \\ &= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + C \\ &= 2\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x} + 6(x-2)\sin\sqrt{x} + C \ (x \geq 0). \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

84. $I = \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$
◀ Parcijalnim integraljenjem sledi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} d\left(e^{\arctan x}\right) = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx \\ &= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{d(e^{\arctan x})}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - I. \end{aligned}$$

Odavde je

$$I = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + C. \ \blacktriangleright$$

85. $I_1 = \int \sin(\ln x)dx$, $I_2 = \int \cos(\ln x)dx.$
◀ Imamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx; \\ I_2 &= \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx, \end{aligned}$$

odavde je

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C; \\ I_2 &= \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

86. $I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx$, $I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx.$
◀ Očigledno je

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a}\int \cos bx \cdot d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{a}\int \sin bx\cdot d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I_1; \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema dobijamo

$$I_1 = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C; \ I_2 = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C. \ ▶$$

87. $\int e^{2x}\sin^2 x dx$.
◀ Koristeći prethodni primer, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^{2x}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}dx - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx \\ &= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) + C. \ ▶ \end{aligned}$$

88. $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$.
◀ Polazeći od toga da je $\frac{dx}{e^x} = -d(e^{-x})$, imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx = -\int \arctan e^x d(e^{-x}) \\ &= -e^{-x}\arctan e^x + \int \frac{d(e^x)}{e^x(1+e^{2x})} \\ &= -e^{-x}\arctan e^x + \int\left(\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)d(e^x) \\ &= -e^{-x}\arctan e^x + x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C. \ ▶ \end{aligned}$$

89. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$.
◀ Parcijalnim integraljenjem je

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx = -\int \ln(\sin x)d(\cot x) = -\cot x\ln(\sin x) + \int \cot^2 x dx.$$

Koristeći primer 45, dobijamo

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx = -\cot x\cdot(\ln(\sin x)+1) - x + C \ (2k\pi < x < \pi + 2k\pi). \ ▶$$

Nalaženje integrala koji slede bazira na kanonskom obliku kvadratnog trinoma i sledećim formulama:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ (a \neq 0)$.

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$
III. $\int \frac{xdx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C.$
IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C\ (a>0).$
VI. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \pm\sqrt{a^2\pm x^2} + C.$
VII. $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2\pm x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C\ (\ a>0\ ).$
VIII. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C.$

Naći integrale:

90. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}.$
◀ Za $x \neq -\frac{1}{3}$; $x \neq 1$ sledi:

$$\int \frac{dx}{3x^2-2x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + C \ ▶$$

91. $\int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1}.$
◀ Očigledno je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2-2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right| + C \quad \left(x \neq \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}\right). \ ▶ \end{aligned}$$

92. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx.$
◀ Koristeći razlaganje, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \ ▶ \end{aligned}$$

93. $\int \frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$
◀ Posle očiglednih transformacija za $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ imamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \int \frac{(x-\cos\alpha)+\cos\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1) + \cot\alpha\cdot\arctan\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha} + C. \ ▶ \end{aligned}$$

94. $\int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}$.

◀ Slično prethodnom primeru za $x \neq -1$, $x \neq \sqrt[3]{2}$ je:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} = \frac{1}{3} \int \frac{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6} \ln\left|x^6 - x^3 - 2\right| + \frac{1}{18} \ln\left|\frac{x^3 - 2}{x^3 + 1}\right| + C \\ &= \frac{1}{9} \ln\left(\left|x^3 + 1\right| \cdot \left|x^3 - 2\right|^2\right) + C \quad ▶ \end{aligned}$$

95. $I = \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$.

◀ Polazeći od jednakosti $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$, dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{d(\tan x)}{\left(\tan x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x}\right| + C \\ (x &\neq \frac{\pi}{4} + k\pi, x \neq \arctan\frac{5}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}). \quad ▶ \end{aligned}$$

96. $I = \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1 + 4\cos^2\frac{x}{2}} = 2\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)^2 + 4} \\ &= \arctan\frac{\tan\frac{x}{2} + 1}{2} + C_n, \end{aligned}$$

$2\pi n - \pi < x < 2\pi n$. Iz neprekidnosti primitivne funkcije, sledi

$$\begin{aligned} I(\pi + 2\pi n - 0) &= I(\pi + 2\pi n + 0),\ n \in \mathbb{Z}; \\ \frac{\pi}{2} + C_n &= -\frac{\pi}{2} + C_{n+1}, C_{n+1} = \pi + C_n. \end{aligned}$$

Odavde se dobija $C_n = n\pi + C$, $C = C_0$ proizvoljna konstanta. Pošto je $2\pi n - \pi < x < \pi + 2\pi n$, tj. $n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n + 1$, to je $n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$. Zato je

$$\begin{aligned} I(x) &= \arctan\frac{\tan\frac{x}{2} + 1}{2} + \pi\left[\frac{x + \pi}{2\pi}\right] + C\ (x \neq \pi + 2n\pi), \\ I(\pi + 2n\pi) &= \lim_{x \to \pi + 2n\pi} I(x)\ (n \in \mathbb{Z}). \quad ▶ \end{aligned}$$

97. Dokazati da ako je $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, to je za $a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right) + C$$

$$\text{i } \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, \text{ za } a < 0.$$

◀ Za $a > 0$ imamo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{y}} &= \int \frac{\sqrt{a}dx}{\sqrt{a^2x^2 + bax + ca}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(ax + \frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|ax + \frac{b}{2} + \sqrt{a^2x^2 + bax + ca}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right| + C. \end{aligned}$$

Neka je $a < 0$ i $b^2 - 4ac > 0$, tada je

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-a}} \sqrt{b^2 - 4ac - (ax + b)^2}. \end{aligned}$$

Sledi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{-a}}{a} \int \frac{d\,(2ax + b)}{\sqrt{b^2 - 4ac - (ax + b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \ ▶$$

98. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

◀ Za $\frac{1-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ je

$$\frac{xdx}{\sqrt{5 + x - x^2}} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\sqrt{5 + x - x^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}};$$

$$\text{te je } \int \frac{xdx}{\sqrt{5 + x - x^2}} = -\sqrt{5 + x - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{21}} + C. \ ▶$$

99. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

◀ Za $|x| > \sqrt{1+\sqrt{2}}$ imamo

$$\begin{aligned} f(x)\,dx &= \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{x^2d\left(x^2\right)}{2\sqrt{(x^2-1)^2-4}} \\ &= \frac{(x^2-1)d(x^2-1)}{2\sqrt{(x^2-1)^2-4}} + \frac{1}{2}\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-4}}. \end{aligned}$$

Onda je $I(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right| + C.$ ▶

100. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

◀ Podintegralna funkcija je realna za $|x+1| > \sqrt{6}$. Tada imamo

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = \int \frac{dx}{(x+2)^2\,|x+2|\,\sqrt{1-\frac{2}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}}}.$$

Neka je $\frac{1}{|x+2|} = t$, tada je

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} &= t sgn(x+2);\ dt = \frac{dx}{(x+2)^2} sgn(x+2), \\ \frac{dx}{(x+2)^2} &= \frac{dt}{sgn(x+2)} = sgn(x+2)dt. \end{aligned}$$

Primenjujući zatim rezultat primera 97, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = sgn(x+2)\int \frac{tdt}{\sqrt{1-2tsgn(x+2)-5t^2}} \\ &= -\frac{sgn(x+2)}{5}\int \frac{(-10t-2sgn(x+2))dt}{2\sqrt{1-2tsgn(x+2)-5t^2}} + \frac{1}{5}\frac{dt}{\sqrt{1-2tsgn(x+2)-5t^2}} \\ &= \frac{sgn(x+2)}{5}\sqrt{1-2tsgn(x+2)-5t^2} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{10t+2sgn(x+2)}{\sqrt{24}} \\ &= \frac{sgn(x+2)}{5}\sqrt{1-\frac{2}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{\frac{5}{|x+2|}+sgn(x+2)}{\sqrt{6}} + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}\,|x+2|} + C. \end{aligned}$$ ▶

101. $\int \sqrt{2+x-x^2}dx$.

◀ Za $-1 \le x \le 2$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \sqrt{2+x-x^2}dx = \int \sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C. \blacktriangleright
\end{aligned}
$$

102. $I=\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

◀ Za $\left|x-\frac{1}{5}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x\neq 0$ sledi

$$
I=\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}+\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.
$$

U prvom integralu uzmimo $\frac{1}{|x|}=t$. Dobijamo

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+tsgnx-1}} \\
&= -\ln\left|t+\frac{sgnx}{2}+\sqrt{t^2+tsgnx-1}\right| \\
&= -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|.
\end{aligned}
$$

Drugi integral izračunavamo neposredno

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{1+x-x^2}} \\
&= -\int \frac{(-2x+1)dx}{2\sqrt{1+x-x^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= -\sqrt{1+x-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Konačno imamo

$$
I(x)=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right|-\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C. \blacktriangleright
$$

103. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx.$

◀ Za $x\neq 0$, nalazimo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = sgnx \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx = sgnx \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}} \\ &= sgnx \cdot \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right| + C = sgnx \cdot \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C \end{aligned}$$

3.2 Integraljenje racionalnih funkcija

Primenom metode neodređenih koeficijenata izračunati sledeće integrale:

104. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

◀ Imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x)+(5x^2-6x+1)}{x^3-5x^2+6x} \\ &= 1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}. \end{aligned}$$

Nepoznate A, B i C nalazimo iz identičnosti

$$5x^2-6x+1 = A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2).$$

Za $x=0$ je $1=6A$, tj. $A=\frac{1}{6}$. Ako je $x=2$ imamo $9=-2B$, odnosno $B=-\frac{2}{9}$. I na kraju za $x=3$ dobijamo $C=\frac{28}{3}$. Sada je

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C. \quad ▶$$

105. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx.$

◀ Izdvajajući celi deo imamo

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}.$$

Uzimajući u obzir da je $x^4+5x^2+4=(x^2+1)(x^2+4)$, dobijamo za drugi sabirak

$$\frac{-5x^2-4}{x^4+5x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Posle svođenja na najmanji sadržalac i sređivanja sledi

$$-5x^2 - 4 \equiv (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene leve i desne strane imamo:

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0 = A + C; \\ x^2 & -5 = B + D; \\ x & 0 = 4A + C; \\ x^0 & -4 = 4B + D. \end{array}$$

Odavde se dobija $A = C = 0$; $B = \frac{1}{3}$; $D = -\frac{16}{3}$. Zamenjujući nađene koeficijente i integraljenjem dobijamo

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2} + C. \quad \blacktriangleright$$

106. $\int \frac{xdx}{x^3 - 3x + 2}$.

◀ Pošto su $x_{1,2} = 1$ i $x_3 = -2$ koreni imenioca podintegralne funkcije to je saglasno opštoj teoriji

$$\int \frac{xdx}{x^3 - 3x + 2} = A \int \frac{dx}{(x-1)^2} + B \int \frac{dx}{x-1} + C \int \frac{dx}{x+2}.$$

Diferenciranjem obeju strana i svođenjem na zajednički imenilac dobijamo

$$x \equiv A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2.$$

Uzimajući redom $1, -2, 0$ umesto x imamo $1 = 3A; -2 = 9C; 0 = 2A - 2B + C$, tj. $A = \frac{1}{3}$; $B = \frac{2}{9}$; $C = -\frac{2}{9}$. Dakle,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{xdx}{x^3 - 3x + 2} = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln |x-1| - \frac{2}{9} \ln |x+2| + C \\ &= -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \ (x \neq 1; \ x \neq -2). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

107. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+3)^3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{x+3}, \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} 1 \equiv\ & A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3(x+2) + \\ & +D((x+1)(x+2)^2 + E((x+1)(x+2)^2(x+3) \\ & +F(x+1)(x+2)^2(x+3)^2. \end{aligned}$$

Zamenjujući x redom sa $-1, -2, -3$, nalazimo da je $A = \frac{1}{8}$; $B = -1$; $D = -\frac{1}{2}$. Izjednačavanjem zatim koeficijenata uz x^5, x^4, x^3 dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C + F; \\ 0 &= 13A + B + 12C + E + 11F; \\ 0 &= 67A + 10B + 56C + D + 8E + 47F. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine je $F = -C - \frac{1}{8}$. Zamenjivanjem u drugu i treću dobijamo $C + E = \frac{3}{4}$; $9C + 8E = 8$. Odatle se dobija $C = 2$; $E = -\frac{5}{4}$; $F = -\frac{17}{8}$. Na kraju se dobija

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + 2\ln|x+2| + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^2} \\ &\quad + \frac{5}{4(x+3)} - \frac{17}{8}\ln|x+3| + C \\ &= \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C. \end{aligned}$$ ►

108. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

◄ Razlažući na proste razlomke podintegralnu funkciju

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} \\ &= \frac{\left((x-2)^2+1\right) - (x-2)^2}{(x-2)^2\left((x-2)^2+1\right)} \\ &= \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2+1} \end{aligned}$$

i integraljenjem, dobijamo

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = -\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2) + C \ (x \neq 2).$$ ►

109. $\int \frac{dx}{x(x+1)(1+x+x^2)}$.

◀ Saglasno opštoj teoriji, imamo

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(1+x+x^2)} = A\int \frac{dx}{x} + B\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Cx+D}{1+x+x^2}dx;$$

odavde je

$$1 \equiv A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + (Cx+D)(x+x^2).$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene dobijamo sistem za određivanje nepoznatih A, B, C i D :

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0 = A+B+C; \\ x^2 & 0 = 2A+B+D+C; \\ x & 0 = 2A+B+D; \\ x^0 & 1 = A, \end{array}$$

čije je rešenje $A = 1$; $B = -1; C = 0$; $D = -1$; Tako je

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(1+x+x^2)} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$(x \neq 1; x \neq 0)$, jer je

$$\int \frac{dx}{1+x+x^2} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \ ▶$$

110. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

◀ Pošto je $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, to je

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = A\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Bx+C}{x^2-x+1}dx.$$

Slično prethodnom primeru dobijamo sistem:

$$\begin{array}{ll} x^2 & 0 = A+B; \\ x & 0 = -A+B+C; \\ x^0 & 1 = A+C. \end{array}$$

Odavde je $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$. Na taj način je za $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

111. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.
◀ Imamo

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = A\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{Bx+C}{x^2+x+1}dx,$$

odakle dobijamo

$$x \equiv A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1);$$

tj. sistem

$$\begin{aligned}
x^2 \quad & 0 = A+B; \\
x \quad & 1 = A-B+C; \\
x^0 \quad & 0 = A-C.
\end{aligned}$$

čije je rešenje : $A=\frac{1}{3}; B=-\frac{1}{3}; C=\frac{1}{3}$. Sledi,

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \ (x \neq 1). \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

112. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.
◀ Razlaganje lako dobijamo prema elementarnim transformacijama :

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)},$$

odakle sledi:

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C \ (x \neq \pm 1). \blacktriangleright$$

113. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

◀ Pošto je

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = \left(x^2 + x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2 - x\sqrt{2}+1\right),$$

$$\text{to je } \frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Iz identiteta

$$1 \equiv (Ax+B)\left(x^2 - x\sqrt{2}+1\right) + (Cx+D)\left(x^2 + x\sqrt{2}+1\right)$$

dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rc} x^3 & 0 = A + C; \\ x^2 & 0 = -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D; \\ x & 0 = A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D; \\ x^0 & 1 = B + D. \end{array}$$

čija su rešenja $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}; B = D = \frac{1}{2}$. Znači,

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\ &\quad -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right) + \arctan\left(x\sqrt{2}-1\right)\right) + \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir formulu za sabiranje arkustangensa (primer 370) konačno dobijamo

$$I(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctan} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \varepsilon(x) + C,$$

$$\text{gde je } \varepsilon(x) = \begin{cases} +1, & x > 1; \\ 0, & |x| < 1; \\ -1, & x < -1; \end{cases}$$

$$I(1) = \lim_{x \to 1} I(x), \; I(-1) = \lim_{x \to -1} I(x). \;\blacktriangleright$$

114. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.
◀ Pošto je

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

to podintegralnu funkciju tražimo u obliku

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}.$$

Iz jednakosti

$$1 \equiv (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$$

dobijamo sistem

$$\begin{array}{lr} x^3 & 0 = A + C; \\ x^2 & 0 = -A + B + C + D; \\ x & 0 = A - B + C + D; \\ x^0 & 1 = B + D. \end{array}$$

čije su rešenja $A = B = -C = D = \frac{1}{2}$. Dakle,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctan} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctan} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

Kako je (primer 370)

$$\operatorname{arctan} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctan} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctan} \frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2} + \pi \varepsilon(x),$$

gde je $\varepsilon(x)$ definisana u prethodnom primeru, a vrednost arkustangensa u desnom delu jednakosti u tačkama ± 1 jednaka je limesu u tim tačkama. Konačno imamo

$$I(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\varepsilon(x) + C. \ \blacktriangleright$$

115. $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

◀ Najpre transformišemo podintegralnu funkciju

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^6+1} &= \frac{(x^4+1)+(1-x^4)}{2(x^6+1)} = \frac{x^4+1}{2(x^6+1)} + \frac{1-x^4}{2(x^6+1)}\\ &= \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^6+1)} - \frac{x^2-1}{2(x^4-x^2+1)}.\end{aligned}$$

Prva dva sabirka se lako integrišu. Nađimo razlaganje jedino poslednjeg sabirka. Imamo

$$\begin{aligned}\frac{-x^2+1}{2(x^4-x^2+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1};\\ -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} &\equiv (Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{3}x+1);\end{aligned}$$

tj. sistem

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0 = A + C;\\ x^2 & -\frac{1}{2} = -\sqrt{3}A + B + \sqrt{3}C + D;\\ x & 0 = A - \sqrt{3}B + C + \sqrt{3}D;\\ x^0 & \frac{1}{2} = B + D.\end{array}$$

čija su rešenja $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$; $B = D = \frac{1}{4}$; Zato je

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^6+1} &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(1+x^6)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\\ &\quad -\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\end{aligned}$$

Integraleći ovu jednakost dobijamo

$$\int \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{6}\arctan x^3 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + C. \blacktriangleright$$

116. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

◀ Pošto je

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 &= (x-1)(x^4+x^2+1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1), \end{aligned}$$

to razlaganje podintegralne funkcije na proste razlomke ima oblik

$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$

Iz jednakosti

$$1 \equiv A(x^4+x^2+1) + (Bx+C)(x-1)(x^2-x+1) + (Dx+E)(x^3-1)$$

dobijamo sistem

$$\begin{array}{ll} x^4 & 0 = A+B+D; \\ x^3 & 0 = -2B+C+E; \\ x^2 & 0 = A+2B-2C; \\ x & 0 = -B+2C-D; \\ x^0 & 1 = A-C-E \end{array}$$

čija su rešenja $A = -B = \frac{1}{3}$; $C = -\frac{1}{6}$; $D = 0$; $E = -\frac{1}{2}$. Na taj način je

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \ (x \neq 1). \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

117. Pod kojim uslovima integral $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ predstavlja racionalnu funkciju?

◀ Dati integral predstavlja racionalnu funkciju ako su u razlaganju

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{E}{(x-1)^2} + \frac{F}{x-1}$$

koeficijenti D i F jednaki nuli. Pretpostavljajući da je tako imamo

$$ax^2 + bx + c \equiv A(x^2 - 2x + 1) + B(x^3 - 2x^2 + x) + Ex^3.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene imamo sistem

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0 = B + E; \\ x^2 & a = A - 2B; \\ x & b = -2A + B; \\ x^0 & c = A. \end{array}$$

Eliminacijom tri nepoznate A, B i E iz četiri jednačine sistema, dobijamo traženi uslov: $a + 2b + 3c = 0$. ▶

Primenom metoda Ostrogradskog naći integrale:

118. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

◀ Saglasno opštoj teoriji imamo

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x+1)^2} + D\int \frac{dx}{x-1} + E\int \frac{dx}{x+1}.$$

Diferenciranjem obe strane jednakosti, nalazimo

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{(x^2-1)(2Ax+B) - (3x-1)(Ax^2+Bx+C)}{(x-1)^2(x+1)^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}.$$

Odavde se na uobičajen način dolazi do jednakosti:

$$x \equiv -Ax^3 + (A - 2B)x^2 + (-2A + B - 3C)x + C - B$$

$$+D(x-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + E(x^4 - 2x^2 + 1).$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene imamo sistem

$$\begin{array}{ll} x^4 & 0 = D + E; \\ x^3 & 0 = -A + 2D; \\ x^2 & 0 = A - 2B - 2E; \\ x & 1 = -2A + B - 3C - 2D; \\ x^0 & 0 = C - B - D + E. \end{array}$$

čija su rešenja $A = B = -\frac{1}{8}; C = -\frac{1}{4}; D = -E = -\frac{1}{16}$. Sledi, za $x \neq \pm 1$ imamo:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C. ▶$$

119. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

◀ Imamo

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + D \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1} dx,$$

odakle se diferenciranjem i svođenjem na zajednički imenilac dobija

$$\begin{aligned} 1 &\equiv -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) \\ &+(Ex+F)(x^4+x^3+x+1), \end{aligned}$$

tj. imamo sistem

$$\begin{array}{cc} x^5 & 0 = D + E; \\ x^4 & 0 = -A - D + E + F; \\ x^3 & 0 = -2B + D + F; \\ x^2 & 0 = -3C + D + E; \\ x & 0 = 2A - D + E + F; \\ x^0 & 1 = B + D + F. \end{array}$$

za određivanje koeficijenata A, B, C, D, E i F. Rešavanjem sistema sledi

$$A = C = 0; B = \frac{1}{3}; D = -E = \frac{2}{9}; F = \frac{4}{9}.$$

Znači

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$(x \neq -1)$. ▶

120. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

◀ Imamo

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} dx,$$

odakle se diferenciranjem i svođenjem na zajednički imenilac dobija

$$x^2 \equiv A(x^2+2x+2) - (Ax+B)(2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2).$$

Za određivanje nepoznatih koeficijenata imamo sistem

$$\begin{array}{rr} x^3 & 0 = C; \\ x^2 & 1 = -A + 2C + D; \\ x & 0 = -2B + 2C + 2D; \\ x^0 & 0 = 2A - 2B + 2D. \end{array}$$

čija su rešenja $A = 0$; $B = 1$; $C = 0$; $D = 1$; te je

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) + C. \ \blacktriangleright$$

121. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.
◀ Imamo

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2++Cx+H}{x^4+1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+D}{x^4+1}$$

odakle je

$$\begin{aligned} 1 \equiv\ & (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1) - 4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D) \\ & +(x^4+1)(Ex^3+Fx^2+Gx+H); \end{aligned}$$

tj. sledi sistem

$$\begin{array}{rrrr} x^7 & 0 = E; & x^3 & 0 = -4D + E; \\ x^6 & 0 = -A + F; & x^2 & 0 = 3A + F; \\ x^5 & 0 = -2B + G; & x & 0 = 2B + G; \\ x^4 & 0 = -3C + H; & x^0 & 1 = C + H. \end{array}$$

Rešavanjem sistema dobija se $A = B = D = E = F = G = 0$; $C = \frac{1}{4}$; $H = \frac{3}{4}$. Sledi

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^4+1}.$$

Koristeći rezultat primera 113, konačno imamo

$$I(x) = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\varepsilon(x) + C,$$

gde je $\varepsilon(x)$ ista kao u navedenom primeru 113. ▶

122. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

◀ Primenom metoda Ostrogradskog dati integral predstavimo u obliku

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^4-1)^2} + \\ + \int \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{x^4-1}$$

odakle se diferenciranjem i oslobađanjem razlomka dobija identičnost:

$$1 \equiv (x^4-1)(7Ax^6+6Bx^5+5Cx^4+4Dx^3+3Ex^2+2Fx+G) -$$

$$-8x^3(Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H) +$$

$$+(x^8-2x^4+1)(Kx^3+Lx^2+Mx+N).$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene obeju strana jednakost dobijamo sistem

x^{11}	$0 = K;$	x^5	$0 = -6B - 6F - 2M;$
x^{10}	$0 = -A + L;$	x^4	$0 = -5C - 7G - 2N$
x^9	$0 = -2B + M;$	x^3	$0 = -4D - 8H - +K;$
x^8	$0 = -3C + N;$	x^2	$0 = -3E + L;$
x^7	$0 = -4D - 2K;$	x^1	$0 = -2F + M$
x^6	$0 = -7A - 5E - 2L;$	x^0	$1 = -G + N;$

čija su rešenja: $A = B = D = E = F = H = K = L = M = 0$, $C = \frac{7}{32}$, $G = -\frac{11}{32}$. $N = \frac{21}{32}$. Koristeći sada rešenje primera 112, konačno dobijamo

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21}{64}\arctan x + C. \ ▶$$

Izdvojiti algebarski deo sledećih integrala:

123. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$.

◀ Imamo

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+x^2+1}dx,$$

odakle dobijamo identičnost:

$$\begin{aligned} x^2+1 &= (x^4+x^2+1)(3Ax^2+2Bx+C)-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D) \\ &+(x^4+x^2+1)(Ex^3+Fx^2+Gx+H). \end{aligned}$$

Iz sistema jednačina

$$\begin{array}{lll} x^7 & 0=E; & x^3 \quad 0=-4D+G+E; \\ x^6 & 0=-A+F; & x^2 \quad 1=3A-C+H+F; \\ x^5 & 0=-2B+G+E; & x \quad 0=2B-2D+G; \\ x^4 & 0= & x^0 \quad 1=C+H \end{array}$$

nalazimo da je $A=\frac{1}{6}$, $B=D=G=0$, $C=\frac{1}{3}$, $F=\frac{1}{6}, H=\frac{2}{3}$. Znači, racionalni deo je

$$\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}. \blacktriangleright$$

124. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx.$

◀ Razlaganje tražimo u obliku

$$I(x)=\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}+\int\frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Kx+L}{x^5+x+1}dx$$

odakle dobijamo identičnost

$$\begin{aligned} 4x^5-1 &= (x^5+x+1)(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)- \\ &-(5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)+ \\ &+(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Kx+L)(x^5+x+1); \end{aligned}$$

iz koje sledi sistem

$$\begin{array}{lll} x^9 & 0=F; & x^4 \quad 0=3A-5E+G+F; \\ x^8 & 0=-A+G; & x^3 \quad 0=4A+2B+G+H; \\ x^7 & 0=-2B+H; & x^2 \quad 0=3B+C+K+H; \\ x^6 & 0=-3C+K; & x \quad 0=2C+L+K; \\ x^5 & 4=-4D+L+F; & x^0 \quad -1=D-E+L, \end{array}$$

čija su rešenja $A=B=C=E=F=G=H=K=L=0$, $D=-1$. Dakle, racionalni deo integrala je

$$\frac{-x}{x^5+x+1}. \blacktriangleright$$

125. Naći integral

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

◀ Pošto je

$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2,$$

onda razlaganje ima oblik

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx,$$

odakle je

$$1=A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(x^2+x+1)(Cx+D);$$

Sistem glasi

$$\begin{array}{llll} x^3 & 0=C; & x & 0=D-2B+C; \\ x^2 & 0=-A+D+C; & x^0 & 1=A-B+D; \end{array}$$

njegova rešenja su: $A=D=\frac{2}{3}$; $B=\frac{1}{3}$; $C=0$, sledi

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C. \ ▶$$

Primenom različitih načina, naći sledeće integrale:

126. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$.

◀ Po Tejlorovoj formuli je

$$x^3=1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3,$$

zato je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx=\int \frac{1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}{(x-1)^{100}} \\ &= \int \frac{dx}{(x-1)^{100}}+3\int \frac{dx}{(x-1)^{99}}+3\int \frac{dx}{(x-1)^{98}}+\int \frac{dx}{(x-1)^{97}} \\ &= -\frac{1}{99(x-1)^{99}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{1}{96(x-1)^{96}}+C\ (x\neq 1). \end{aligned}$$

127. $\int \frac{x\,dx}{x^8-1}$.

◀ Na osnovu elementarnih transformacija imamo

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{x^8-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^8-1} = \frac{1}{4}\int \frac{(x^4+1)-(x^4-1)}{(x^4+1)(x^4-1)}d(x^2)\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2)}{x^4-1} - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2)}{x^4+1}\\ &= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}\arctan x^2 + C \ (x \neq \pm 1).\end{aligned}$$ ▶

128. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx.$

◀ Imamo

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^6+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^6+1}.$$

Koristeći primer 110, konačno imamo

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx = \frac{1}{3}\arctan x^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + C.$$ ▶

129. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx.$

◀ Smenom $x^4 = t$, nalazimo

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(t-3)dt}{t(t+1)(t+2)}.$$

Razlaganje funkcije na proste razlomke ima oblik

$$\frac{(t-3)}{t(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+2},$$

odakle sledi

$$t-3 = A(t+1)(t+2) + B(t+2)t + C(t+2)t$$

Uzimajući redom $t = 0, -1, -2$, dobijamo

$$A = -\frac{3}{2};\ B = 4;\ C = -\frac{5}{2}.$$

Na taj način je,

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx = -\frac{3}{8}\ln|t| + \ln|t+1| - \frac{5}{8}\ln|t+2| + C\\ &= -\frac{3}{8}\ln x^4 + \ln(x^4+1) - \frac{5}{8}\ln(x^4+2) + C \ (x \neq 0).\end{aligned}$$ ▶

130. $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2}$.

◄ Smenom $x^5 = t$, dobijamo

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{(t^2-10)^2}.$$

Polazeći od jednakosti

$$1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\left(\left(t+\sqrt{10}\right) - \left(t-\sqrt{10}\right)\right)\right)^2$$

nalazimo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2} = \frac{1}{200}\int\left(\frac{1}{\left(t-\sqrt{10}\right)^2} - \frac{2}{t^2-10} + \frac{1}{\left(t+\sqrt{10}\right)^2}\right)dt \\ &= \frac{1}{200}\left(-\frac{1}{t-\sqrt{10}} - \frac{1}{t+\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}}\right|\right) + C \\ &= -\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10} + \frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right) + C \ (x \neq \pm\sqrt[10]{10}). \ ► \end{aligned}$$

131. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$.

◄ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \frac{1}{n}\int\frac{x^n d(x^n)}{x^n+1} = \frac{1}{n}\int\frac{(x^n+1)-1}{x^n+1}d(x^n) \\ &= \frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{x^n+1}\right)d(x^n) = \frac{1}{n}\left(x^n - \ln|x^n+1|\right) + C, \end{aligned}$$

gde je $-\infty < x < +\infty$ za parne prirodne brojeve i $x \neq -1$ za neparne brojeve. Za $n = 0$, imamo da je $x \neq 0$. ►

132. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$.

◄ Smenom $x^n = t$, a zatim parcijalnim integraljenjem imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx = \frac{1}{n}\int\frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2n}\int t\,d\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = -\frac{1}{2n}\left(\frac{t}{t^2+1} - \int\frac{dt}{t^2+1}\right) \\ &= -\frac{1}{2n}\left(\frac{t}{t^2+1} - \arctan t\right) + C = -\frac{1}{2n}\left(\frac{x^n}{x^{2n}+1} - \arctan x^n\right) + C. \ ► \end{aligned}$$

133. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

◀ Množenjem brojioca i imenioca sa x^4 imamo

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{x^5(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x^5(x^{10}+1)^2} d(x^5) \\
&= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{x^5(x^{10}+1)} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right) d(x^5) \\
&= \frac{1}{5}\int \left(\frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x^5(x^{10}+1)} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right) d(x^5) \\
&= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{x^5}{x^{10}+1} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right) d(x^5) \\
&= \frac{1}{5}\ln|x^5| - \frac{1}{10}\ln(x^{10}+1) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C \\
&= \frac{1}{10}\left(\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1} + \frac{1}{x^{10}+1}\right) + C \ (x \neq 0).
\end{aligned}$$ ▶

134. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx$.

◀ Smenom $x^7 = t$, dobijamo

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx = \frac{1}{7}\int \frac{1-t}{t(1+t)} dt = \frac{1}{7}\int \frac{(1+t)-2t}{t(1+t)} dt \\
&= \frac{1}{7}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}\right) dt + = \frac{1}{7}(\ln|t| - 2\ln|1+t|) + C \\
&= \frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2} + C \ (x \neq 0; -1).
\end{aligned}$$ ▶

135. $\int \frac{(x^4-1)dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}$.

◀ Prema identičkoj transformaciji $(x^5-5x+1)-(x^5-5x) \equiv 1$, imamo

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{(x^4-1)dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} = \int \frac{((x^5-5x+1)-(x^5-5x))(x^4-1)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)} dx \\
&= \int \left(\frac{x^4-1}{x^5-5x} - \frac{x^4-1}{x^5-5x+1}\right) dx = \frac{1}{5}(\ln|x^5-5x| - \ln|x^5-5x+1|) + C \\
&= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right| + C \ (x \neq 0; \pm\sqrt[4]{5}; \alpha,
\end{aligned}$$

gde je α koren jednačine $\alpha^5 - 5\alpha + 1 = 0$). ▶

136. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx$.

◀ Za $x \neq 0$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \begin{cases} C_1, & x>0; \\ C_2, & x<0. \end{cases} \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir neprekidnost primitivne funkcije imamo $\Phi(-0) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + C_2 = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + C_1 = \Phi(+0)$, gde je Φ primitivna funkcija podintegralne funkcije. Dakle,

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} sgn x + C, & x \neq 0; \\ C, & x=0. \end{cases}$$ ▶

137. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1} dx$.

◀ Posle očiglednih transformacija imamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x^2+\left(1-\sqrt{5}\right)x+2}{2x^2+\left(1+\sqrt{5}\right)x+2} + C. \end{aligned}$$ ▶

138. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1} dx$.

◀ Slično prethodnom primeru imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^5-x}{x^8+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^4-1}{x^8+1} d(x^2) = \frac{1}{2} \int \frac{1-\frac{1}{x^4}}{x^4+\frac{1}{x^4}} d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1} + C. \end{aligned}$$ ▶

139. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$.

◀ Transformacijom sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{(x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x^2 dx}{x^6+1} \\ &= \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{d(x^3)}{x^6+1} = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C. \end{aligned}$$ ▶

140. Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (a \neq 0).$$

Polazeći od dobijene formule naći integral

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

◀ Na osnovu jednakosti

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} \left((2ax + b)^2 + (4ac - b^2) \right)$$

i smene $2ax + b = t$, imamo

$$I_n = \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n},$$

gde je $\Delta = 4ac - b^2$. Parcijalim integraljenjem dobijamo

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \frac{(4a)^{n-1}}{2a} \left(\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} - 2(1-n) \int \frac{t^2 + \Delta - \Delta}{(t^2+\Delta)^n} dt \right) \\ &= \frac{(4a)^{n-1} t}{2a(t^2+\Delta)^{n-1}} - \frac{(4a)^{n-1}(1-n)}{a} \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^{n-1}} \\ &\quad + (1-n) \frac{(4a)^{n-1}}{a} \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}, \end{aligned}$$

$$\text{tj. } I_{n-1} \frac{(4a)^{n-1} t}{2a(t^2+\Delta)^{n-1}} - 2(1-n) I_{n-1} + \frac{2(1-n)\,\Delta}{4a} I_n.$$

Rešavanjem poslednje jednakosti po I_n dobijamo

$$I_n = -\frac{(4a)^{n-1} t}{\Delta\,(1-n)(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{(3-2n)2a}{(1-n)\,\Delta} I_{n-1}$$

Zamenjujući sada t svojom vrednošću konačno je

$$I_n = \frac{2ax+b}{(n-1)\,\triangle\,(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1}\frac{2a}{\triangle}I_{n-1}$$

U datom primeru je $a=b=c=1$; $n=3$; $\triangle=4$. Na taj način je

$$\begin{aligned} I_3(x) &= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$ ▶

141. U integralu

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n} \quad (x \neq -a;\ x \neq -b)$$

uvesti smenu $t = \frac{x+a}{x+b}$ $(m,n \in \mathbb{N})$, a zatim naći integral $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^2}$, $x \neq 2$, $x \neq -3$.

◀ Ako je $t = \frac{x+a}{x+b}$, to je $dt = \frac{b-a}{(x+b)^2}dx$; $\frac{1}{x+b} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{x+b} = \frac{1}{b-a}\left(1-\frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1-t}{b-a}$ i onda je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m\cdot(x+b)^{n+m-2}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2} \\ &= \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}}\cdot\frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m}dt, \end{aligned}$$

$$\text{tj. } I = \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}}\int\frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m}dt$$

U predloženom primeru je $a=-2$, $b=3$; $m=2$; $n=3$; $t=\frac{x-2}{x+3}$. Na taj način je

$$I(x) = \frac{1}{625}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}dt = \frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t} - 3\ln|t| + 3t - \frac{t^2}{2}\right) + C.$$ ▶

142. Izračunati integral

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx,$$

ako je $P_n(x)$ polinom stepena n promenljive x.

◄ Razlažući polinom $P_n(x)$ po stepenima $x-a$, dobijamo

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Sada je za $x\neq a$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx=\int\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k dx\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}\\ &= -\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|+C \end{aligned}$$ ►

143. Naći

$$\int\frac{dx}{1+x^{2n}},$$

ako je n ceo pozitivan broj.

◄ Imenilac ima korene

$$x_i=\cos\frac{\pi+2\pi j}{2n}+i\sin\frac{\pi+2\pi j}{2n},\ j=0,1,2,\dots,2n-1.$$

Neka je $j=k-1$. Tada su $x_k=\cos\frac{2k\pi-\pi}{2n}+i\sin\frac{2k\pi-\pi}{2n}$ i $\overline{x_k}=\cos\frac{2k\pi-\pi}{2n}-i\sin\frac{2k\pi-\pi}{2n}$ $(k=1,2,\dots,n)$ uzajamno konjugovani kompleksni brojevi. Sledi,

$$x^{2n}+1=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)(x-\overline{x}_k)=\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi-\pi}{2n}+1\right).$$

Razlaganje ima oblik

$$\frac{1}{x^{2n}+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_k}{x-x_k}+\frac{B_k}{x-\overline{x}_k}\right),$$

odakle sledi

$$1\equiv\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\frac{x^{2n}+1}{x-x_k}+B_k\frac{x^{2n}+1}{x-\overline{x}_k}\right).$$

Prelaskom na limes kad $x \to x_k$, dobijamo

$$A_k = \frac{1}{2nx_k^{2n-1}} \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(koristili smo to da je $\lim\limits_{x\to x_k} \frac{x^{2n}+1}{x-x_k} = 2nx_k^{2n-1}$, $\lim\limits_{x\to x_k} \frac{x^{2k}+1}{x-\overline{x}_k} = 0$). Analogno $B_k = \frac{1}{2n\overline{x}_k^{2n-1}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; zamenivanjem nađenih koeficijenata u razlaganju funkcije, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^{2n}+1} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_k}{x-x_k} + \frac{B_k}{x-\overline{x}_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x(A_k+B_k) - (A_k\overline{x}_k + B_k x_k)}{x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x\left(\frac{1}{2nx_k^{2n-1}} + \frac{1}{2n\overline{x}_k^{2n-1}}\right) - \left(\frac{\overline{x}_k}{2nx_k^{2n-1}} + \frac{x_k}{2nx_k^{2n-1}}\right)}{x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{x}{n}\cos\frac{(2k-1)(2n-1)}{2n}\pi - \frac{1}{n}\cos(2k-1)\pi}{x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1}{n(x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1)}.
\end{aligned}$$

Na taj način je

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sum_{k=1}^{n} \int \frac{-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1}{n(x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1)}\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int \frac{-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + \cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi - \cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi + 1}{n(x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1)}\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{2n} \int \frac{2x - 2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1}\,dx \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}{n} \int \frac{dx}{\left(x - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2 + \sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2n}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \cdot \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{n}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi \cdot \arctan\frac{x - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right) + C. \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

3.3 Integraljenje iracionalnih funkcija

Svođenjem podintegralne funkcije na racionalnu, rešiti sledeće integrale:

144. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx \ (x \neq -1)$.

◀ Smenom $x+2=t^3$, imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx = 3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt \\ &= 3\int \left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}\right)dt \\ &= \frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+\int \frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}dt \end{aligned}$$

Na poslednji integral primenićemo metod neodređenih koeficijenata:

$$\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t-2)} = \frac{A}{t-2}+\frac{Bt+C}{t^2+t+2}$$

odakle sledi identičnost

$$3t^2-6t \equiv A(t^2+t+2)+(Bt+C)(t-1);$$

$$\begin{aligned} &t^2 \quad 3 = A+B; \\ &t \quad -6 = A-B+C; \\ &t^0 \quad 0 = 2A-C; \end{aligned}$$

$$A=-\frac{3}{4};\ B=\frac{15}{4}; C=-\frac{3}{2};$$

Sada je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}dt = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t-1}+\frac{15}{4}\int \frac{t-\frac{2}{5}}{t^2+t+2}dt \\ &= -\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln|t^2+t+2|-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C. \end{aligned}$$

Konačno je

$$I(x)=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln|t^2+t+2|-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C. ▶$$

145. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \ (a>0)$.

◀ Primetimo da je

$$I(x) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}\,dx \quad (0 < x < a).$$

Smenom $\frac{x}{a-x} = t^4$ integral se svodi na integral racionalne funkcije:

$$I(t) = 4a \int \frac{t^4 dt}{(t^4+1)^2} = a \int t\,d\left(\frac{t^4}{1+t^4}\right) \quad (0 < t < +\infty).$$

Parcijalnim integraljenjem dobijamo:

$$\begin{aligned} I(t) &= a\frac{t^5}{1+t^4} - a\int \frac{t^4}{1+t^4}dt \\ &= \frac{at^5}{1+t^4} - at + a\int \frac{dt}{1+t^4} \\ &= -\frac{at}{1+t^4} + a\int \frac{dt}{1+t^4}. \end{aligned}$$

Poslednji integral nalazimo transformacijom podintegralne funkcije:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)+(1-t^2)}{1+t^4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt - \frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{1+t^4}dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{2-\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}. \end{aligned}$$

Konačno dobijamo

$$I(t) = -\frac{at}{1+t^4} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + C. \quad ▶$$

146. $\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$

◀ Primetimo da je

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}} \cdot (x-a)^2}.$$

Smenom $\frac{x-b}{x-a} = t^n$, $\frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{n}{b-a}t^{n-1}dt$ integral postaje

$$I(x) = \frac{n}{b-a}\int \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}}dt = \frac{n}{b-a}\int dt = \frac{n}{b-a}t + C = \frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C. \quad ▶$$

147. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

◀ Uzmimo smenu $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=u$, tj. $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$. Tada je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{u^3-u^2+u-1}{u^3}du \\ &= \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2u} + \frac{1}{4u^2} + C \\ &= \frac{u^2-1}{2u} - \frac{1}{2}\ln u + \frac{1}{4u^2} + C \\ &= \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x} + C, \ (x>0). \end{aligned}$$ ▶

148. Dokazati da je integral

$$\int R\left(x, (x-a)^{\frac{p}{n}} \cdot (x-b)^{\frac{q}{n}}\right) dx,$$

gde je R racionalna funkcija a p, q, n celi brojevi, elementarna funkcija, ako je $p+q=kn$, $k \in \mathbb{Z}$.

◀ Neka je $\frac{x-a}{x-b}=t^n$. Tada je $x=\frac{bt^n-a}{t^n-1}$; $dx=\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt$; $x-b=\frac{b-a}{t^n-1}$. Sledi za $\frac{p+q}{n}=k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} f(x)\,dx &= R(x,(x-a)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{q}{n}})dx = R\left(x, \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{p+q}{n}}\right)dx \\ &= R\left(\frac{bt^n-a}{t^n-1}, t^p\left(\frac{b-a}{t^n-1}\right)^{\frac{p+q}{n}}\right)\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt = r(t)dt, \text{ tj.} \end{aligned}$$

$$\int R\left(x,(x-a)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{q}{n}}\right)dx = \int r(t)dt,$$

gde je $r(t)$ racionalna funkcija od t. ▶

149. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

◀ Primenjujući metod razlaganja, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx - \int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+x+x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} \\ &= \int \sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}dx - \int \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1+2x}{4}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)-\sqrt{1+x+x^2}$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)$$
$$= \frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C. \blacktriangleright$$

150. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx.$

◀ Imamo

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx = \int \frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}dx \\
&= \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} \\
&= \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} + 2\int \frac{sgnx dx}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} \\
&= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) - \sqrt{2}\int \frac{sgnx d\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}} \\
&= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) \\
&\quad - sgnx\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right| + C \\
&= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) \\
&\quad - sgnx\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\right| + C. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Primenom formule

$$\int \frac{P_n(x)}{y}dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda\int \frac{dx}{y},$$

gde je $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ polinom stepena n, $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ i λ broj, naći sledeće integrale:

151. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$

◀ Primenom predložene formule, imamo

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

Diferenciranjem date jednakosti i svođenjem na zajednički imenilac, dobijamo

$$x^3 \equiv (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda,$$

$$\begin{array}{ll} x^3 & 1=-3A; \\ x^2 & 0=5A-2B; \\ x & 0=2A+3B-C; \\ x^0 & 0=B+C+\lambda; \end{array}$$

$$A=-\frac{1}{3};\ B=-\frac{5}{6};\ C=-\frac{19}{3};\ \lambda=4.$$

Konačno za $|x-1|<\sqrt{2}$ imamo:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C. \ \blacktriangleright$$

152. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx.$

◀ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx = \int \frac{a^2x^4-x^6}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= (Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{a^2-x^2}, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} & a^2x^4-x^6 \\ \equiv\ & (5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2) \\ & -x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} x^6 & -1=-6A; & x^2 & 0=3Ca^2-2A; \\ x^5 & 0=-5B; & x & 0=2Da^2-F; \\ x^4 & a^2=5a^2A-4C; & x^0 & 0=Ea^2+\lambda; \\ x^3 & 0=4Ba^2-3D; & & \end{array}$$

Iz ovog sistema sledi

$$A=\frac{1}{6};\ B=0;\ C=-\frac{a^2}{24};\ D=0;\ E=-\frac{a^4}{16};\ F=0;\ \lambda=\frac{a^2}{16}.$$

Dakle,

$$I(x)=\left(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C\ (|x|\le|a|). \ \blacktriangleright$$

153. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

◀ Uzimajući smenu $x+1=\frac{1}{t}$, dobijamo

$$I(x)=\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=-\int \frac{t^4 d|t|}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Imamo

$$-\int \frac{t^4 d|t|}{\sqrt{1-t^2}}=(A|t|^3+B|t|^2+C|t|+D)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Diferenciranjem leve i desne strane po $|t|$ i svođenjem na zajednički imenilac imamo

$$-|t|^4 \equiv (3A|t|^2+2B|t|+C)(1-|t|^2)-|t|(A|t|^3+B|t|^2+C|t|+D)+\lambda,$$

$$\begin{array}{llll} |t|^4 & -1=-4A; & |t| & 0=2B-D; \\ |t|^3 & 0=-3B; & |t|^0 & 0=C+\lambda; \\ |t|^2 & 0=3A-2C; & & \end{array}$$

$$A=\frac{1}{4};\ B=0;\ C=\frac{3}{8};\ D=0;\ \lambda=-\frac{3}{8}.$$

Konačno je

$$I(x)=\left(\frac{1}{4|x+1|^3}+\frac{3}{8|x+1|}\right)\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+C$$

$(x<-2,\ x>0)$. ▶

154. Pod kojim uslovom integral

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

predstavlja algebarsku funkciju?

◀ Navedeni integral će predstavljati algebarsku funkciju, ako je u razlaganju

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

koeficijent λ jednak 0. Neka je $\lambda=0$. Tada je

$$a_1x^2+b_1x+c_1 \equiv A(ax^2+bx+c)+(Ax+B)(ax+\frac{b}{2}),$$

$$\begin{array}{ll} x^2 & a_1 = 2Aa; \\ x & b_1 = \frac{3Ab}{2} + Ba; \\ x^0 & c_1 = Ac + \frac{bB}{2}. \end{array}$$

Eliminacijom nepoznatih A i B iz dobijenog sistema, imamo traženi uslov:

$$8a^2c_1 + 3b^2a_1 = 4a(a_1c + b_1b) \ (a \neq 0).$$

Naći $\int \frac{P(x)}{Q(x)y}dx$, razlaganjem racionalne funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na proste razlomke, ako je $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. ▶

155. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

◀ Koristeći jednakost

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2},$$

dobijamo razlaganje

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}} + \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{2-(x-1)^2}} \\ &= \int \frac{dx}{(x-1)|x-1|\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2}-1}} + \int \frac{dx}{(x-1)^2|x-1|\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2}-1}}. \end{aligned}$$

Neka je $\frac{1}{|x-1|} = t$. Tada je za $|x-1| < \sqrt{2}$; $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}} - sgn(x-1)\int \frac{tdt}{\sqrt{2t^2-1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2-1}\right| - \frac{sgn(x-1)}{2}\sqrt{2t^2-1} + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{x-1}\right| - \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)} + C. \end{aligned}$$ ▶

156. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

◀ Imamo

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} = \frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$$

Za nalaženje integrala $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ koristimo smenu $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = t$. Tada je

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t = \arctan \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

sledi,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right) + \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C. \ ▶$$

Svodeći kvadratni trinom na kanonični oblik, izračunati sledeće integrale:

157. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

◀ Smenom, $x+\frac{1}{2}=z$, dobijamo integral

$$I(z) = \int \frac{dz}{\left(z^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{z^2-\frac{5}{4}}}$$

koji se smenom

$$\frac{z}{\sqrt{z^2-\frac{5}{4}}} = t$$

svodi na integral

$$I_1(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{3}{8}-t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+2t\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2t\sqrt{2}}\right| + C.$$

Vraćanjem na staru promenljivu, imamo

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x-1)}+(2x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x-1)}-(2x+1)\sqrt{2}}\right| + C \quad \left(\left|x+\frac{1}{2}\right| > \frac{\sqrt{5}}{2}\right). \ ▶$$

158. $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} + \int \frac{(2x-4)dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}. \end{aligned}$$

Prvi od ovih integrala izračunavamo neposredno:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-1)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

U drugom integralu uvedimo smenu $x - 1 = z$. Tada se transformacijom dobija

$$\int \frac{2z-2}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}dz = \int \frac{2zdz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}} - 2\int \frac{dz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}} = I_1 + I_2.$$

Prvi integral izračunavamo smenom $\sqrt{3-z^2} = t$:

$$I_1 = -2\int \frac{dt}{6-t^2} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t} \right| = -\frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}} \right|$$

Za nalaženje drugog integrala uvodimo smenu $\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} = t$; onda je

$$I_2 = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{2t^2+1} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \arctan \sqrt{2}t = -\frac{\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Konačno sledi,

$$\begin{aligned} I &= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}} \right| \\ &\quad -\frac{\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C. \end{aligned}$$ ▶

159. Koristeći razlomljenu linearnu smenu $x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ naći sledeći integral:

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

◀ Primenom predložene smene, dobijamo

$$x^2 - x + 1 = \frac{(\alpha+\beta t)^2 - (1+t)(\alpha+\beta t) + (1+t)^2}{(1+t)^2}$$

$$x^2 + x + 1 = \frac{(\alpha+\beta t)^2 + (1+t)(\alpha+\beta t) + (1+t)^2}{(1+t)^2}.$$

Brojeve α i β određujemo tako da koeficijenti uz t budu jednaki 0. Sledi,

$$2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0; \; 2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2 = 0.$$

Rešavanjem sistema dobijamo $\alpha = 1$; $\beta = -1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-t}{1+t}, \ dx = \frac{-2dt}{(1+t)^2}, \ x^2 - x + 1 = \frac{3t^2+2}{(1+t)^2}, \\ \sqrt{x^2+x+1} &= \frac{\sqrt{t^2+3}}{1+t} \end{aligned}$$

(u slučaju da je $1+t>0$, tj. ako je $x>-1$). Zatim je

$$\begin{aligned} I(x) &= -2\int \frac{(t+1)dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} \\ &= -2\int \frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} - 2\int \frac{dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}}. \end{aligned}$$

Prvi integral se računa smenom $\sqrt{t^2+3} = u$. Tada je

$$\begin{aligned} I_1(t) &= -2\int \frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = 2\int \frac{du}{8-3u^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}u}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}u}\right| = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3(t^2+3)}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3(t^2+3)}}\right|. \end{aligned}$$

Vraćanjem na promenljivu x dobijamo:

$$-2\int \frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{(1+x)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|.$$

Drugi integral računamo smenom $\frac{t}{\sqrt{t^2+3}} = z$:

$$\begin{aligned} I_2(t) &= -2\int \frac{dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = -2\int \frac{dz}{8z^2+1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{x^2+x+1}}. \end{aligned}$$

Konačno imamo vrednost polaznog integrala:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{(1+x)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{x^2+x+1}} + C. \ \blacktriangleright$$

160. Naći $I(x) = \int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$.

◀ Kao i u prethodnom primeru smenom $x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}$, gde α i β biramo

tako da koeficijenti uz t budu 0. Iz tog uslova nalazimo da je $\alpha = 2$, $\beta = -1$. Sledi,

$$\begin{aligned} x &= \frac{2-t}{1+t},\ dx = -\frac{3dt}{(1+t)^2},\ x^2+2 = \frac{3(2+t)^2}{(1+t)^2}; \\ \sqrt{2x^2-2x+5} &= \frac{3}{1+t}\sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

(za $1+t>0$, tj. $x>-1$);

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{1}{3}\int\frac{(t+1)dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} \\ &= -\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}. \end{aligned}$$

Prvi integral nalazimo neposredno:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= -\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} \\ &= -\frac{1}{3}\int\frac{d\sqrt{t^2+1}}{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2+1} = -\frac{1}{3}\arctan\sqrt{1+t^2}. \end{aligned}$$

Za nalaženje drugog integrala koristimo smenu $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = z$. Tada je

$$\begin{aligned} I_2(t) &= -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2-2} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2(1+t^2)}}{t+\sqrt{2(1+t^2)}}\right|. \end{aligned}$$

Vraćanjem na promenljivu x dobijamo

$$I(x) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+x-2}{\sqrt{2(x^2-2x+5)}-x+2}\right| - \frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{1+x}+C.\ \triangleright$$

Primenom Ojlerovih smena:
1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x+z$, $a>0$;
2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz\pm\sqrt{c}$, $c>0$;
3) $\sqrt{ax^2+bx+c} \equiv \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$.

Naći sledeće integrale:

161. $I = \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

◀ Ovde je $a = 1 > 0$, zato primenjujemo prvu Ojlerovu smenu:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + z.$$

Odavde je

$$x = \frac{z^2 - 1}{1 + 2z}; \; dx = \frac{2z^2 + 2z + 2}{(1 + 2z)^2} dz.$$

Zamenjivanjem u integralu, dobijamo

$$I = \int \frac{2z^2 + 2z + 2}{z(1 + 2z)^2} dz.$$

Razlaganje podintegralne funkcije tražimo u obliku

$$\frac{2z^2 + 2z + 2}{z(1 + 2z)^2} = \frac{A}{(1 + 2z)^2} + \frac{B}{1 + 2z} + \frac{C}{z}.$$

Za određivanje nepoznatih A, B i C dobijamo sistem

$$\begin{aligned} 2 &= 2B + 4C; \\ 2 &= A + B + 4C; \\ 2 &= C; \end{aligned}$$

čija su rešenja $A = -3$; $B = -3$; $C = 2$. Onda je

$$\begin{aligned} I &= -3 \int \frac{dz}{(1 + 2z)^2} - 3 \int \frac{dz}{1 + 2z} + 2 \int \frac{dz}{z} \\ &= \frac{3}{2(1 + 2z)} + \frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{|1 + 2z|^3} + C, \end{aligned}$$

gde je $z = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$; $x \neq -1$. ▶

162. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

◀ Pošto je $c = 1 > 0$, primenićemo drugu Ojlerovu smenu

$$xt - 1 = \sqrt{1 - 2x - x^2},$$

odakle sledi:

$$I(x) = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int \frac{-t^2 + 2t + 1}{t(t - 1)(t^2 + 1)} dt.$$

Razlaganjem podintegralne funkcije na proste razlomke, imamo

$$\frac{-t^2 + 2t + 1}{t(t - 1)(t^2 + 1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t - 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1},$$

odakle sledi identičnost:

$$-t^2+2t+1 \equiv A(t^3-t^2+t-1)+B(t^3+t)+(Ct+D)(t^2-t)$$

i sistem koji se dobija izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene:

$$\begin{array}{ll} t^3 & 0=A+B+C; \\ t^2 & -1=-A-C+D; \\ t & 2=A+B-D; \\ t^0 & 1=-A. \end{array}$$

Rešenja sistema su $A=-1$, $B=1$, $C=0$ i $D=2$.

Sledi

$$I(x)=-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t-1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\arctan t+C,$$

gde je $tx=1+\sqrt{1-2x-x^2}$. ►

163. $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$

◄ S obzirom da je

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

možemo uzeti treću Ojlerovu smenu

$$\sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1)$$

Imamo

$$x=\frac{2-t^2}{t^2-1},\quad dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2};$$

$$I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}dt.$$

Razlaganje podintegralne funkcije ima oblik

$$\begin{aligned}&\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\\ =\;&\frac{A}{(t+1)^3}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t-1}+\frac{E}{t-2},\end{aligned}$$

a za određivanje koeficijenata A, B, C, D i E imamo identičnost

$$\begin{aligned}-2t^2-4t \;\equiv\;& A(t-2)(t-1)+B(t-2)(t^2-1)+C(t^2-3t+2)(t^2+2t+1)\\ &+D(t-2)(t^3+3t^2+3t+1)+E(t-1)(t^3+3t^2+3t+1).\end{aligned}$$

Uzimajući redom $t = -1, 1; 2$, nalazimo $A = \frac{1}{3}$; $D = \frac{3}{4}$ i $E = -\frac{16}{27}$. Izjednačavanjem zatim koeficijenata uz t^4 i t^3 dobijamo sistem

$$\begin{aligned} 0 &= C + D + E; \\ 0 &= B - C + D + 2E, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$C = -\frac{17}{108}; \; B = \frac{5}{18}.$$

Dakle,

$$I = -\frac{1}{6(t+1)^2} - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{17}{108}\ln|t+1| + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}\ln|t-2| + C. \; ▶$$

Primenjujući različite metode, naći sledeće integrale:

164. $\int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

◀ Smenom

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{t^4 - 1}{3t^4 + 1} dt = \int \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3t^4+1}\right) dt \\ &= \frac{t}{3} - \frac{4}{3}\int \frac{dt}{3t^4+1} \; (t > 0). \end{aligned}$$

Za nalaženje poslednjeg integrala uvodimo smenu $\sqrt[4]{3}t = u$. Tada dobijamo integral

$$\int \frac{dt}{3t^4+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{du}{u^4+1},$$

koji je izračunat metodom razlaganja podintegralne funkcije (primer 145)

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{du}{u^4+1} = \frac{1}{2\sqrt[4]{12}} \arctan \frac{u^2-1}{u\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{12}} \ln \frac{u^2 + u\sqrt{2} + 1}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} + C.$$

Vraćanjem na promenljivu t, dobijamo

$$I(x) = \frac{t}{3} - \frac{2}{3\sqrt[4]{12}} \arctan \frac{t^2\sqrt{3} - 1}{t\sqrt[4]{12}} - \frac{1}{3\sqrt[4]{12}} \ln \frac{t^2\sqrt{3} + t\sqrt[4]{12} + 1}{t^2\sqrt{3} - t\sqrt[4]{12} + 1} + C,$$

gde je $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. ▶

165. $I(x) = \int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

◀ Neka je
$$t = x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2};$$
tada je
$$x = \frac{1}{2}\left(t - 1 - \frac{3}{4t}\right) \ (t>0); \ dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4t^2}\right)dt;$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{4t^2}\right)dt = \frac{1}{8}\int\left(4 - \frac{8t^2-6t+3}{t^2(2t+1)}\right)dt \\ &= \frac{1}{8}\int\left(4 - \frac{A}{t^2} - \frac{B}{t} - \frac{C}{2t+1}\right)dt. \end{aligned}$$

Za nalaženje koeficijenata A, B i C imamo identičnost
$$8t^2 - 6t + 3 \equiv A(2t+1) + Bt(2t+1) + Ct^2,$$
iz koje sledi
$$A = 3; \ B = -4; \ C = 8.$$
Dakle,
$$I = \frac{t}{2} + \frac{3}{8t} + \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|2t+1| + C.$$
Vraćanjem na promenljivu x, konačno dobijamo
$$I(x) = \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{\left(x+2+2\sqrt{1+x+x^2}\right)^2} + C. \ ▶$$

166. $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx.$

◀ Transformišimo podintegralni izraz

$$\begin{aligned} f(x)\,dx &= \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx = \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right) sgnx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx \\ &= \frac{sgnx\,d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}} = \frac{sgnx\,d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left|x+\frac{1}{x}\right|\sqrt{1-\frac{2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}} \\ &= -\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1}}{\sqrt{1-\frac{2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}} \end{aligned}$$

Sada je

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} + C. \blacktriangleright$$

167. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

◀ Imamo za $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}} = \int \frac{sgnx\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \int \frac{sgnx d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}} = sgnx \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\right| + C \\ &= sgnx \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+x^2+1}}{x}\right| + C \blacktriangleright \end{aligned}$$

168. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$.

◀ Imamo za $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}dx = \int \frac{sgnx\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \int \frac{sgnx d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}} = sgnx \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\right| + C \\ &= sgnx \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+x^2+1}}{x}\right| + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

169. Dokazati da se nalaženje integrala

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right) dx,$$

gde je $R(u, v, w)$ racionalna funkcija, svodi na integraljenje racionalne funkcije.

◀ Smenom

$$t = \sqrt{ax+b}$$

dobijamo integral

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t, \sqrt{\frac{ct^2}{a}+\frac{ad-cb}{a}}\right) \frac{2t}{a}dt,$$

koji se jednom od Ojlerovih smena svodi na integral racionalne funkcije. ▶

Integral diferencijalnog binoma

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

gde $m, n, p \in \mathbb{Q}$, svodi se na integral racionalne funkcije samo u sledeća tri slučaja:

1. Neka je p ceo broj. Tada se uvodi smena $x = t^N$, gde je N najmanji zajednički sadržalac za imenioce razlomaka m i n.

2. Neka je $\frac{m+1}{n}$ ceo broj. Smena je $a + bx^n = t^N$, gde je N imenilac razlomka p.

3. Neka je $\frac{m+1}{n} + p$ ceo broj. Uvodi se smena $ax^{-n} + b = t^N$, gde je N imenilac razlomka p.

Ako je $n = 1$, onda su navedeni slučajevi ekvivalentni sledećim: **1)** p je ceo; **2)** m je ceo; **3)** $m + p$ je ceo.

Naći sledeće integrale:

170. $\int \sqrt{x^3 + x^4} dx$.

◀ Ako je $x > 0$, odnosno $x < -1$, imamo

$$I(x) = \int \sqrt{x^3 + x^4} dx = \int x^2 (x^{-1} + 1)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Ovde je $n = -1$, $m = 2$ i $\frac{m+1}{n}$ je ceo. Smenom

$$x^{-1} + 1 = t^2,$$

dobijamo

$$I(x) = -\int \frac{2t^2 dt}{(t^2 - 1)^4} = -2I_3 - 2I_4,$$

gde je

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^n}, \quad n = 3, 4.$$

Za izračunavanje poslednjeg integrala nalazimo rekurentnu formulu. Neka je

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 - a^2)^n} \quad (a \neq 0).$$

Parcijalnim integraljenjem integrala I_{n-1}, sledi

$$I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2 - a^2)^{n-1}} = \frac{t}{(t^2 - a^2)^{n-1}} - 2(n-1) \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - a^2)^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t}{(t^2-a^2)^{n-1}} - 2(n-1)\int \frac{(t^2-a^2)+a^2dt}{(t^2-a^2)^n} \\
&= \frac{t}{(t^2-a^2)^{n-1}} - 2(n-1)I_{n-1} + 2(n-1)a^2 I_n,
\end{aligned}$$

odavde je

$$I_n = -\frac{t}{2(n-1)a^2(t^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}.$$

Uzastopnom primenom formule (za $a = 1$), dobijamo

$$\begin{aligned}
I &= 2I_3 - 2\left(-\frac{t}{6(t^2-1)^3} - \frac{5}{6}I_3\right) = \frac{t}{3(t^2-1)^3} - \frac{1}{3}I_3 \\
&= \frac{t}{3(t^2-1)^3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-t}{4(t^2-1)^2} - \frac{3}{4}I_2\right) \\
&= \frac{t}{3(t^2-1)^3} + \frac{t}{12(t^2-1)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{-t}{2(t^2-1)} - \frac{1}{2}I_1\right) \\
&= \frac{t}{3(t^2-1)^3} + \frac{t}{12(t^2-1)^2} - \frac{t}{8(t^2-1)} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

Vraćanjem na promenljivu x sledi

$$I(x) = \sqrt{x+x^2}\,\frac{8x^2+2x-3}{24} + \frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{1+x^{-1}}+1}{|\sqrt{x}|} + C. \ ▶$$

171. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx.$

◀ U ovom primeru je $p = -2$, dakle ceo broj. Primenom prve smene $x = t^2$, sledi

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx = 6\int \frac{t^8dt}{(1+t^2)^2} \\
&= 6\int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt \\
&= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int \frac{dt}{1+t^2} - 6\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}.
\end{aligned}$$

Pošto je

$$\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t,$$

to konačno imamo

$$I = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1+t^2} - 21 \arctan t + C, \ t = x^6. \ ►$$

172. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

◄ U ovom primeru je $m = 1$; $n = \frac{2}{3}$; $p = -\frac{1}{2}$ i $\frac{m+1}{n} = 3$, dakle ceo broj. Tada je smena $1 + x^{\frac{2}{3}} = t^2$. Imamo,

$$I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int (t^2-1)^2 dt = \frac{3}{5}t^6 - 2t^3 + 3t + C,$$

gde je $t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. ►

173. $\int \sqrt[3]{3x - x^3}dx$.

◄ Ovde je $m = \frac{1}{3}$; $n = 2m$; $p = \frac{1}{3}$ i $\frac{m+1}{n} + p = 1$ ceo broj. Smena je $3x^{-2} - 1 = t^3$. Onda je

$$I(x) = -\frac{9}{2}\int \frac{t^3dt}{(t^3+1)^2} = \frac{3}{2}\int td\left(\frac{1}{t^3+1}\right) = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3+1}.$$

Pošto je prema primeru 110

$$\int \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}},$$

to konačno imamo

$$I = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

gde je $t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$ $(0 < x < \sqrt{3}; x \le -\sqrt{3})$. ►

3.4 Integraljenje trigonometrijskih funkcija

Integrali oblika $\int \sin^m x \cos^n x dx$, gde su m, n celi brojevi, izračunavaju se transformacijama izraza, kao i snižavanjem reda.

Naći integrale:

174. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$

◄ Parcijalnim integraljenjem se dobija

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx &= -\frac{1}{2}\int \cos^3 x d\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} + 3\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx\right) \\ &= -\frac{3}{2}\cos x - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|, \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \ ►\end{aligned}$$

175. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
◄ Slično prethodnome imamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^3 x} &= -\int \frac{d(\cot x)}{\sin x} = \frac{\cot x}{\sin x} - \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x} \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|;\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C \ (x \neq k\pi). \ ►$$

176. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^5 x}$.
◄ Imamo, za $x \neq \frac{k\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^5 x} = \int (1+\tan^2 x)^3 \frac{d\tan x}{\tan^3 x} \\ &= -\frac{1}{2\tan^2 x} + 3\ln|\tan x| + \frac{3}{2}\tan^2 x + \frac{1}{4}\tan^4 x + C. \ ►\end{aligned}$$

177. $\int \tan^5 x dx$.
◄ Očigledno je za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \tan^5 x dx = \frac{1}{2}\int (\sec^2 x - 1)^2 \frac{d(\sec^2 x)}{\sec^2 x} \\ &= \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \frac{1}{2}\ln(\sec^2 x) + C \\ &= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ili } I(x) &= \int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\ &= \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\ &= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C. \ ►\end{aligned}$$

178. $\int \cot^6 x dx$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \cot^4 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\frac{\cot^5 x}{5} - \int \cot^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx \\ &= -\frac{\cot^5 x}{5} + \frac{\cot^3 x}{3} - \cot x - x + C \ (x \neq k\pi). \end{aligned}$$ ▶

179. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt{\tan^3 x}} = \int \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{\tan^3 x}} d(\tan x) = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\tan x}} + \frac{2}{3\sqrt{\cot^3 x}} + C = -2\sqrt{\cot x} + \frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x} + C \end{aligned}$$

$(k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z})$. ▶

180. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

◀ Smenom $t^3 = \sin x$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$ imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x)(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}} \\ &= 3\int \frac{dt}{1 - t^6} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1 - t^3} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1 + t^3} \\ &= -\frac{1}{4} \ln \frac{(1-t)^2}{t^2 + t + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \\ &\quad + \frac{1}{4} \ln \frac{(1+t)^2}{t^2 - t + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1+t)^2(t^2 + t + 1)}{(t-1)^2(t^2 - t + 1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}t}{1 - t^2} + C. \end{aligned}$$ ▶

181. Izvesti formule sniženja za integrale:

a) $I_n = \int \sin^n x dx$; **b)** $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n > 2)$.

◀ a) Parcijalnim integraljenjem se dobija:

$$\begin{aligned} I_n &= -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n, \end{aligned}$$

odavde sledi

$$I_n = \frac{1}{n} \left((n-1) I_{n-2} - \cos x \cdot \sin^{n-1} x \right) \ (n = 3, 4, \ldots).$$

b)

$$\begin{aligned}
K_n &= \int \frac{d(\sin x)}{\cos^{n+1} x} = \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} - (n+1)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2} x}dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} - (n+1)K_{n+2} + (n+1)K_n,
\end{aligned}$$

odakle je

$$K_{n+2} = \frac{\sin x}{(n+1)\cos^{n+1} x} + \frac{n}{n+1}K_n \ (n \in \mathbb{N}_0),\ (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}). \ \blacktriangleright$$

Koristeći formule:
I. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$;
II. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$;
III. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$;
naći integrale:

182. $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx.$

◀ Imamo

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{3}dx \\
&= \frac{1}{4}\int\left(-\sin\frac{x}{6} + \sin\frac{5x}{6} + \sin\frac{7x}{6} - \sin\frac{11x}{6}\right)dx \\
&= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{32}\cos\frac{11x}{6} + C. \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

183. $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx.$

◀ Prema formuli **III.** imamo

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \sin^3 2x\cos^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (3\sin 2x - \sin 6x)(1+\cos 6x)dx \\
&= \frac{1}{8}\int\left(3\sin 2x - \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{3}{2}\sin 8x - \sin 6x - \frac{1}{2}\sin 12x\right)dx \\
&= -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{64}\cos 4x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{1}{192}\cos 6x + C. \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Primenom formula:
IV. $\sin(\alpha-\beta) \equiv \sin((x+\alpha)-(x+\beta))$;
V. $\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos((x+\alpha)-(x+\beta))$,
naći integrale:

184. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

◀ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \left(\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C \end{aligned}$$

$\sin(a-b) \neq 0$. ▶

185. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

◀ Iz jednakosti $\cos a = \cos\left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2}\right)$, za $\cos a \neq 0, \sin x \neq \sin a$, za sledi

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{2\cos a} \int \frac{\cos\left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}} dx = \frac{1}{\cos a} \ln \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}} + C. \text{ ▶}$$

186. $\int \tan x \tan(x+a) dx$.

◀ Imamo, za $\sin a \neq 0$; $\cos x \neq 0$; $\cos(x+a) \neq 0$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \tan x \tan(x+a) dx = \int \left(\frac{\cos x \cos(x+a) + \sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} - 1 \right) d \\ &= \int \frac{\cos a}{\cos x \cos(x+a)} dx - x = -x + \cot a \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right| + C. \text{ ▶} \end{aligned}$$

Integrali oblika

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

gde je R racionalna funkcija, u opštem slučaju se svode na integral racionalne funkcije, smenom $\tan\frac{x}{2} = t$.

a) Ako je ispunjeno

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

odnosno

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

onda treba uzeti smenu $\cos x = t$ tj. $\sin x = t$.

b) U slučaju da je

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

onda se uzima smena $\tan x = t$.

Naći integrale:

187. $I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

◀ Smenom $\tan\frac{x}{2} = t$, $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C_n. \end{aligned}$$

Iz neprekidnosti primitivne funkcije sledi

$$I(2\pi n + \pi - 0) = I(2\pi n + \pi + 0), \quad \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n = \frac{-\pi}{2\sqrt{5}} + C_{n+1},$$

odakle nalazimo

$$C_n = \frac{n\pi}{\sqrt{5}} + C,$$

gde je $C = C_0$ proizvoljna konstanta. Iz nejednakosti

$$2n\pi < x + \pi < (2n+2)\pi; \; n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n+1$$

proističe, da je $n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$. Dakle,

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C, \; x \neq (2n+1)\pi.$$

$$I = \lim_{x \to (2n+1)\pi} I(x) = \frac{2n+1}{2\sqrt{5}}\pi, \; x = (2n+1)\pi. \; ▶$$

188. $I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

◀ Polazeći od jednakosti

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2},$$

dobijamo

$$I(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C \; \left(x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi\right). \; ▶$$

189. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx$.

◀ Uzmimo smenu $t = \tan 2x$; $\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, tada je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{t^2 dt}{t^4 + 8t^2 + 8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 4 + 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 4 - 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \arctan \frac{t}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \arctan \frac{t}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C_n \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \arctan \frac{\tan 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \arctan \frac{\tan 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C_n. \end{aligned}$$

Iz uslova neprekidnosti primitivne funkcije sledi

$$I\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} - 0\right) = I\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} + 0\right) \ (n \in \mathbb{Z}), \text{ tj.}$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\frac{\pi}{2} + C_n = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\frac{\pi}{2} + C_{n+1},$$

odakle po analogiji sa primerom 187 imamo

$$C_n = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right) n + C \ (C = C_0), \text{ odnosno}$$

$$C_n = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right].$$

Sledi,

$$\begin{aligned} I(x) = &\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \arctan \frac{\tan 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \arctan \frac{\tan 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ &+ \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right] + C; x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ &I\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}} I(x). \end{aligned}$$ ▶

190. Dokazati da je

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

gde su A, B, C konstante; $x \neq k\pi - \arctan \frac{b}{a}$.

◀ Stavimo

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x), \qquad (1)$$

odakle sledi

$$a_1 = Aa - Bb; b_1 = Ab + Ba;$$

Pošto je $a^2 + b^2 \neq 0$, to iz datog sistema jednačina proizilazi

$$A = \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2}; \ B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}.$$

Na kraju zamenjivanjem (1) u dati integral imamo dokaz tvrđenja, gde je C integraciona konstanta. ►

Naći integrale:

191. $I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx.$

◄ Neposrednim korišćenjem prethodnog primera imamo

$$I(x) = -\frac{x}{5} - \frac{3}{2} \ln|\sin x + 2\cos x| + C, \ x \neq k\pi - \arctan 2,$$

jer je $a_1 = -1$; $b_1 = -1$; $a = 1$; $b = 2$. ►

192. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx.$

◄ Prema primeru 190 imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b\cos x)^2} dx = A \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} - \frac{B}{a \sin x + b \cos x} \\ &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \varphi)} - \frac{B}{a \sin x + b \cos x} + C, \end{aligned}$$

gde je

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \ x \neq k\pi - \arctan \frac{b}{a}. \ ►$$

193. Dokazati, da je

$$\begin{aligned} &\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx \\ &= Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}, \end{aligned}$$

fde su A, B, C konstantni koeficijenti.

◄ Stavimo

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a \sin x + b \cos x + c) + B(a \cos x - b \sin x) + C \quad (1)$$

odakle se dobija

$$a_1 = Aa - Bb;\ b_1 = Ab + Ba;\ c_1 = Ac + C.$$

Iz datog sistema jednačina se dobija

$$A = \frac{a_1 a + B_1 B}{A^2 + B^2};\ b = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2};\ C = c_1 - AC.$$

Zamenom jednakosti (1) u integral dobijamo dokaz tvrđenja. ►

194. Naći $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx$.

◄ Prema prethodnom primeru imamo

$$I(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{9}\ln|\sin x - 2\cos x + 3| - \frac{6}{5}\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3},$$

jer je $A = -\frac{3}{5}$, $B = \frac{4}{5}$, $C = -\frac{6}{5}$. Uzimajući smenu $t = \tan\frac{x}{2}$: $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3} = 2\int \frac{dt}{\left(\sqrt{5}t + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{4}{5}} \\ &= \arctan\frac{5t+1}{2} + C_n = \arctan\frac{5\tan\frac{x}{2} + 1}{2} + C_n. \end{aligned}$$

Iz uslova $I(2n\pi + \pi - 0) = I(2n\pi + \pi + 0)$ dobijamo $C_n = n\pi + C$; $C = C_0$. Konačno je

$$\begin{aligned} I(x) &= \arctan\frac{5\tan\frac{x}{2} + 1}{2} + \pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C;\ x \neq 2n\pi + \pi; \\ I(2n\pi + \pi) &= \lim_{x \to 2n\pi + \pi} I(x). \end{aligned}$$ ►

195. Dokazati, da je

$$\begin{aligned} &\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a\sin x + b\cos x} dx \\ &= C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} + A\sin x + B\cos x, \end{aligned}$$

gde su A, B, C konstantni koeficijenti, $x \neq k\pi - \arctan\frac{b}{a}$.

◄ Predstavimo brojilac $P(x)$ podintegralne funkcije u obliku

$$P(x) = (a\sin x + b\cos x)(A\cos x - B\sin x) + C(\sin^2 x + \cos x^2), \qquad (1)$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata uz $\sin^2 x, \cos^2 x$ i $\sin x \cos x$ dobija sistem

$$\begin{aligned} a_1 &= -aB + C; \\ 2b_1 &= aA - bB; \\ c_1 &= Ab + C, \end{aligned}$$

čija su rešenja:

$$A = \frac{b(c_1 - a_1) + 2ab_1}{a^2 + b^2}; \; B = \frac{a(c_1 - a) - 2bb_1}{a^2 + b^2}; \; C = \frac{a_1 b^2 + c_1 a^2 - 2abb_1}{a^2 + b^2}.$$

Na kraju zamenjivanjem (1) u dati integral imamo dokaz tvrđenja. ►

196. Dokazati, da ako je $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$, to je

$$\int \frac{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)dx}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

gde su A, B neodređeni koeficijenti; λ_1, λ_2 koreni jednačine

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \; (\lambda_1 \neq \lambda_2);$$

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x \text{ i } k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \; (i = 1, 2).$$

◄ Svođenjem kvadratne forme $a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ na kanonični oblik $\lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2$, gde je

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 k_1^2}} (\cos x - bk_1 \sin x);$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 k_2^2}} (\cos x - bk_2 \sin x). \tag{1}$$

Rešavanjem sistema (1) u odnosu na $\cos x, \sin x$ i koristeći jednakost $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$ (vektor $x = \{\sin x, \cos x\}$ prelaskom u drugi bazis ne menja dužinu), imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)dx}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} = \int \frac{-a_1 d(\cos x) + b_1 d(\sin x)}{\lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2} \\ &= -\frac{b_1 bk_1 + a_1}{\sqrt{1 + b^2 k_1^2}} \int \frac{dY_2}{(\lambda_1 - \lambda_2) Y_1^2 + \lambda_2} - \frac{b_1 bk_2 + a_2}{\sqrt{1 + b^2 k_2^2}} \int \frac{dY_2}{(\lambda_2 - \lambda_1) Y_2^2 + \lambda_1}. \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da je $\frac{1}{k_2 b} = -bk_1$, iz (1) sledi

$$Y_1 = \frac{u_2}{b\sqrt{1+b^2k_1^2}}, \quad Y_2 = \frac{u_1}{b\sqrt{1+b^2k_2^2}} \tag{3}$$

Zamenjivanjem (3) u (2) dobijamo traženu jednakost. Pri tom je

$$A = -\frac{b_1 bk_2 + a_1}{b(1+b^2k_2^2)}, \quad B = -\frac{b_1 bk_1 + a_1}{b(1+b^2k_1^2)}. \ ▶$$

Naći integrale:

197. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$.

◀ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx = -2\int \frac{d(\cos x)}{3+\cos^2 x} - \int \frac{d(\sin x)}{4-\sin^2 x} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x} + C. \ ▶ \end{aligned}$$

198. $\int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} dx$.

◀ Prema prethodnoj teoremi imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} dx = \frac{3}{5}\int \frac{du_1}{u_1^2+1} + \frac{1}{10}\int \frac{du_2}{-\frac{1}{4}u_2^2 + } \\ &= \frac{3}{5}\arctan(\sin x - 2\cos x) + \frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+2\sin x + \cos x}{\sqrt{6}-2\sin x - \cos x}\right| + C. \ ▶ \end{aligned}$$

199. $I = \int \frac{\sin x - 2\cos x}{1+4\sin x\cos x} dx$.

◀ Predstavljajući imenilac u obliku $\sin^2 x + \cos^2 x + 4\sin x\cos x$ i primenom teoreme iz zadatka 196 dobijamo

$$I(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1}\right| - \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x - \cos x)}\right| + C$$

$(\sin 2x \neq -\frac{1}{2})$. ▶

200. Dokazati formulu

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

gde su A, B, C konstntni koeficijenti.

◀ Parcijalnim integraljenjem sledi

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int \frac{d(-a\cos x + b\sin x)}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} \\ &= \frac{-a\cos x + b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2 dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}} \\ &= \frac{-a\cos x + b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2 + (b\cos x + a\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}} \end{aligned}$$

odakle je

$$I_n(x) = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left((n-2)I_{n-2} + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}\right),$$

što je i trebalo dokazati. ▶

201. Naći $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

◀ Koristeći prethodno dokazanu formulu, nalazimo za $x \neq k\pi - \arctan 2$:

$$\begin{aligned} I_3(x) &= \frac{1}{10}\left(\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\tan\left|\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan 2\right)\right| + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right) + C. \end{aligned}$$ ▶

202. Ako je $I_n(x) = \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$, dokazati da je

$$I_n(x) = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

($|a| \neq |b|$) i odrediti koeficijente A, B i C, ako je n prirodan broj veći od jedinice.

◀ Parcijalim integraljenjem dobijamo

$$\begin{aligned} I_{n-2}(x) &= \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}} = \int \frac{a+b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx \\ &= aI_{n-1} + b\int \frac{d\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} \\ &= aI_{n-1} + \frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} - (n-1)\int \frac{b^2\sin^2 x}{(a+b\cos x)^n}dx, \end{aligned}$$

odakle koristeći identičnost

$$b^2\sin^2 x = -(a^2-b^2) + 2a(a+b\cos x) - (a+b\cos x)^2,$$

nalazimo

$$I_{n-2}(x) = aI_{n-1} + \frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + (a^2-b^2)(n-1)I_n$$
$$-2a(n-1)I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}, \text{ tj.}$$

$$I_n(x) = -\frac{b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$
$$+\frac{(2n-1)a}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-2}.$$

Dakle,

$$A = -\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}; \; B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}; \; C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}. \; ►$$

Naći integrale:

203. $\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

◄ Smenom $\cos x = t$, imamo

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{2-t^2}} = I(t).$$

Ako je $t > 0$, to je

$$-I(t) = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{t} + \sqrt{\frac{2}{t^2}-1}\right| + C.$$

Ako je $t < 0$, to je

$$-I(t) = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}} = \int \frac{-d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{t} + \sqrt{\frac{2}{t^2}-1}\right| + C.$$

Objedinjujući oba rezultata u jedan, dobijamo za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-t^2}}{|t|} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|} + C. \; ►$$

204. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$.

◀ Smenom

$$\tan x = t^2;\ k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z;$$

dobijamo

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}} = \int \tan^{\frac{2}{3}} x dx = \int \frac{2t^4}{1+t^4} dt = 2t - 2\int \frac{dt}{1+t^4}.$$

Prema rešenju primera 145, imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}} = 2t - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + C \\ &= 2\sqrt{\tan x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan x + \sqrt{2\tan x}+1}{\tan x - \sqrt{2\tan x}+1} \right| + C. \end{aligned}$$ ▶

205. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}} dx.$

◀ Koristeći identičnu transformaciju, dobijamo

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3-(\sin x - \cos x)^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\sin x + \cos x + \sqrt{2+\sin 2x} \right) + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$ ▶

206. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x}$, ako je a) $0 < \varepsilon < 1$; b) $\varepsilon > 1$.

◀ Uzmimo smenu $\tan \frac{x}{2} = t$; $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$I = \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{2}{1-\varepsilon} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

a)

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan \frac{t\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + C_n = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-\varepsilon}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + C_n.$$

Po analogiji sa rešenjem primera 187 nalazimo

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-\varepsilon}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right] + C, \\ x &\neq (2n+1)\pi;\ I((2n+1)\pi) = \lim_{x \to (2n+1)\pi} I(x). \end{aligned}$$

b)

$$I = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}}{t + \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}} \right| + C, \; x \neq 2n\pi + \pi. \; \blacktriangleright$$

207. $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$, $0 < \varepsilon < 1$.

◀ Prema formuli iz primera 202, je $a = 1$, $b = \varepsilon$, $n = 2$, dobijamo (primer 206):

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{-\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x} + \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}\right) = \frac{-\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\sin x)} \\ &+ \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan\arctan \frac{\sqrt{1-\varepsilon}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C, \\ x &\neq (2n+1)\pi; \; I((2n+1)\pi) = \lim_{x\to(2n+1)\pi} I(x). \; \blacktriangleright \end{aligned}$$

208. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n-1}\frac{x-a}{2}} dx$.

◀ Uzmimo za $x \neq a + 2n\pi$, $t = \frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$, $dt = -\frac{1}{2}\frac{\cos a\,dx}{\sin^2\frac{x-a}{2}}$ i

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n-1}\frac{x-a}{2}} dx = -\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}dt = -\frac{2t^n}{n\cos a} + C \\ &= -\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^n + C \; (\cos a \neq 0). \; \blacktriangleright \end{aligned}$$

209. Izvesti formulu sniženja za integral

$$I_n = \int \left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx \; (n \in \mathbb{N})$$

◀ Označimo $t = \sin\frac{x-a}{2} \cdot \left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^{-1}$ i razmotrimo integral

$$I_n - I_{n-2} = \int t^{n-2}\frac{\sin^2\frac{x-a}{2} - \sin^2\frac{x+a}{2}}{\sin^2\frac{x+a}{2}} dx.$$

Pošto je $dt = \frac{\sin a\,dx}{2\sin^2\frac{x+a}{2}}$, to je

$$I_n - I_{n-2} = -\int t^{n-2}\sin x dt = 2\int t^{n-2}(\sin a - (\sin a + \sin x))dt$$
$$= 2\sin a\int t^{n-2}dt - 2\int t^{n-2}(\sin a + \sin x)dt,$$

odatle je

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-2} &= \frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1} - 2\int t^{n-2}\frac{(\sin a + \sin x)\sin a}{2\sin^2\frac{x+a}{2}}dx \\ &= \frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1} - 2\int t^{n-2}dx - 2\int t^{n-2}\left(\frac{(\sin a+\sin x)\sin a}{2\sin^2\frac{x+a}{2}} - 1\right)dx \\ &= \frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1} - 2I_{n-2} + \sigma, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} \sigma &= -2\int t^{n-1}\frac{(\sin a + \sin x)\sin a - 2\sin^2\frac{x+a}{2}}{2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}dx \\ &= -2\int t^{n-1}\frac{\sin^2 a + \sin x\sin a - 1 + \cos(x+a)}{\cos a - \cos x}dx \\ &= -2\int t^{n-1}\frac{\cos a(\cos x - \cos a)}{\cos a - \cos x}dx = 2\cos a\int t^{n-1}dx = 2I_{n-1}\cos a. \end{aligned}$$

Konačno je

$$I_n = \frac{2\sin a}{n-1}t^{n-2} - I_{n-2} + 2I_{n-1}\cos a \ (n > 2). \ \blacktriangleright$$

3.5 Integraljenje nekih transcendentnih funkcija

210. Dokazati, da ako je $P(x)$ polinom stepena n, onda je

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C.$$

◀ Dokaz se izvodi parcijalnim integraljenjem. Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int P(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}P(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}P'(x)dx \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}P(x) - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}P'(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}P''(x)dx\right) \\ &= e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2}\right) + \frac{1}{a^2}\int e^{ax}P''(x)dx. \end{aligned}$$

Primenom metoda matematičke indukcije nalazimo

$$I(x) = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P''(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}}\right)$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1}\int e^{ax}P^{(k+1)}(x)dx \ (k \le n).$$

Stavljajući u ovoj formuli $k = n$ i uzimajući u obzir da je $P^{(k+1)}(x) \equiv 0$, dobijamo traženu formulu. ►

211. Dokazati da ako je $P(x)$ polinom stepena n, onda je

$$\int P(x)\cos ax dx = \frac{\sin ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} - \cdots\right)$$

$$+\frac{\cos ax}{a}\left(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \cdots\right) + C$$

$$\int P(x)\sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} - \cdots\right)$$

$$+\frac{\sin ax}{a}\left(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \cdots\right) + C.$$

◄ Dokaz se oslanja na prethodni zadatak. Ako u njemu a zamenimo sa ia, gde je $i = \sqrt{-1}$, dobijamo

$$\int P(x)e^{iax}dx = e^{iax}\left(-i\frac{P(x)}{a} + \frac{P'(x)}{a^2} + i\frac{P''(x)}{a^3} + \cdots\right) + C.$$

Polazeći od Ojlerove formule i razdvajanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo traženi rezultat. ►

Naći integrale:

212. $\int x^3 e^{3x} dx$

◄ Polazeći od primera 210, nalazimo

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{3x} dx &= e^{3x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}\right) + C\\ &= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^3 - x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}\right) + C. \ ►\end{aligned}$$

213. $\int x^7 e^{-x^2} dx.$

◀ Smenom $x^2 = t$, imamo

$$\begin{aligned}\int x^7 e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2}\int x^6 e^{-x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}\int t^3 e^{-t} dt \\ &= \frac{e^{-t}}{2}(-t^3 - 3t^2 - 6t - 6) + C \\ &= -\frac{e^{x^2}}{2}(x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C. \ ▶\end{aligned}$$

214. $\int xe^x \sin x dx$.

◀ Uzimajući $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, i prema zadatku 210 imamo

$$\begin{aligned}I(x) &= \int xe^x \sin x dx = \frac{1}{2i}\int x\left(e^{x(1+i)} - e^{x(1-i)}\right) dx \\ &= \frac{1}{2i} e^{x(1+i)}\left(\frac{x}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}\right) - \frac{1}{2} e^{x(1-i)}\left(\frac{x}{1-i} - \frac{1}{(1-i)^2}\right) + C \\ &= \frac{e^x}{2}\left(x(\sin x - \cos x) + \cos x\right) + C. \ ▶\end{aligned}$$

215. $\int x^2 e^x \cos x dx$.

◀ Uzimajući $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, i prema zadatku 210 imamo

$$\begin{aligned}I(x) &= \int x^2 e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\int x^2 \left(e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{x(1+i)}\left(\frac{x^2}{1+i} - \frac{2x}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{x(1-i)}\left(\frac{x^2}{1-i} - \frac{2x}{(1-i)^2} + \frac{2}{(1-i)^3}\right) + C \\ &= \frac{e^x}{2}\left(x^2(\sin x + \cos x) - 2x\sin x + \sin x - \cos x\right) + C. \ ▶\end{aligned}$$

Napomena. Poslednja dva primera se mogu rešavati i višestrukim parcijalnim integraljenjem, uzimajući za početak $u = e^x x^2$, $dv = \cos x dx$.

216. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx$.

◀ Smenom $\sqrt{x} = t$, $x = t^2, dx = 2tdt$, imamo

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \cos^2 \sqrt{x} dx = 2\int t\cos^2 t dt = \int t(1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin\left(2\sqrt{x}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(2\sqrt{x}\right) + C. \ ▶\end{aligned}$$

217. Dokazati, da ako je R racionalna funkcija, a brojevi $a_1, a_2, ..., a_n$ srazmerni, to je integral

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, ..., e^{a_n x})dx$$

elementarna funkcija.

◀ Napomenimo da su brojevi $a_1, a_2, ..., a_n$ srazmerni, ako ih možemo predstaviti u obliku

$$a_1 = \alpha \frac{p_1}{q_1},\ a_2 = \alpha \frac{p_2}{q_2}, ..., a_n = \alpha \frac{p_n}{q_n},$$

gde je α realan broj, a p_i, q_i su uzajamno prosti celi brojevi. Neka je r najmanji zajednički sadržalac brojeva q_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Tada uzmanjem u datom integralu $e^{\frac{\alpha x}{r}} = u$, dobijamo

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, ..., e^{a_n x})dx = \frac{r}{\alpha} \int R(u^{r_1 p_1}, u^{r_2 p_2}, ..., u^{r_n p_n}) \frac{du}{u} = \int \Phi(u)du,$$

gde je $r_i = \frac{r}{q_i}$ ceo broj, a $\Phi(u)$ je racionalna funkcija. Teorema je dokazana, jer je integral racionalne funkcije, elementarna funkcija. ▶

Naći sledeće integrale:

218. $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$.

◀ U skladu sa dokazom prethodne teoreme uzmimo $e^x = u$. Tada je

$$\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x} = \int \frac{udu}{1+u} = u - \ln(1+u) + C = e^x - \ln(1+e^x) + C. \ ▶$$

219. $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

◀ Stavimo $e^{\frac{x}{6}} = u$. Tada je

$$\begin{aligned} I(x) &= 6\int \frac{du}{u(1+u+u^2+u^3)} = 6\int \frac{du}{u(1+u)(1+u^2)} \\ &= \int \frac{A}{u}du + \int \frac{Bdu}{1+u} + \int \frac{Cu+D}{1+u^2}du \\ &= A\frac{x}{6} + B\ln\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right) + D\arctan e^{\frac{x}{6}} + \frac{C}{2}\ln\left(1+e^{\frac{x}{3}}\right) + C, \end{aligned}$$

gde je $A = 6$, $B = C = D = -3$. Konačno je

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} = x - 3\ln\left(\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right) - 3\arctan e^{\frac{x}{6}} + C. \ ▶$$

220. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx.$

◀ Stavimo $t = e^x$. Tada je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} - \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} \\ &= \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) + \arcsin\frac{1}{t} + C = \ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right) + \arcsin\left(e^{-x}\right) + C. \end{aligned}$$

221. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$

◀ Smenom $e^x = u$, imamo

$$I(x) = \int \frac{du}{u\left(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u^2}du - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-u}}{u^2}du.$$

Nađimo jedan od integrala:

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \int \frac{\sqrt{1+u}}{u^2}du = \int \sqrt{1+u}\,d\left(-\frac{1}{u}\right) = -\frac{\sqrt{1+u}}{u} + \int \frac{d\left(\sqrt{1+u}\right)}{u} \\ &= -\frac{\sqrt{1+u}}{u} + \int \frac{d\left(\sqrt{1+u}\right)}{\left(\sqrt{1+u}\right)^2-1} = -\frac{\sqrt{1+u}}{u} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+u}-1}{\sqrt{1+u}+1} + C \\ &= -\frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C. \end{aligned}$$

Drugi integral se dobija iz prvog zamenom u sa $-u$. ▶

222. Dokazati da se integral

$$\int R(x)e^{ax}dx,$$

gde je R racionalna funkcija, čiji imenilac ima samo realne nule, izražava preko elementarne funkcije i transcendentne funkcije

$$\int \frac{e^{ax}}{x}dx = li(e^{ax}) + C,$$

gde je

$$li\,x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

◀ Racionalna funkcija ima oblik

$$R(x) = \frac{M(x)}{N(x)},$$

gde su $M(x)$ i $N(x)$ polinomi. Izdavajajući ceo deo $P(x)$ ako postoji, dobijamo

$$R(x) = P(x) + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{ki}}{(x-x_k)^i},$$

gde je m_k višestrukost korena x_i; A_{ij} neodređeni koeficijent. Na kraju, integracijom $R(x)$, dobijamo

$$\int R(x)e^{ax}dx = \int P(x)e^{ax}dx + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} A_{ki} \int \frac{e^{ax}}{(x-x_k)^i}dx.$$

Prvi integral se dobija parcijalnim integraljenjem (l puta, gde je l stepen polinoma $P(x)$). Nađimo drugi integral:

$$\begin{aligned}
I_{lk} &= \int \frac{e^{ax}dx}{(x-x_k)^i} = \int e^{ax} d\left(-\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^i}\right) \\
&= -\frac{e^{ax}}{(i-1)(x-x_k)^i} + \frac{a}{i-1}\int \frac{e^{ax}dx}{(x-x_k^{i-1}} \\
&= e^{ax}\left(-\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} - \dots - \frac{a^{i-2}}{(i-1)(i-2)\dots 1(x-x_k)}\right) \\
&\quad + \frac{a^{i-2}}{(i-1)(i-2)\dots 1}\int \frac{e^{ax}dx}{x-x_k} \\
&= -e^{ax}\left(\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} + \dots + \frac{a^{i-2}}{(i-1)!(x-x_k)}\right) \\
&\quad + \frac{a^{i-2}e^{ax_k}}{(i-1)!}\int \frac{e^{a(x-x_k)}d(x-x_k)}{x-x_k} \\
&= -e^{ax}\left(\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} + \dots + \frac{a^{i-2}}{(i-1)!(x-x_k)}\right) + \frac{a^{i-2}e^{ax_k}}{(i-1)!} li(e^{a(
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int R(x)dx = R_1(x) + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} A_{kl}I_{ik},$$

što je i trebalo pokazati. ▶

223. Pod kojim uslovom integral

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx,$$

gde je

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$$

i $a_0, a_1, \dots a_n$ su konstante, predstavlja elementarnu funkciju?

◀ Parcijalnim integraljenjem, dobijamo

$$\begin{aligned}\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx &= \int \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) e^x dx \\ &= a_0 e^x + a_1 li(e^x) - \frac{a_2}{x} e^{ax} + a_2 li(e^x) \\ &\quad - \frac{a_3}{2x^2} - \frac{a_3}{2x} + \cdots - \cdots - \frac{a_n}{(n-1)!} li(e^x).\end{aligned}$$

Odavde sledi, da ako je

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0$$

onda je dati integral elementarna funkcija. ▶

Naći integrale:

224. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$

◀ Parcijalnim integraljenjem, dobijamo

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \int \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x dx \\ &= e^x - 4li(e^x) - \frac{4}{x} e^x + 4li(e^x) \\ &= e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right) + C \ (x \neq 0).\end{aligned}$$ ▶

225. $\int \frac{e^{2x} dx}{x^2 - 3x + 2}.$

◀ Razlaganjem racionalnog dela podintegralne funkcije na proste razlomke i integraljenjem, dobijamo

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{e^{2x} dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{e^{2x}}{x-2} dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1} dx \\ &= e^4 li(e^{2(x-2)}) - e^2 li(e^{2(x-1)}) + C \ (x \neq 1, \ x \neq 2).\end{aligned}$$ ▶

226. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$

◀ Izdvajanjem celog dela i parcijalnim integraljenjem dobijamo

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx = \int (x^2 + 4x + 12) e^{2x} dx + \int \frac{(32x - 48) e^{2x}}{(x-2)^2} dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4}\right) e^{2x} - \int (32x - 48) e^{2x} d\left(\frac{1}{x-2}\right) \\ &= \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2}\right) \frac{e^{2x}}{2} + 64 li(e^{2x-4}) + C \ (x \neq 2).\end{aligned}$$ ▶

Naći integrale koji sadrže funkcije $\ln f(x)$, $f(\ln x)$, $\arctan f(x)$, $\arcsin f($ $\arccos f(x)$, gde je $f(x)$ algebarska funkcija:

227. $\int \ln^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

◄ Parcijalnim integraljenjem, dobijamo

$$\int \ln^n x dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx = x \ln^n x - n I_{n-1} \; (n \in \mathbb{N}) \; I_0 = x.$$

Odatle je

$$\begin{aligned} I_n &= x\ln^n x - n(x\ln^{n-1} x - (n-1)I_{n-2}) = x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)I \\ &= x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)(x\ln^{n-2} x - (n-2)I_{n-3}) \\ &= x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)x\ln^{n-2} x - n(n-1)(n-2)I_{n-3}) \\ &= x\left(\ln^n x - n\ln^{n-1} x + \ldots + (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 2 \cdot \ln x\right) + (-1)^n \cdot n! + C. \end{aligned}$$

228. $\int \ln\left((x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right) \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

◄ Transformacijom podintegralne funkcije za $x > -a$, $x > -b$, sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(\frac{\ln(x+a)}{x+b} + \frac{\ln(x+b)}{x+a}\right) dx \\ &= \int (\ln(x+a)d(\ln(x+b)) + \ln(x+b)d(\ln(x+a)))\, dx \\ &= \int d\left(\ln(x+a) \cdot \ln(x+b)\right) = \ln(x+a) \cdot \ln(x+b) + C. \end{aligned}$$ ►

229. $\int \ln^2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx$.

◄ Parcijalnim integraljenjem sledi,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx \\ &= x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) d\left(2\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + 2x + C. \end{aligned}$$ ►

230. $\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) dx$.

◀ Parcijalnim integraljenjem se dobija:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) dx \\ &= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) dx \\ &= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)}{-2x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\ &+\frac{1}{2}\int \frac{x\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)}{-2x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\ &= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \frac{1}{4}\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right)dx + \frac{1}{4}\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right)dx \\ &= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)dx \\ &= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C \ (|x|<1). \end{aligned}$$ ▶

231. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

◀

$$\begin{aligned} I(x) &= -\int \ln^3 x d\left(\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{\ln^3 x}{2x^2} + \int \frac{3\ln^2 x}{2x^3}dx \\ &= -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \int \ln^2 x d\left(\frac{3}{4x^2}\right) = -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \frac{3\ln^2 x}{4x^2} + \int \frac{3\ln x}{2x^3}dx \\ &= -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \frac{3\ln^2 x}{4x^2} - \int \ln x d\left(\frac{3}{4x^2}\right) = -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \frac{3\ln^2 x}{4x^2} - \frac{3\ln x}{4x^2} + \int\frac{3dx}{4x^3} \\ &= -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \frac{3\ln^2 x}{4x^2} - \frac{3\ln x}{4x^2} - \frac{3}{8x^2} + C \\ &= -\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right) + C \ (x>0). \end{aligned}$$ ▶

232. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

◀ Uzmimo $\ln x = u$; $\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = dv$. Onda je prema primeru 11,

$$v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \ du = \frac{dx}{x}.$$

Sada imamo

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C \ (x>0). \ \blacktriangleright$$

233. $\int x \arcsin(1-x)dx$.

◀ Jednostavnim transformacijama i parcijalnim integraljenjem imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int (1-x)\arcsin(1-x)d(1-x) - \int \arcsin(1-x)d(1-x) \\ &= \int t\arcsin t dt - \int \arcsin t dt \\ &= \frac{t^2}{2}\arcsin t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} - t\arcsin t + \int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{t^2}{2}\arcsin t - t\arcsin t - \sqrt{1-t^2} - I(t), \end{aligned}$$

$$\text{gde je } I(t) = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Smenom $t = \sin\varphi$ dobijamo

$$I(t) = \frac{1}{2}\int \sin^2\varphi d\varphi = \frac{\varphi}{4} - \frac{1}{8}\sin 2\varphi = \frac{1}{4}\arcsin t - \frac{t}{4}\sqrt{1-t^2}.$$

Konačno je

$$I(x) = \frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x) - \frac{x+3}{4}\sqrt{2x-x^2} + C \ (0<x<2). \ \blacktriangleright$$

234. $\int x \arccos\frac{1}{x}dx$.

◀ Parcijalnim integraljenjem sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x\arccos\frac{1}{x}dx = \int \arccos\frac{1}{x}d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{|x|dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,sgn x + C \ (|x|>1). \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

235. $\int \frac{x\arccos x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

◀ Parcijalnim integraljenjem za $|x| < 1$ se dobija:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x \arccos x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \arccos x d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C. \end{aligned}$$ ▶

236. $\int x \arctan x \cdot \ln(1+x^2) dx.$

◀ Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x \arctan x \cdot \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2}\int \arctan x \cdot \ln(1+x^2) d(x^2) \\ &= \frac{1}{2}\arctan x \cdot \int \ln(1+x^2) d(x^2) - \frac{1}{2}\int \left((x^2+1)\ln(1+x^2) - x^2\right) \cdot \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan x \cdot \left((x^2+1)\ln(1+x^2) - x^2\right) - \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2) dx + \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan x \cdot \left((x^2+1)\ln(1+x^2) - x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan \right. \\ &\quad + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\arctan x + C \\ &= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(3+x^2)\arctan x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + \frac{x^2+1}{2}\arctan x \cdot \ln(1+x^2) + \end{aligned}$$

237. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

◀ Na osnovu primera 11 i parcijalnog integrljenja, imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$ ▶

Naći integrale koji sadrže hiperboličke funkcije:

238. $\int \cosh^4 x dx.$

◀ Primenom formule sniženja stepena, imamo

$$\begin{aligned} \int \cosh^4 x dx &= \frac{1}{4}\int (1+\cosh 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cosh 2x + \frac{1}{2}\cosh 4x\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} + \sinh 2x + \frac{1}{8}\sinh 4x\right) + C. \end{aligned}$$ ▶

239. $\int \sinh x \cdot \sinh 2x \cdot \sinh 3x dx$.

◀ Uzastopnom primenom formule o prelazu proizvoda hiperboličkog sinusa u zbir, imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sinh x \cdot \sinh 2x \cdot \sinh 3x dx = \frac{1}{2} \int \sinh 2x (\cosh 4x - \cosh 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\sinh 6x - \sinh 2x - \sinh 4x) dx \\ &= \frac{\cosh 6x}{24} - \frac{\cosh 4x}{16} - \frac{\cosh 2x}{8} + C. \end{aligned}$$ ▶

240. $\int \sqrt{\tanh x} dx$.

◀ Stavimo $t = \sqrt{\tanh x}$. Tada je

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2tdt}{1-t^4};$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\tanh x} dx &= 2 \int \frac{t^2 dt}{1-t^4} = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} - \arctan t + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sqrt{\tanh x}}{1-\sqrt{\tanh x}} \right) - \arctan \sqrt{\tanh x} + C \ (x \geq 0). \end{aligned}$$ ▶

241. $\int \sinh ax \cdot \cos bx dx$.

◀ Dvostrukim parcijalnim integraljenjem, imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sinh ax \cdot \cos bx dx = \frac{\sinh ax}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \int \cosh ax \cdot \sin bx dx \\ &= \frac{\sinh ax \cdot \sin bx}{b} + \frac{a}{b^2} \cosh ax \cdot \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \cdot I(x), \end{aligned}$$

odakle je

$$I(x) = \frac{a \cosh ax \cdot \cos bx + b \sinh ax \cdot \sin bx}{a^2+b^2} + C.$$ ▶

3.6 Razni primeri integraljenja funkcija

Naći integrale:

242. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

◀ Stavimo $x = \frac{1}{t}$. Tada je

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} &= -\int \frac{t^6 dt}{t^2+1} = -\int (t^4 - t^2 + 1)dt + \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctan t + C \\ &= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{x} + C \ (x \neq 0). \ ▶\end{aligned}$$

243. $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}$.

◀ Parcijalnim integraljenjem je

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} &= \int x \frac{x dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1-x^2}{(1-x^2)^2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{4}I,\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2} = \int x \cdot \frac{x dx}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \ (x \neq \pm 1). \ ▶$$

244. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

◀ Pošto je

$$1 + x^4 + x^8 = (1+x^4)^2 - x^4 = (1+x^2+x^4)(1-x^2+x^4)$$

to je

$$\frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\right).$$

Integraljenjem poslednjeg izraza član po član, imamo

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}sgn x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\int \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}dx = -\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right|.$$

Konačno je

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right| + \frac{\pi}{2}sgn x\right) + C, & x \neq 0, \\ C, & x = 0. \end{cases}$$ ►

245. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx.$

◄ Uzmimo smenu $\sqrt{x} = t$. Tada je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx = 2\int \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{2}{3}\int \frac{d(t^3)}{\sqrt{1-t^3}} \\ &= -\frac{4}{3}\sqrt{1-t^3} + C = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C \ (0 \le x < 1). \end{aligned}$$ ►

246. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$

◄ Analizirajmo podintegralnu funkciju kao diferencijal binoma, imamo da je $m = -\frac{2}{3}$, $n = 1$, $p = -\frac{1}{3}$, $a = 1$, $b = -1$. Onda se smenom $z^3 = x^{-1} - 1$ ($\frac{m+1}{n} + p$ je ceo broj) dobija integral

$$-3\int \frac{zdz}{z^3+1},$$

koji se može naći metodom neodređenih koeficijenata:

$$\int \frac{zdz}{z^3+1} = \int \frac{A}{z+1}dz + \int \frac{Bz+D}{z^2-z+1}dz,$$

gde je $A = -B = -D = -\frac{1}{3}$. Svođenjem imenioca drugog integrala na kanonični oblik, sledi

$$\begin{aligned} I(z) &= \int \frac{Bz+D}{z^2-z+1}dz = \frac{1}{3}\int \frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dz + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6}\ln(z^2-z+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Tako je

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{z^2-z+1} + \sqrt{3}\arctan\frac{1-2z}{\sqrt{3}} + C,$$

gde je $z = \left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}$ $(x \neq 0,\ x \neq 1)$. ▶

247. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

◀ Imamo za $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} = \int \frac{dx}{x|x^3|\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}} \\
&= -\frac{sgn x}{3}\int \frac{d\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = -\frac{sgn x}{3}\ln\left|\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| \\
&= -\frac{sgn x}{3}\ln\frac{x^3+2+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{2|x^3|} + C. \ ▶
\end{aligned}$$

248. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

◀ Smenom $x = \sin t$ i parcijalnim integraljenjem integral $I(x)$ postaje je

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{t}{\sin^2 t}\left(1+\sin^2 t\right)dt \\
&= \frac{t^2}{2} + \int \frac{tdt}{\sin^2 t} = \frac{t^2}{2} - \int td(\cot t) \\
&= \frac{t^2}{2} - t\cot t + \ln|\sin t| + C \\
&= \frac{1}{2}\arcsin^2 x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + C\ (0<|x|<1). \ ▶
\end{aligned}$$

249. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}dx$.

◀ Uzmimo smenu $t = \sqrt{1+x^2}$. Tada je

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{1}{2}\int t^2\ln(t^2-2)dt = \frac{1}{2}\int \ln(t^2-2)d\left(\frac{t^3}{3}\right) \\
&= \frac{1}{6}t^3\ln(t^2-2) - \frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2} \\
&= \frac{t^3}{6}\ln(t^2-2) - \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3}+2t+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right) + C,
\end{aligned}$$

gde je $t = \sqrt{1+x^2}$. ▶

250. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$

◀ Imamo da je za $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned}
I(x) &= -\int \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} d\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\
&= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \int \sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)}\right) dx \\
&= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

251. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$

◀ Prema teoremi primera 202 je

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(2+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^2} = -I(x) \\
&= \frac{1}{3}\frac{\cos x}{2+\sin x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{2+\sin x}.
\end{aligned}$$

Poslednji integral se dobija univerzalnom smenom

$$t = \tan\frac{x}{2};\ 2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$I(x) = \int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + C_n.$$

Iz uslova $I(\pi + 2n\pi - 0) = I(\pi + 2n\pi + 0)$ slično kao što smo postupili u primeru 187, nalazimo

$$C_n = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} n + C; C = C_0;\ 2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi.$$

Dakle, za $x \neq \pi + 2n\pi$

$$I(x) = \frac{1}{3}\frac{\cos x}{2+\sin x} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C;$$

$$\text{i } I(\pi + 2n\pi) = \lim_{x \to \pi + 2n\pi} I(x). \ ▶$$

252. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$

◀ Smenom $t = \sqrt{1+\cos x}$, nalazimo

$$I(x) = 2\int \frac{dt}{t^2(t^2-2)} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-\sqrt{2}} + \frac{D}{t+\sqrt{2}} \right) dt$$

gde je $A=0$; $B=-1$; $C=0$; $D=1$. Zato je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}} \right| + C \ (x \neq k\pi). \end{aligned}$$ ▶

253. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \arctan x dx$.
◀ Uzmimo, $x = \tan t$. Tada je

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \arctan x dx = \int t(a\tan^2 t + b)dt = \frac{bt^2}{2} + a\int t \cdot \tan^2 t dt.$$

Poslednji integral izračunavamo parcijalnim integraljenjem:

$$\begin{aligned} \int t \cdot \tan^2 t dt &= \int td(\tan t - t) = t(\tan t - t) = -\int (\tan t - t)dt \\ &= t \cdot \tan t - \frac{t^2}{2} + \ln|\cos t| + C. \end{aligned}$$

I tako je

$$I(x) = \frac{b-a}{2} \arctan^2 x + a\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \right) + C.$$ ▶

254. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx$
◀ Uzmimo smenu $x = \tanh t$. Tada je

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx = 2\int (a\tanh^2 t + b)tdt) = bt^2 + 2a\int t \cdot \tanh^2 t dt.$$

Posledniji integral dobijamo parcijalnium integraljenjem:

$$\int t \cdot \tanh^2 t dt = t(t - \tanh t) - \int (t - \tanh t)dt = \frac{t^2}{2} - t \cdot \tanh t + \ln|\cosh t| + C.$$

Znači,

$$I(x) = \frac{a+b}{4} \ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln\left|1-x^2\right| \right) + C.$$ ▶

255. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx.$

◀ Napomenimo, najpre da je

$$\sin 2x dx = -d\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right), \quad \cos^2 x = \frac{\cos 2x+1}{2},$$

odakle nalazimo

$$I(x) = -\int \frac{d\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right)^2}} = -\ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right) + C. \quad ▶$$

256. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

◀ Stavimo $x = \cos t$. Tada je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int t\cos^3 t dt = -\int t d\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right) \\ &= -t\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right) + \int \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right) dt \\ &= t\left(\frac{\sin^3 t}{3} - \sin t\right) - \cos t - \frac{1}{3}\left(\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right) + C \\ &= -\sqrt{1-x^2}\left(\frac{2+x^2}{3}\right)\arccos x - \frac{6x+x^3}{9} + C \quad (|x|<1). \quad ▶ \end{aligned}$$

257. $\int \frac{x^4 \arctan x}{1+x^2} dx.$

◀ Smenom $\arctan x = t$ dobijamo integral $\int t \cdot \tan^4 t dt$ koji se računa parcijalnim integraljenjem:

$$\begin{aligned} \int t \cdot \tan^4 t dt &= t\left(t - \tan t + \frac{\tan^3 t}{3}\right) - \int \left(t - \tan t + \frac{\tan^3 t}{3}\right) dt \\ &= \frac{t^2}{2} + t\left(\frac{\tan^3 t}{3} - \tan t\right) - \frac{\tan^2 t}{6} - \frac{4}{3}\ln|\cos t| + C. \end{aligned}$$

Zato je

$$I(x) = \frac{\arctan^2 x}{2} + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + C. \quad ▶$$

258. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2} dx.$

◀ Parcijalnim integraljenjem sledi

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2}\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\frac{d(x^2)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Smenom: $t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ za poslednji integral dalje dobijamo

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{dt}{1-2t^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|. \end{aligned}$$

Konačno je

$$I(x) = \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + C \ (x \neq \pm 1). \ ▶$$

259. $\int x^x(1+\ln x)dx$.

◀ Uzmimo smenu $x^x = t$. Tada je $x^x(1+\ln x)dx = dt$. Dakle,

$$\int x^x(1+\ln x)dx = \int dt = t + C = x^x + C \ (x > 0). \ ▶$$

260. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

◀ Smenom $e^x = t$ i parcijalnim integraljenjem imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = \int\frac{\arcsin t}{t^2}dt = -\frac{1}{t}\arcsin t + \int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} \\ &= -\frac{1}{t}\arcsin t - \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} + C \ (0 < t < 1). \end{aligned}$$

Konačno imamo

$$I(x) = -e^x\arcsin e^x - \ln\left(x+\sqrt{1-e^{2x}}\right) + x + C \ (-\infty < x < 0). \ ▶$$

261. $\int \frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}\,dx}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}$.

◀ Stavimo $e^{\frac{x}{2}} = t$. Imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}\,dx}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} = 2\int \frac{\arctan t}{t^2(1+t^2)}dt \\ &= 2\int \frac{\arctan t}{t^2}dt - 2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}dt \\ &= -\arctan^2 t - \frac{2}{t}\arctan t + 2\int \frac{dt}{t(1+t^2)}. \end{aligned}$$

Međutim $\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, te je

$$I(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}} - \left(\arctan e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + x - \ln(1+e^x) + C. \blacktriangleright$$

262. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx$.

◀ Parcijalnim integraljenjem, imamo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} d(e^x) \\ &= e^x \cdot \frac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int e^x \cdot \frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx \\ &= e^x \cdot \frac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int \frac{e^x dx}{1+\cos x} + \int \frac{e^x d(\cos x)}{(1+\cos x)^2} \\ &= e^x \cdot \frac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int \frac{e^x dx}{1+\cos x} - e^x \cdot \frac{1}{1+\cos x} + \int e^x \frac{dx}{1+\cos x} + C \\ &= \frac{e^x \sin x}{1+\cos x} + C, \quad \pm x \neq (2n+1)\pi, \ n \in \mathbb{N}_0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

263. $\int |x| dx$.

◀ Za $x > 0$ imamo

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

analogno za $x < 0$

$$-\int x dx = -\frac{x^2}{2} + C_2.$$

U tački $x = 0$ saglasno definiciji primitivne funkcije, mora da bude $C_1 = C_2 = C$, gde je C proizvoljna konstanta. Zato je za sve $x \in \mathbb{R}$

$$\int |x| dx = \frac{x^2}{2} sgn x + C = \frac{x|x|}{2} + C. \blacktriangleright$$

264. $\int (|1+x| - |1-x|)\, dx$.

◀ Deleći integral na dva i koristeći rezultat prethodnog primera, nalazimo

$$\begin{aligned} I(x) &= \int (|1+x| - |1-x|)\, dx = \int |1+x| dx + \int |1-x| d(1-x) \\ &= \frac{1}{2}\left((1+x)|1+x| + (1-x)|1-x|\right) + C. \end{aligned}$$ ▶

265. $\int e^{-|x|} dx$.

◀ Razmotrimo slučajeve ($x < 0$, $x \geq 0$). Imamo

$$\begin{aligned} \int e^{-|x|} dx &= \int e^{x} dx = e^{x} + C_1 \ (x < 0); \\ \int e^{-|x|} dx &= \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_2 \ (x \geq 0). \end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti primitivne funkcije u 0 imamo $-1 + C_2 = 1 + C_1$, odakle sledi $C_2 = 2 + C_1$. I tako je

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} 2 - e^{-x} + C, & x \geq 0; \\ e^{x} + C, & x < 0, \end{cases}$$

gde je C proizvoljna konstanta. ▶

266. $\int \max(1, x^2) dx$.

◀ Razmotrimo slučajeve : $|x| \leq 1$ i $|x| > 1$. U prvom slučaju je

$$\int \max(1, x^2) dx = \int dx = x + C_1;$$

U drugom slučaju je

$$\int \max(1, x^2) dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Zbog neprekidnosti primitivne funkcije u tačkama $x = \pm 1$, dobijamo

$$1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2 \ (x > 0)$$

$$-1 + C_1 = -\frac{1}{3} + C_2 \ (x < 0).$$

Dakle za $x > 0$ imamo

$$\int \max(1, x^2) dx = \begin{cases} x + C, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Za $x \leq 0$ sledi

$$\int \max(1, x^2)dx = \begin{cases} x + C, & -1 \leq x < 0; \\ \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C, & -\infty < x < -1. \end{cases}$$

Objedinjujući oba rezultata u jedan imamo

$$\int \max(1, x^2)dx = \begin{cases} x + C, & |x| \leq 1; \\ \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} sgn x + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

gde je C proizvoljna konstanta. ►

267. $\int \varphi(x)dx$, gde je $\varphi(x)$ rastojanje broja x do najbližeg celog broja.

◄ Po definiciji je $\varphi(x) = |x - n|$; $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, zato je (primer 264)

$$I(x) = \int \varphi(x)dx = \frac{1}{2}(x - n)|x - n| + C_n, \ n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}.$$

Iz neprekidnosti primitivne funkcije sledi

$$I\left(n + \frac{1}{2} - 0\right) = I\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{tj. } \frac{1}{8} + C_n = -\frac{1}{8} + C_{n+1}, \ C_{n+1} = C_n + \frac{1}{4},$$

odakle se dobija $C_n = \frac{n}{4} + C$, gde je $C = C_0$ proizvoljna konstanta. S obzirom da je $n \leq x + \frac{1}{2} < n + 1$, to je $n = \left[x + \frac{1}{2}\right]$. Konačno dobijamo

$$I(x) = \frac{1}{2}\left(x - \left[x + \frac{1}{2}\right]\right)\left|x - \left[x + \frac{1}{2}\right]\right| + \frac{1}{4}\left[x + \frac{1}{2}\right] + C. \ ►$$

268. $\int [x]|\sin \pi x|dx.$

◄ Po definiciji, imamo

$$[x]|\sin \pi x| = (-1)^n n \sin \pi x; \ n \leq x < n + 1, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Zato je

$$\int [x]|\sin \pi x|dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} n \cos \pi x + C_n; \ n \leq x < n + 1.$$

S obzirom na neprekidnost primitivne funkcije, u tačkama $x = n + 1$ mora biti

$$\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot n \cos \pi x + C_n\right]\Big|_{x=n+1} = \left[\frac{(-1)^{n+2}}{\pi}(n + 1)\cos \pi x + C_{n+1}\right]\Big|_{x=n+1},$$

odakle sledi

$$C_{n+1} = C_n + \frac{2n+1}{\pi}.$$

Iz ove poslednje veze sledi

$$C_n = C + \frac{n^2}{\pi} \ (C = C_0).$$

Zato je

$$\int [x]|\sin \pi x| dx = \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cos \pi x + n\right] \cdot \frac{n}{\pi} + C; \ n \le x < n+1.$$

Kako se x menja u navedenim razmacima to je $n = [x]$. Sada konačno imamo

$$\int [x]|\sin \pi x| dx = \frac{[x]}{\pi}([x] - \frac{(-1)^{[x]} \cos \pi x}{\pi}) + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta. ▶

269. $\int f(x) dx$, gde je

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \le 1; \\ 1 - |x|, & |x| > 1. \end{cases}$$

◀ Vršeći integraljenje na navedenim razmacima, dobijamo

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x + \frac{x^2}{2} + C_1, & -\infty < x < -1; \\ x - \frac{x^3}{3} + C_2, & -1 \le x < 0; \end{cases}$$

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + C_3, & 0 \le x \le 1; \\ x - \frac{x^2}{2} + C_4, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Zbog neprekidnosti primitivne, mora biti

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{6}, \ C_2 = C_3, \ C_4 - C_3 = \frac{1}{6},$$

odakle se dobija

$$C_2 = C_3 = \frac{1}{6} + C_1,$$

gde je C_1 proizvoljna konstanta. Uzimajući zbog simetrije u rezultatu $C_1 = -\frac{1}{6} + C$, C je proizvoljna konstanta, imamo

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + C, & |x| \le 1; \\ x - \frac{x}{2}|x| + \frac{1}{6} sgn x + C, & 1 < |x| < +\infty. \end{cases}$$ ▶

270. $\int f(x)dx$, gde je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0; \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2x, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

◀ Očigledno je

$$\int f(x)dx = \begin{cases} x + C_1, & -\infty < x < 0; \\ \frac{x^2}{2} + x + C_2, & 0 \leq x \leq 1; \\ x^2 + C_3, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Pošto je primitivna funkcija neprekidna, to mora biti $C_1 = C_2 = C_3 - \frac{1}{2}$. Dakle,

$$\int f(x)dx = \begin{cases} x + C, & -\infty < x < 0; \\ \frac{x^2}{2} + x + C, & 0 \leq x \leq 1; \\ x^2 + \frac{1}{2} + C, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$ ▶

271. Naći $f(x)$, ako je $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.
◀ Smenom $x = \sqrt{t}$, sleduje $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, odakle je $f(x) = 2\sqrt{x} + C$. ▶

272. Naći $f(x)$, ako je

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1; \\ x, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

i $f(0) = 0$.
◀ Uzmimo $t = \ln x$. Tada je

$$f'(t) = \begin{cases} 1 + C_1, & -\infty < t \leq 0; \\ e^t + C_2, & 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Neprekidnost primitivne funkcije uzrokuje jednakost: $C_1 = 1 + C_2$. Zato je

$$f(t) = \begin{cases} t + C_1, -\infty < t \leq 0; \\ e^t - 1 + C_1, & 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Proizvoljnu konstantu nalazimo iz uslova: $f(0) = 0$. Odatle sledi $C_1 = 0$. ▶

273. Neka je $f(x)$ monotona i neprekidna funkcija i $f^{-1}(x)$ njena inverzna funkcija. Dokazati, da ako je

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

to je

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + C.$$

◀ Prema uslovima teoreme, važi $x = f\left(f^{-1}(x)\right) = F'\left(f^{-1}(x)\right)$. Integraljenjem poslednje jednakosti po $f^{-1}(x)$, dobijamo

$$\int x d\left(f^{-1}(x)\right) = F\left(f^{-1}(x)\right) + C,$$

odakle sledi

$$\int x d\left(f^{-1}(x)\right) = xf^{-1}(x) - \int f^{-1}(x)dx = F\left(f^{-1}(x)\right) + C,$$

što je i trebalo dokazati. ▶

Razmotrimo neke primere:

a) $f(x) = x^n (n > 0)$; b) $f(x) = e^x$; c) $f(x) = \arcsin x$; d) $f(x) = Arthx$.

◀ a) Imamo da je $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ i $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Prema dokazanoj teoremi je

$$\int f^{-1}(x)dx = x \cdot x^{\frac{1}{n}} - \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}},$$

što se može podvrgnuti neposrednoj proveri.

Analogno se proveravaju i ostali slučajevi. ▶

3.7 Zadaci za samostalni rad

Koristeći svojstvo invarijantnosti formule integraljenja, naći integrale:

1. $\int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)} dx$. **2.** $\int \frac{x(\ln(1+x) + \ln(1-x))^2}{x^2-1} dx$. **3.** $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
4. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$. **5.** $\int \frac{x^8-1}{x(x^8-x^4+1)}$. **6.** $\int \frac{x^5-x}{x^8+3x^4+1} dx$.
7. $\int \frac{(x^8-x^2)dx}{x^{12}+3x^6+1}$. **8.** $\int \sqrt{1-2x^2+x^4}dx$. **9.** $\int \arcsin(\sin x)dx$.
10. $\int \arccos(\cos x)dx$.

Metodom smene naći integrale:

11. $\int \frac{xe^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$. **12.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$. **13.** $\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}$.
14. $\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^6+2x^4+2x^2+1}} dx$. **15.** $\int \frac{x^3-x}{x^6+4x^4+4x^2+1} dx$. **16.** $\int \frac{2x^6+1}{x^6(1+x^2)} dx$.

Primenom parcijalnog integraljenja naći sledeće integrale:

17. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 18. $\int \arcsin x\cdot\arccos x dx$. 19. $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$.

20. $\int x^2e^x\sin x dx$. 21. $\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$. 22. $\int \frac{x^7dx}{(1+x^4)^2}$.

23. $\int \frac{x^8dx}{(x^2-1)^3}$. 24. $\int \frac{x^8dx}{(x^4-1)^3}$.

Metodom neodređenih koeficijenata, naći integrale:

25. $\int \frac{2x^5-5}{x^4-5x^2+6}dx$. 26. $\int \left(\frac{x}{x^2+6x+3}\right)^2 dx$. 27. $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$.

28. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$. 29. $\int \frac{dx}{x^7-4x^5+6x^3-4x}$. 30. $\int \frac{x^5-x^2-1}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}dx$.

Naći algebarski deo u integralima:

31. $\int \frac{3x^5+4x^3+x}{(x^2+x+1)^2}dx$. 32. $\int \frac{2-3x+x^2}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2}dx$. 33. $\int \frac{2-5x^6}{(x^6+1)^2}dx$.

34. $\int \frac{1-64x^7-7x^8}{(1+x^2)^2}dx$.

Naći integrale od iracionalnih funkcija:

35. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}dx$. 36. $\int \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{2x^3+9x^2+15x+9}dx$. 37. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$.

38. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}dx$. 39. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 40. $\int \frac{8x^4+7x^3+6x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

41. $\int \frac{dx}{(x^4+4x^3+6x^2+4x)\sqrt{x^2+2x+2}}$. 42. $\int \frac{xdx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+1}}$. 43. $\int \frac{2x^3-x^2+x+1}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

44. $\int \frac{x^8-1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$. 45. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. 46. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Naći integrale od trigonometrijskih funkcija:

47. $\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^4}$. 48. $\int \frac{dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$. 49. $\int \frac{dx}{\cos^5 x-\sin^5 x}$.

50. $\int \frac{dx}{(\sin x+2\sec x)^2}$. 51. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$. 52. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}}$.

53. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$. 54. $\int \frac{dx}{4+3\tan x}$.

Naći integrale:

55. $\int \frac{x}{(e^{x^2}+1)^2}e^{\frac{5x^2}{4}}dx$. 56. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^3 2x}}$. 57. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{\cos^3 2x}}$.

58. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt[4]{\cos 2x}}$. 59. $\int \tan x\sqrt{\cos 2x}dx$. 60. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

61. $\int \frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$. 62. $\int \frac{x^2dx}{(\sin x-x\cos x)^2}$.

3.8 Rezultati

1. $-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x}$. 2. $\frac{1}{6}\ln^2(1-x^2)$. 3. $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. 4. $\frac{8-5x^2}{15\sqrt{(x^2+1)^5}}$.

5. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^8-x^4+1}{x^4}$. 6. $\frac{1}{2}\arctan\frac{x^4+1}{x^2}$. 7. $\frac{1}{3}\arctan\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)-\frac{\pi}{2}sgn x$.
8. $\frac{x^3}{3}-x-\frac{4}{3}$, za $-\infty < x < 1$; $x-\frac{x^3}{3}$, za $-1 \le x < x$;

$\frac{x^3}{3} - x + \frac{4}{3}$, ako je $1 \leq x < +\infty$. **9.** $\frac{(-1)^k}{2}(x - k\pi)^2 + \frac{\pi^2}{8}(1 - (-1)^k)$, gde je $k = \left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$. **10.** $\frac{1}{2}|x - 2k\pi|(x - 2k\pi) + k\pi^2$, gde je $k = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$. **11.** $e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$. **12.** $2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}(x^2 - 2)\sqrt{4 - x^2}$.
13. $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|$. **14.** $\ln\left(x\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right)$.
15. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+3x^2+1}$. **16.** $\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}$. **17.** $x - \sqrt{1 - x^2}\arcsin x$.
18. $\left(\frac{\pi}{2}x - 2\sqrt{1 - x^2}\right)\arcsin x - x\arcsin^2 x + 2x + \sqrt{1 - x^2}$.
19. $\frac{x-2}{x+2}e^x$. **20.** $\left(\frac{1}{2}(x^2 - 1)\sin x - \frac{1}{2}(x - 1)^2\cos x\right)e^x$.
21. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}\arctan^2 x$. **22.** $\frac{1}{4}\ln(x^4 + 1) - \frac{x^4}{4(x^4+1)}$.
23. $-\frac{x^6}{6(x^3-1)^2} - \frac{x^3}{3(x^3-1)} + \frac{1}{3}\ln|x^3 - 1|$.
24. $\frac{-x^4}{8(x^4-1)^2} - \frac{5x}{32(x^4-1)} + \frac{5}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{5}{64}\arctan x$.
25. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|$.
26. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right| - \frac{5x+12}{x^2+6x+8}$. **27.** $\frac{1}{4}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} - \frac{7}{4(x-1)^2}$.
28. $\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{18}\ln(x^2 + 1) + \frac{7}{288}\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{24(x^2+4)}$.
29. $\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2}{x^2-1}\right|$.
30. $x - \ln|x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}sgnx$. **31.** $-\frac{x^3+x}{x^3+x+1}$.
32. $-\frac{9x^2+10x+7}{(x+1)(x^2+x+1)}$. **33.** $\frac{x}{x^6+1}$. **34.** $\frac{x+8}{x^8+1}$.
35. $2\ln|\sqrt{x+1} - 1| - \frac{x+1}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2} - \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}$.
36. $\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{3}{2}}$. **37.** $4\sqrt{\sqrt{x+2} - 1} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-1}{2}}$.
38. $\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{|x|}$. **39.** $\frac{1}{3}\arcsin x - \frac{2x^3+3x}{8}\sqrt{1 - x^2}$.
40. $2(x^3 + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} + 2\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)$.
41. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{2}(x+1)}\right| - \frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x+2}}$.
42. $\frac{(3x+8)\sqrt{x^2+1}}{8(x+2)} + \frac{3}{8}\arctan\sqrt{x^2 + 1}$.
43. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{3(1+x+x^2)}-(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{1-x-x^2}} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$.
44. $\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+1}}{4}\right|$. **45.** $\frac{-t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2}$, gde je $t = \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}$.
46. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3)\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}$. **47.** $-\frac{1}{4}\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{12}\cot^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
48. $\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + \frac{2}{3}\arctan(\sin x - \cos x)$.
49. $-\frac{2\sqrt{2}}{5}\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \frac{2}{5\sqrt{\sqrt{5}-2}}\arctan\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{\sqrt{5}-2}} - \frac{1}{5\sqrt{\sqrt{5}+2}}\ln\left|\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{2}\cos t}\right|$, gde je $t = x - \frac{\pi}{4}$. **50.** $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\sin 2x)} + \frac{4}{15\sqrt{5}}\arcsin\frac{4\sin 2x+1}{4+\sin 2x}$.

51. $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x}$. **52.** $\ln\left|\frac{\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}-\cos 2x}{\sin 2x}\right|$.
53. $\arcsin(\sin x - \cos x)$. **54.** $\frac{4x}{25} + \frac{3}{25}\ln|4\cos x + 3\sin x|$.
55. $-\frac{e^{\frac{x^2}{4}}}{2(e^{x^2}+1)} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{e^{\frac{x^2}{2}}+\sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}}+1}{e^{\frac{x^2}{2}}-\sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}}+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{x^2}{4}}}$. **56.** $\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
57. $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$. **58.** $-\frac{1}{2}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{\cos 2x}+\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}-\cos x}\right|$.
59. $\arctan\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos 2x}$. **60.** $x\tan\frac{x}{2}$. **61.** $\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}$. **62.** $\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$.

Glava 4

Određeni integral

4.1 Određeni integral kao limes zbira

1^0 Rimanov integral:

Neka je funkcija f definisana na segmentu $[a, b]$ i neka je $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ proizvoljna podela tog segmenta na n delova. Označimo $\Delta\, x_i = x_{i+1} - x_i$, $\lambda = \max \Delta\, x_i$. Izaberimo u svakom segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = \overline{0, n-1})$ tačku $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ i formirajmo izraz

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \,\Delta\, x_i,$$

koji se naziva integralnom sumom.

Ako postoji konačni limes $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$ koji ne zavisi od načina podele segmenta $[a, b]$ i izbora tačaka ξ_i, onda se broj I naziva određenim integralom funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označava se simbolom

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

a funkcija f se naziva Riman-integrabilnom na segmentu $[a, b]$ (u svojstvenom smislu).

Iz navedene definicije proizilazi da ako funkcija f nije ograničena na segmentu $[a, b]$ onda ona na njemu nije Riman-integrabilna.

2^0 Donja i gornja Darbuova integralna suma:

Donjom i gornjom Darbuovom sumom funkcije f na segmentu $[a, b]$ pri datoj podeli P tog segmenta, nazivaju se redom sume

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \bigtriangleup x_i, \ \overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \bigtriangleup x_i$$

gde je

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}, \ M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}.$$

3^0 Kriterijumi integrabilnosti

Funkcija f je Riman-integrabilna na segmentu $[a, b]$ ako i samo ako je

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\overline{S}_n - \underline{S}_n \right) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \bigtriangleup x_i = 0,$$

gde je $\omega_i = M_i - m_i$ oscilacija funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$. Specijalno, neprekidne, neprekidne deo po deo i monotone funkcije na segmentu $[a, b]$ su Riman-integrabilne na tom segmentu.

4^0 Donji i gornji Darbuov integral

Neka su $S_\star = \{\underline{S}_n\}$ i $S^\star = \{\overline{S}_n\}$ redom skupovi svih donjih i gornjih Darbuovih suma ograničene funkcije f na segmentu $[a, b]$. Brojevi

$$I_\star = \sup S_\star, \ I^\star = \inf S^\star$$

se redom zovu donji i gornji Darbuov integral funkcije f na segmentu $[a, b]$. Funkcija f je Riman-integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako je

$$I_\star = I^\star.$$

5^0 Žordanova mera skupa. Skupovi Žordanove mere nula.

Neka je X neki podskup skupa svih tačaka segmenta $[a, b]$. Funkcija

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in X; \\ 0, & x \notin X, \end{cases}$$

naziva se karakterističnom funkcijom skupa X.

Definicija 1. Gornji Darbuov integral funkcije φ na segmentu $[a, b]$ naziva se spoljašnjom Žordanovom merom skupa X.

Definicija 2. Donji Darbuov integral funkcije φ na segmentu $[a, b]$ naziva se unutrašnjom Žordanovom merom skupa X.

Dakle, ako su $\overline{C}(X)$ i $\underline{C}(X)$ redom spoljašnja i unutrašnja Žordanova mera skupa X to je po definiciji

$$\overline{C}(X) = \inf \left\{ \overline{S}_\varphi = \sum_i M_{i\varphi} \bigtriangleup x_i = \sum_i{}' \bigtriangleup x_i \right\},$$

$$\underline{C}(X) = \sup \left\{ \underline{S}_\varphi = \sum_i m_{i\varphi} \bigtriangleup x_i = \sum_i{}'' \bigtriangleup x_i \right\}$$

gde je

$$M_{i\varphi} = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{\varphi(x)\}, \ m_{i\varphi} = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{\varphi(x)\}.$$

Simbol $\sum_i{}'$ označava zbir dužina onih segmenata $[x_i, x_{i+1}]$ podele P segmenta $[a, b]$, koji sadrže tačke skupa X, a simbol $\sum_i{}''$ predstavlja zbir dužina onih segmenata $[x_i, x_{i+1}]$, čije sve tačke pripadaju skupu X.

Iz definicija 1 i 2 sledi da unutrašnja Žordanova mera skupa nije veća od spoljašnje mere. Za skupove kod kojih je spoljašnja Žordanova mera jednaka unutrašnjoj Žordanovoj meri koristi se termin Žordanova mera.

Defincija 3. Konačan ili beskonačan sistem intervala $\{W\}$ pokriva brojni skup X', ako svaki element $x' \in X'$ pripada bar jednom intervalu iz skupa $\{W\}$.

Definicija 4. Kažemo da je brojni podskup X Žordanove mere 0 ako za svaki pozitivan broj ε postoji konačan sistem intervala $\{W\}$ koji pokriva X i čiji je zbir dužina manji od ε.

Primer. Skup $\left\{x_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ima Žordanovu meru nula. Zaista, neka je $\varepsilon > 0$ unapred zadat broj. Očigledno je da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za $n > n_0 : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ (za to je dovoljno uzeti $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$). Dakle, počev od $\frac{1}{n_0}$ svi elementi datog skupa pripadaju intervalu $\left]0, \frac{\varepsilon}{2}\right[$. Zatim, svaku tačku $x_s = \frac{1}{s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n_0)$ možemo pokriti redom intervalom dužine $\frac{\varepsilon}{2^{s+1}}$; zbir dužina tih intervala je

$$\varepsilon \sum_{s=1}^{n_0} \frac{1}{2^{s+1}} = 2\varepsilon \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n_0+2}} \right) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2^{n_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Znači, dati skup je pokriven sistemom od $n_0 + 1$ intervala čiji je zbir dužina manji od ε. To po definiciji 4. on ima Žordanovu meru nula.

6^0 Skupovi Lebegove mere 0.

Kažemo da brojni skup X ima Lebegovu[1] meru 0, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji najviše prebrojiv sistem intervala $\{W_n\}$ sa dužinama respektivno δ_n čija unija pokriva X tako da je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \sum_{i=1}^{+\infty}\delta_i < \varepsilon.$$

Svaki Žordanov skup mere 0 je Lebegov skup mere 0. Zatim, svaki prebrojiv skup je Lebegov skup mere 0. Interval $]a,b[$ $(a < b)$ nije Lebegov skup mere 0.

Lebegova teorema. Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija, gde je $E \subset [a,b]$ skup njenih tačaka prekida. Tada f ima Rimanov integral na $[a,b]$, ako i samo ako je E skup Lebegove mere 0.

7^0 Rešeni zadaci.

1. Naći integralnu sumu S_n funkcije $f(x) = 1 + x$ na segmentu $[-1,4]$ deleći ga na n jednakih delova i uzimajući za istaknute tačke ξ_i $(i = \overline{0, n-1})$ sredine tih razmaka.

◀ Očigledno je $\Delta x_i = \frac{5}{n}$. Prema uslovu je $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ $(i = \overline{0, n-1})$. Pošto je $x_i = -1 + \frac{5i}{n}$, $x_{i+1} = -1 + \frac{5(i+1)}{n}$, $f(\xi_i) = 1 + \xi_i$, to je

$$S_n = \frac{5}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{5}{n}\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2}\right) = 12,5. \quad ▶$$

2. Za datu funkciju f naći donju $\underline{S}_n$ i gornju $\overline{S}_n$ integralnu sumu na datim odsečcima, deleći ih na n jednakih delova, ako je:

a) $f(x) = x^3, -2 \le x \le 3$; b) $f(x) = \sqrt{x}, 0 \le x \le 1$;

c) $f(x) = 2^x, 0 \le x \le 10$.

◀ a) Pošto je funkcija $f(x) = x^3$ neprekidna i rastuća na segmentu $[-2,3]$, to ona postiže redom najmanju i najveću vrednost na levom i desnom kraju segmenta $[x_i, x_{i+1}]$ kada $x \in [x_i, x_{i+1}]$, pri proizvoljnoj podeli $P = \{x_0 = -2 < x_1 < \dots < x_n = 3\}$ segmenta $[-2,3]$. Prema uslovu je $\Delta x_i = \frac{5}{n}, x_i = -2 + \frac{5i}{n}$ $(i = \overline{0,n})$. Na taj način je

$$\underline{S}_n = \frac{5}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(-2 + \frac{5i}{n}\right)^3, \quad \overline{S}_n = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-2 + \frac{5i}{n}\right)^3.$$

Uzimajući u obzir da je

[1] Ovaj deo je uzet iz drugog izdanja knjige koji je skraćeni prvi deo

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

konačno dobijamo

$$\underline{S}_n = 16\frac{1}{4} - \frac{176}{2n} + \frac{125}{4n^2}, \quad \overline{S}_n = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

Način rešavanja primera b) i c) je isti kao kod primera a) zato navodimo samo konačan rezultat:

b)

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}, \quad \overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}};$$

c)

$$\underline{S}_n = \frac{10230}{n\left(2^{\frac{10}{n}} - 1\right)}, \quad \overline{S}_n = \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n\left(2^{\frac{10}{n}} - 1\right)}. \ ►$$

3. Naći donju integralnu sumu za funkciju $f(x) = x^4$ na segmentu $[1, 2]$, deleći ga na delove čije dužine čine geometrijski niz. Čemu je jednak limes te sume kad $n \to \infty$?

◄ Po uslovu je $x_i = x_0 q^i$ ($i = \overline{1, n}$), $x_0 = 1$, $x_n = 2$, odakle je, $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$ $(i = \overline{0, n})$. Zbog neprekidnosti i rastućosti funkcije $f(x) = x^4$ na svakom od segmenata podele $[x_i, x_{i+1}]$, to ona postiže najmanju vrednost u tački x_i $(i = \overline{0, n-1})$, sledi (računjući da je $\Delta x_i = 2^{\frac{i}{n}} \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)$),

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{4i}{n}} \cdot 2^{\frac{i}{n}} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) = \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{5i}{n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)\left(2^5 - 1\right)}{\sqrt[n]{32} - 1}.$$

Prelaskom na graničnu vrednost kad $n \to \infty$, dobijamo (podelimo najpre brojilac i imenilac sa $\frac{1}{n}$): $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n = 31\frac{\ln 2}{\ln 32} = \frac{31}{5}$.

Pri rešavanju primera 4-12, koristimo činjenicu da Rimanov integral funkcije f ne zavisi od načina podele segmenta i načina izbora istaknutih tačaka $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. ►

4. Polazeći od definicije određenog integrala, naći $\int\limits_0^T (v_0 + gt)\, dt$, gde su v_0 i g konstante.

◄ Podintegralna funkcija je linearna, i zato uzimajući da je ξ_i jednako

sredini segmenta $[t_i, t_{i+1}]$ pri proizvoljnoj podeli P segmenta $[0, T]$, obrazujemo integralnu sumu i izračunavajući je dobijamo vrednost integrala. Neka je $\xi_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$; tada je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (v_0 + g\xi_i) \Delta t_i = v_0 \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i + \frac{g}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^2 - t_i^2) \\ &= v_0 T + \frac{g}{2} (t_n^2 - t_0^2) = v_0 T + \frac{gT^2}{2}, \end{aligned}$$

jer je $t_0 = 0$, $t_n = T$. Prema gore rečenom je $\int\limits_0^T (v_0 + gt)\, dt = v_0 T + \frac{gT^2}{2}$. ▶

5. $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx$.

◀ Deleći segment $[-1, 2]$ na n jednakih delova i birajući istaknute tačke ξ_i jednake levom kraju x_i segmanta $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = \overline{0, n-1})$, dobijamo

$$S_n = \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(-1 + \frac{3i}{n}\right)^2 = \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}\right) = \frac{3}{n} \left(n - \frac{3(n-1)}{2n}\right).$$

Prelaskom na graničnu vrednost, nalazimo $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$. ▶

6. $\int\limits_0^1 a^x dx$ $(a > 0)$.

◀ Slično prethodnom primeru je

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a^{\frac{i}{n}} = \frac{a-1}{n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)}.$$

Prelaskom na graničnu vrednost, nalazimo $\int\limits_0^1 a^x dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a-1}{\ln a}$ (korišćena je granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(a > 0)$). ▶

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

◀ Postupajući kao u prethodna dva primera, dobijamo

$$S_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{i\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin \frac{\pi}{4n}},$$

(korišćena je formula $\sum\limits_{j=1}^{k} \sin j\alpha = \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq 2k\pi$) odakle prelaskom na graničnu vrednost kad $n \to \infty$, i uzimajući u obzir da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$, na osnovu neprekidnosti funkcije $f(x) = \sin x$, nalazimo da je $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. ►

8. $\int\limits_0^x \cos t dt$.

◄ Deleći segment $[0, x]$ na n jednakih delova i uzimajući $\xi_i = x_i = i\frac{x}{n}$, dobijamo

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{ix}{n} = \frac{x}{n}\left(1 + \cos\frac{x}{n} + \cos\frac{x}{2n} + \cdots + \cos\frac{(n-1)x}{n}\right) \\ &= \frac{x}{n}\left(1 + \frac{\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2n}\right)}{\sin\frac{x}{2n}}\right) = \frac{x}{n} + \frac{x}{2n}\cdot\frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2n}\right)}{\sin\frac{x}{2n}}, \end{aligned}$$

(korišćena je formula $\sum\limits_{i=1}^{k} \cos i\alpha = \frac{\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq 2k\pi$). Kako je zatim

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2n}}{\sin\frac{x}{2n}} = 1 \text{ i } \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2n}\right) = \sin\frac{x}{2}, \text{ to je}$$

$$\int_0^x \cos t dt = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x. \text{ ►}$$

9. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$ ($0 < a < b$).

◄ Neka je P proizvoljna podela segmenta $[a, b]$ tačkama x_i ($i = \overline{0, n}$). Uzimajući $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$, $0 < x_i < \xi_i < x_{i+1}$ ($i = \overline{0, n-1}$) dobijamo

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\Delta x_i}{x_i x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Na taj način je, $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. ►

10. $\int\limits_a^b x^m dx$ ($0 < a < b$, $m \neq -1$).

◀ Izaberimo tačke podele segmenta $[a, b]$ tako da njihove apscise čine geometrijski niz: $x = x_0 q^i$, $x_0 = a$, $x_n = b$ $(i = \overline{1, n})$. Tada je $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $x_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i) \triangle x_i$ (istaknute tačke ξ_i jednake su tačkama podele x_i). Imamo

$$S_n = a^{m+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i(m+1)}{n}} = \frac{a^{m+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}$$

$$= \frac{\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)\dfrac{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\frac{1}{n}}}{\dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}{\frac{m+1}{n}}} \cdot \frac{1}{m+1}.$$

Uzimajući graničnu vrednost kad $n \to \infty$ sledi

$$\int_a^b x^m dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\ln\frac{b}{a}}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}. \ ▶$$

11. $\int\limits_a^b \frac{1}{x} dx$ $(0 < a < b)$.

◀ Stavljajući $x_i = aq^i, \xi_i = x_i$, $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ (primer 10) dobijamo

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\triangle x_i}{\xi_i} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{x_{i+1}}{x_i} - 1\right) = \sum_{i=0}^{n-1}(q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right),$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln\frac{b}{a}. \ ▶$$

12. Izračunati Puasonov integral $\int\limits_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx$ ako je:

a) $|\alpha| < 1$; **b)** $|\alpha| > 1$.

◀ Podelimo segment $[0, \pi]$ tako da je $\triangle x_s = \frac{\pi}{n}$, $\xi_s = x_s$. Neka je $z = e^{ix}$ i $\overline{z} = e^{-ix}$. Tada je $1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2 = (\alpha - z)(\alpha - \overline{z})$, kao i

$$f(x_s) = \ln\left(\alpha - e^{\frac{is\pi}{n}}\right)\left(\alpha - e^{-\frac{is\pi}{n}}\right),$$

$$S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\ln\left(\alpha - e^{\frac{is\pi}{n}}\right)\left(\alpha - e^{-\frac{is\pi}{n}}\right) = \frac{\pi}{n}\ln\prod_{s=0}^{n-1}\left(\alpha - e^{\frac{is\pi}{n}}\right)\left(\alpha - e^{-\frac{is\pi}{n}}\right).$$

Pošto je

$$\prod_{s=0}^{n-1}\left(\alpha - e^{\frac{is\pi}{n}}\right)\left(\alpha - e^{-\frac{is\pi}{n}}\right) = \frac{(\alpha^{2n}-1)(\alpha-1)}{\alpha+1},$$

to je $S_n = \frac{\pi}{n}\ln\frac{(\alpha^{2n}-1)(\alpha-1)}{\alpha+1}$. Sada je:

a) Ako je $|\alpha| < 1$, onda $\alpha^{2n} \to 0$ kad $n \to \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

b) Neka je $|\alpha| > 1$; predstavimo S_n u obliku:

$$S_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\cdot\alpha^{2n}\right) = 2\pi\ln|\alpha| + \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\right).$$

Pošto $\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}} \to 1$ kad $n \to \infty$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2\pi\ln|\alpha| = \pi\ln\alpha^2$. Znači,

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx = \begin{cases} 0, & |\alpha|<1; \\ \pi\ln\alpha^2, & |\alpha|>1. \end{cases} \quad ▶$$

Napomena. Prilikom rešavanja prethodnog primera korišćena je **Ojlerova formula:**

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

13. Neka su f i φ neprekidne funkcije na segmentu $[a,b]$. Dokazati da je

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\,\triangle\, x_i = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

gde je $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $x_i \le \theta_i \le x_{i+1}$ $(i=\overline{0,n-1})$.

◀ Iz neprekidnosti funkcija f i φ sledi integrabilnost proizvoda $f\varphi$ na segmentu $[a,b]$. Zatim je $|f(x)| \le M$ ($M>0$, M je konstanta) kao i zbog ravnomerne neprekidnosti funkcije φ na $[a,b]$ sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je za $\triangle\, x_i < \delta$: $\omega_{\varphi[x_i,x_{i+1}]} < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$ ($\omega_{\varphi[x_i,x_{i+1}]}$ je oscilacija funkcije φ na segmentu $[x_i,x_{i+1}]$) Uzmimo podelu P segmenta $[a,b]$ za koju je $\triangle\, x_i < \delta$. Očigledno je $S_n = \sigma_n + \gamma_n$, gde je $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\,\triangle\, x_i$, $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\,\triangle\, x_i$ i $\gamma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i))\,\triangle\, x_i$. Prema

navedenim napomenama, $\sigma_n \to \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx$ kad $\lambda \to 0$, zatim $\gamma_n \to 0$ ako $\lambda \to 0$, jer je tačna procena

$$|\gamma_n| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| \triangle x_i \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{\varphi[x_i, x_{i+1}]} \triangle x_i < \frac{M\varepsilon(b-a)}{M(b-a)} = \varepsilon$$

ako je $\triangle x_i < \delta$ $(i = \overline{0, n-1})$. Zato je

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx. \ ▶$$

14. Neka je funkcija f ograničena i monotona na $[0,1]$. Dokazati da je

$$\int\limits_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

◀ Neka su $\underline{S}_n$ i $\overline{S}_n$ redom donja i gornja Darbuova suma funkcije f koje odgovaraju proizvoljnoj podeli segmenta $[0,1]$ na n jednakih delova. Zbog monotonosti funkcije f na $[0,1]$ imamo

$$\underline{S}_n - \overline{S}_n = \frac{1}{n}|f(1) - f(0)| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pošto je $\underline{S}_n \leq \int\limits_0^1 f(x)dx \leq \overline{S}_n$, $\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$, gde je S_n proizvoljna integralna suma funkcije f pri fiksiranoj podeli segmenta integraljenja, to je

$$\int\limits_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right). \ ▶$$

Pre rešavanja novih primera navodimo čitaocu osnovna svojstva određenog integrala i neke formule.

I. Svojstva izražena jednakostima

a) Ako je f integrabilna na $[a,b]$, onda po definiciji uzimamo

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx, \quad \int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

b) Ako je f integrabilna na $[a,b]$, to je i Cf (C je konstanta) integrabilna na $[a,b]$ i važi jednakost

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

c) Ako su f i g integrabilne na $[a,b]$ onda je i $f \pm g$ takođe integrabilna na tom segmentu i ispunjena je jednakost:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

d) Ako je f integrabilna na $[a,b]$ i $c \in]a,b[$, to je f integrabilna na segmentima $[a,c]$ i $[c,b]$ i važi jednakost:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(svojstvo aditivnosti određenog integrala).

II. Svojstva izražena nejednakostima

a) Ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ i nenegativna, to je $\int_a^b f(x)dx \geq 0$; ako je pri tom $f(x) \geq 0$, f je neprekidna na $[a,b]$ i nije identički jednaka nuli na $[a,b]$, onda je $\int_a^b f(x) \geq C > 0$, gde je C neka konstanta.

b) Ako su funkcije f, g integrabilne na $[a,b]$ i $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$, to je $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

III. Smena promenljive; parcijalno integraljenje

a) Smena promenljive. Neka su ispunjeni uslovi:

1) Funkcija f je neprekidna na $[a,b]$;

2) Segment $[a,b]$ je skup vrednosti neke funkcije $x = g(t)$, definisane na segmentu $[\alpha,\beta]$ koja na njemu ima neprekidan izvod;

3) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$

Pod navedenim uslovima je $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$.

b) Parcijalno integraljenje. Ako $f, g \in C^{(1)}[a,b]$, to je

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)f'(x)dx.$$

15. Neka je funkcija f ograničena i konkavna na segmentu $[a,b]$. Dokazati da je

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

◀ Pošto je f konkavna na $[a,b]$, onda je za bilo koja dva broja $x_1, x_2 \in [a,b]$ zadovoljena nejednakost $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, ako je $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (po definiciji). Konkavna funkcija na segmentu je neprekidna (primer 207. glava II). Dakle, f je integrabilna na $[a,b]$. Na osnovu svojstva konkavnosti funkcije f, imamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+\xi}{2} + \frac{b-\xi}{2}\right) > \frac{1}{2}(f(a+\xi) + f(b-\xi)), 0 \leq \xi \leq b-a.$$

Integraleći po ξ u granicama od 0 do $b-a$, dobijamo

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{b-a} f(a+\xi)d\xi + \int\limits_0^{b-a} f(a-\xi)d\xi\right) = \int\limits_a^b f(x)dx \quad (1)$$

(smena: u prvom integralu $a+\xi = t$, a u drugom $b-\xi = z$). Podelimo sada segment $[a,b]$ na n jednakih delova ($\Delta\, x_i = \frac{b-a}{n}$) i sastavimo integralnu sumu, uzimajući $\xi_k = x_k$:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\left(1-\frac{k}{n}\right)a + \frac{k}{n}b\right).$$

Zbog konkavnosti funkcije f sledi

$$f\left(\left(1-\frac{k}{n}\right)a + \frac{k}{n}b\right) > \left(1-\frac{k}{n}\right)f(a) + \frac{k}{n}f(b),$$

zato je

$$S_n > \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(1-\frac{k}{n}\right)f(a)+\frac{k}{n}f(b)\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{(n+1)}{2}f(a)+\frac{(n-1)}{2}f(b)\right) \qquad (2)$$

Prelazeći na limes u nejednakosti (2) kad $n \to \infty$, dobijamo (funkcija f je integrabilna)

$$\int_a^b f(x)dx \geq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right). \qquad (3)$$

Spajajući nejednakosti (1) i (3) nalazimo

$$\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

što je i trebalo dokazati. ►

16. Neka $f \in C^{(2)}\,[1,+\infty[$ i neka je $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$ za $x \in [1,+\infty[$. Dokazati, da je

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f(x)dx + O(1),$$

kad $n \to \infty$.

◄ Posmatrajmo segment $[1,n]$ i podelimo ga na podsegmente $[x_{k-1},x_k]$ čije su dužine $\Delta\, x_{k-1} = 1$ za svako $k = \overline{1,n}$. Zbog konkavnosti funkcije na svakom od navedenih podsegmenata je (zadatak 15)

$$\frac{1}{2}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right) \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \leq f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) \qquad (1)$$

Sumirajući u nejednakosti (1) po k od 1 do n, dobijamo

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right). \qquad (2)$$

Očigledno je $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}f(x_{k-1})-\frac{1}{2}\left(f(x_0)+f(x_n)\right)$. Na taj način, u drugim oznakama ($f(x_0)=f(1)$, $f(x_k)=f(k)$) dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)-\frac{1}{2}\left(f(1)+f(n)\right)\leq\int\limits_{1}^{n}f(x)dx \tag{3}$$

S druge strane prema Lagranžovoj formuli je

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k), \tag{4}$$

gde je $x_{k-1}<\xi_k<\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, zatim

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f'(\theta_k), \tag{5}$$

gde je $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}<\theta_k<x_k$. Iz (4) i (5) dobijamo (sabiranjem levih i desnih strana i deljenjem sa dva)

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}f(x_{k-1})-\frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_n))+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(f'(\xi_k)-f'(\theta_k)\right). \tag{6}$$

Pošto je $\xi_k<\theta_k$, a f' opada, to je

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(f'(\xi_k)-f'(\theta_k)\right)\leq\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(f'(x_{k-1})-f'(x_k)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(f'(1)-f'(n)\right)\leq\frac{1}{4}f'(1)=O(1) \tag{7}$$

Iz (2),(6) i (7) dobijamo

$$\int\limits_{1}^{n}f(x)dx\leq\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}f(x_k)-\frac{1}{2}\left(f(1)+f(n)\right)+O(1). \tag{8}$$

Spajajući (3) i (7) sledi

$$\int\limits_{1}^{n}f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)-\frac{1}{2}f(n)+O(1),$$

$$\text{ili } \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}f(n) + O(1). \blacktriangleright$$

17. Neka $f \in C^{(1)}[a,b]$ i neka je $\Delta_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. Naći $\lim_{n\to\infty} n\,\Delta_n$.

◀ Označimo $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, $m_k' = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} \{f'(x)\}$, $M_k' = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} \{f'(x)\}$ i zapišimo Δ_n u obliku

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k)\,f'(\xi_k)dx,$$

gde je $x < \xi_k < x_k$, $x_0 = a$. Uzimajući u obzir nejednakost

$$M_k'(x - x_k) \le (x - x_k)f'(\xi_k) \le m_k'(x - x_k),$$

dobijamo $-\frac{(b-a)\overline{S}_n'}{2} \le n\,\Delta_n \le -\frac{(b-a)\underline{S}_n'}{2}$, gde su $\underline{S}_n'$ i $\overline{S}_n'$ redom donja i gornja Darbuova suma funkcije f' na segmantu $[a,b]$. Zbog neprekidnosti funkcije f', dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} n\,\Delta_n = -\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)dx = \frac{b-a}{2}\,(f(a) - f(b)). \blacktriangleright$$

18. Dokazati da je ograničena funkcija f na segmentu $[a,b]$ integrabilna, ako skup tačaka prekida ima **Žordanovu meru** nula.

◀ Neka je $\varepsilon' > 0$ unapred zadato. Pokrimo skup tačaka prekida funkcije f konačnim sistemom intervala $\{\Delta_j\}$ $(j = \overline{1,K})$ čije su dužine redom δ_j $(j = \overline{1,K})$ tako da je $\sum_{j=1}^{k} \delta_j < \varepsilon'$. Krajevi tih intervala zajedno sa tačkama a, b čine podelu P_1 segmenta $[a,b]$. Na svakom segmentu te podele koji se razlikuje od Δ_j, funkcija f je neprekidna (dakle i ravnomerno neprekidna). Zato se svaki od tih segmenata (označimo ih sa $\overline{\Delta}_i$) može podeliti na delove tako da je na svakom od njih oscilacija funkcije f manja od ε'' ($\omega_f < \varepsilon''$, ε'' je proizvoljno unapred zadato). Tačkama podele P_1 dodajmo tačke podele segmenata $\overline{\Delta}_i$ tako da smo dobili podelu P_2 segmenta $[a,b]$. Neka je dužina segmenata, na kojima je oscilacija funkcije manja od ε'', jednaka τ_i. Onda

za podelu P_2 imamo (indeks sumiranja je k)

$$\begin{aligned}\sum_k \omega_k \,\Delta\, x_k &= \sum_j \omega_j \delta_j + \sum_i \omega_i \tau_i < \omega_f\,[a,b] \sum_j \delta_j + \varepsilon'' \sum_i \tau_i \\ &< \omega_f\,[a,b]\,\varepsilon' + \varepsilon''(b-a),\end{aligned}$$

gde je $\omega_f\,[a,b]$ oscilacija funkcije f na segmentu $[a,b]$. Uzimajući da je $\varepsilon' \le \frac{\varepsilon}{2\omega_f[a,b]}$; $\varepsilon'' \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ gde je $\varepsilon > 0$ fiksirano, dobijamo $\sum\limits_k \omega_k \,\Delta\, x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Za funkciju f je ispunjen kriterijum integrabilnosti. ►

19. Neka su f, φ ograničene funkcije na segmentu $[a,b]$ tako da je $f(x) = \varphi(x)$ za svako $x \in [a,b]$ sa izuzetkom skupa tačaka **Žordanove mere nula**. Dokazati da su tada ili obe funkcije f, φ integrabilne i važi jednakost $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ili obe nisu integrabilne.

◄ Označimo sa $N = \max\left\{\sup\limits_{a\le x\le b} |f(x)|, \sup\limits_{a\le x\le b} |\varphi(x)|\right\}$. Neka je $X = \{x\}$ skup tačaka Žordanove mere nula, na kome je $f(x) \neq \varphi(x)$. Neka je $\{\Delta_j\}$, $j = \overline{1,K}$, konačan sistem intervala dužine redom δ_j tako da je $\sum\limits_{j=1}^{K} \delta_j < \frac{\varepsilon}{2N}$, gde je ε proizvoljan unapred zadat broj. Za proizvoljnu podelu P segmanta $[a,b]$, u koju su uključeni i intervali Δ_j, imamo

$$|\overline{S}_f - \overline{S}\varphi| \le \sum_{j=1}^{K} |M_{jf} - M_{j\varphi}|\,\delta_j \le 2N \sum_{j=1}^{K} \delta_j < \varepsilon \tag{1}$$

$$|\underline{S}_f - \underline{S}\varphi| \le \sum_{j=1}^{K} |m_{jf} - m_{jf}|\,\delta_j \le 2N \sum_{j=1}^{K} \delta_j < \varepsilon \tag{2}$$

gde su $\overline{S}_f$ i $\overline{S}_\varphi$ gornje Darbuove sume funkcija f i φ, $\underline{S}_f$ i $\underline{S}_\varphi$ njihove donje Darbuove sume pri podeli P segmenta $[a,b]$; M_{jf}, $M_{j\varphi}$ najmanje gornje granice funkcija f i φ na intervalima Δ_j; m_{jf}, m_{jf} odgovarajuće najveće donje granice tih funkcija na Δ_j (sumiranje se vrši samo po intervalima Δ_j, jer je na ostalim segmentima podele P, $f(x) \equiv \varphi(x)$ i tada je $M_{jf} - M_{j\varphi} = 0$ i $m_{jf} - m_{jf} = 0$). Pošto granične vrednosti gornje i donje Darbuove sume za ograničene funkcije postoje, to iz (1) i (2) sledi

$$\lim_{\lambda\to 0} \overline{S}_f = \lim_{\lambda\to 0} \overline{S}_\varphi \tag{3}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \underline{S}_f = \lim_{\lambda\to 0} \underline{S}_\varphi. \tag{4}$$

Neka je f integrabilna na $[a,b]$. Tada je $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}_f = \lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}_f$ odakle prema (3) i (4) sledi $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}_\varphi = \lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}_\varphi$ tj. φ je integrabilna, pri čemu je $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$. Ako f nije integrabilna na $[a,b]$, to je $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}_f \neq \lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}_f$, odakle na osnovu (3) i (4) sledi $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}_\varphi \neq \lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}_\varphi$ što znači da φ nije integrabilna na $[a,b]$.

Iz dokazanog tvrđenja sledi :

Ako je funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilna na segmentu $[a,b]$, to ona ostaje integrabilna na njemu i vrednost integrala se ne menja ako se njena vrednost na skupu Zordanove mere nula zameni proizvoljnim konačnim vrednostima. ▶

Napomena. Prilikom definisanja Rimanovog integrala funkcije f na segmentu $[a,b]$ pretpostavlja se njena definisanost na celom $[a,b]$. Neka ograničena funkcija f nije definisana na skupu X tačaka segmenta $[a,b]$ Žordanove mere nula. Definišimo funkciju

$$\underset{x\in[a,b]}{F(x)} = \begin{cases} f(x), & x\notin X; \\ \varphi(x), & x\in X. \end{cases}$$

gde je φ proizvoljna ograničena funkcija na skupu X. Ako je F integrabilna na $[a,b]$, onda kažemo da je f takođe integrabilna na $[a,b]$, i po definiciji uzimamo

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b F(x)dx$$

20. Neka je X_r skup svih racionalnih tačaka segmenta $[0,1]$, φ njegova karakteristična funkcija. Dokazati da je svaka gornja Darbuova suma funkcije φ jednaka 1, a svaka njena donja Darbuova suma jedaka je 0.

◀ Pri proizvoljnoj podeli P segmenta $[a,b]$ svaki podsegment $[x_i,x_{i+1}]$, sadrži kako racionalne tako i iracionalne tačke, zato je za funkciju φ ispunjeno:

$$M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\{\varphi(x)\} = 1,\ m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\{\varphi(x)\} = 0,$$

odakle sledi $\overline{S}_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \,\Delta\, x_i = 1$, $\underline{S}_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \,\Delta\, x_i = 0$. ▶

21. Neka su F,G integrabilne funkcije na $[0,1]$ i neka je $F(x)\le G(x)$ za sve $x\in[0,1]$. Ako je $f(x)=G(x)$ za $x\in X_r$, gde je X_r skup iz prethodnog

zadatka, i $f(x) = F(x)$ za $x \notin X$, onda je

$$I_f^\star = \int_0^1 G(x)dx, \; I_{\star f} = \int_0^1 F(x)dx,$$

gde su $I_f^\star$ i $I_{\star f}$ redom gornji i donji Darbuov integral funkcije f na skupu $[0,1]$.

◀ Napomenimo čitaocu da je po definiciji $I_f^\star = \inf\{\overline{S}_f\}$, $I_{\star f} = \sup\{\underline{S}_f\}$, gde je $\{\overline{S}_f\}$ skup gornjih a $\{\underline{S}_f\}$ skup donjih Darbuovih suma funkcije f na $[0,1]$. Očigledno, funkciju f možemo predstaviti u obliku

$$f(x) = \varphi(x)G(x) + (1 - \varphi(x))F(x),$$

gde je φ karakteristična funkcija skupa X_r. Pri proizvoljnoj podeli P segmenta $[0,1]$ svaki podsegment $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$; sadrži kako racionalne tako i iracionalne tačke i zato je (uzimajući u obzir $F(x) \le G(x)$):

$$\overline{S}_f = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{G(x)\} \,\Delta\, x_i = \overline{S}_G,$$

gde je $\overline{S}_G$ gornja Darbuova suma funkcije G na segmentu $[0,1]$ pri fiksiranoj podeli P. Slično

$$\underline{S}_f = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{F(x)\} = \underline{S}_F,$$

gde je $\underline{S}_F$ donja Darbuova suma funkcije F na $[0,1]$. Iz dobijenih jednakosti nalazimo

$$\inf\{\overline{S}_f\} = \inf\{\overline{S}_G\} = I_G^\star = \int_0^1 G(x)dx,$$

$$\text{i } \sup\{\underline{S}_f\} = \sup\{\underline{S}_F\} = I_{\star F} = \int_0^1 F(x)dx,$$

zbog integrabilnosti funkcija F i G. ▶

22. Neka je X_1 neki podskup od $[0,1]$ i X_2 podskup istog skupa koji sa X_1 nema zajedničkih tačaka. Ako je svaka tačka segmenta $[0,1]$ tačka nagomilavanja skupova X_1 i X_2 dokazati da rezultat prethodna dva zadatka ostaje nepromenjen ako se X_r zameni sa X_1.

◀ Prema uslovu zadatka sledi da svaki podsegment $[x_i, x_{i+1}]$ bilo koje podele P segmenta $[a, b]$ sadrži tačke i skupa X_1 i skupa X_2, zato je

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\{\varphi(x)\} = 1, \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\{\varphi(x)\} = 0$$

odakle dobijamo da je $\overline{S}_P = 1$, $\underline{S}_P = 0$. Slično se dokazuje drugi deo tvrđenja da je

$$I_f^\star = \int_0^1 G(x)dx, \quad I_{\star f} = \int_0^1 F(x)dx. \ ▶$$

23. Pokazati da je prekidna funkcija $f(x) = sgn\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ integrabilna na segmentu $[0, 1]$.

◀ Tačke $x_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ su tačke prekida funkcije f. Ona nije definisana u nuli. Uzmimo

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0; \\ \text{proizvoljno}, & x = 0. \end{cases}$$

Funkcija F je ograničena na $[0, 1]$ a skup tačaka prekida $\left\{x_0 = 0, x_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}\right\}$ ima Žordanovu meru nula (5^0, primer) i onda je integrabilna. Pošto f nije definisana samo u jednoj tački, to je ona takođe integrabilna (napomena posle primera 19) na $[0, 1]$, i važi jednakost

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 F(x)dx. \ ▶$$

24. Dokazati da je Rimanova funkcija

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \end{cases}$$

gde su m i n ($n \geq 1$) uzajamno prosti celi brojevi, integrabilna na proizvoljnom konačnom segmentu.

◀ Uzmimo segment $[a, b]$ i neka je $K = \{1, 2, ..., k_0\} \subset \mathbb{N}$, gde je $k_0 > 1$ proizvoljan fiksiran prirodan broj, $\varkappa_k$ broj vrednosti m koji pripadaju segmentu $[ka, kb,]$ $(1 \leq k \leq k_0)$. Očigledno, jednakost $\varphi(x) = \frac{1}{k}$ može biti ispunjena u najviše $\varkappa_k$ tačaka. Uzmimo k_0 tako da bude $\varkappa_{k_0} \neq 0$ i onda se može tvrditi da je pri proizvoljnoj podeli segmenta $[a, b]$ jednakost $\omega_i = \frac{1}{k}$, gde je ω_i oscilacija funkcije φ na podsegmentu $[x_i, x_{i+1}]$,ispunjena na najviše $2\varkappa_{k_0}k_0$ podsegmenata. Zaista, ako je $n > k_0$, to je $\frac{1}{n} < \frac{1}{k_0}$. Zato, uzimajući

podelu P segmenta $[a,b]$ na n_0 delova gde je $n_0 > 2\varkappa_{k_0}k_0$, dobijamo da je na najviše $2\varkappa_{k_0}k_0$ podsegmenata $\frac{1}{k_0} \le \omega_i \le 1$, a na ostalim podsegmentima je $\omega_i < \frac{1}{k_0}$. Neka je sada za podelu P ispunjen uslov $\Delta x_i < \delta$, gde je $\delta > 0$ fiksirano. Tada sumirajući po svim podsegmentima podele imamo procenu

$$\sum_{0}^{n_0-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_i{}' \omega_i \Delta x_i + \sum_i{}'' \omega_i \Delta x_i \le 2\varkappa_{k_0}k_0\delta + \frac{b-a}{k_0}$$

(simboli $\sum_i{}'$ i $\sum_i{}''$ redom predstavljaju sumiranje po podsegmentima na kojima je $\omega_i \le 1$ i $\omega_i < \frac{1}{k_0}$). Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan unapred zadat. Birajući $k_0 > \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$ i uzimajući podelu P' takvu da je $\delta \le \frac{\varepsilon}{4\varkappa_{k_0}k_0}$, dobijamo ocenu $\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. Dokazali smo da je za Rimanovu funkciju φ ispunjen kriterijum integrabilnosti.

Napomena. Lako se pokazuje da je $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$. Stvarno, zbog integrabilnosti funkcije φ, imamo $\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \underline{S}\varphi$, gde je $\underline{S}\varphi$ donja Darbuova suma funkcije φ na $[a,b]$. Međutim, za proizvoljnu podelu P segmenta $[a,b]$ očigledno je $\underline{S}\varphi = 0$, odakle je $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$. ►

25. Pokazati da je funkcija $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$, $x \ne 0$ i $f(0) = 0$, integrabilna na segmentu $[0,1]$.

◄ Funkcija f je ograničena na $[0,1]$ ($|f(x)| < 1$), a skup tačaka prekida $\{x = 0;\ x_k = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\}$ ima Žordanovu meru nula (5^0, primer) i zato je integrabilna. ►

26. Dokazati da Dirihleova funkcija

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nije integrabilna na proizvoljnom segmentu.

◄ Neka je $[a,b]$ proizvoljni segment i P jedna njegova podela. Uzimajući na svakom podsegmentu $[x_i, x_{i+1}]$ podele P iracionalno ξ_i, dobijamo $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\xi_i) \Delta x_i = 0$; $\lim_{\lambda\to 0} S_n = 0$; ako uzmemo ξ_i racionalne, imamo $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\xi_i) \Delta x_i = b - a$, $\lim_{\lambda\to 0} S_n = b - a$. Rezultat dakle zavisi od izbora istaknutih tačaka ξ_i, zato Dirihleova funkcija χ nije integrabilna na $[a,b]$. ►

27. a) Neka je f integrabilna funkcija na $[a,b]$ i neka je $f_n(x) = \sup\{f(x)\}$ za $x_i \le x \le x_{i+1}$, gde je $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ ($i = \overline{0,n}$; $n \in \mathbb{N}$). Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

b) Dokazati da ako je f integrabilna funkcija na $[a,b]$, onda postoji takav niz neprekidnih funkcija φ_n, $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\int_a^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)dx$ za $a \le c \le b$.

◄ a) Pođimo od jednakosti

$$\int_a^b f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(x)dx = \overline{S}_n,$$

gde je $\overline{S}_n$ gornja Darbuova suma funkcije f pri fiksiranoj podeli segmenta $[a,b]$. Pošto je $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \int_a^b f(x)dx$, to je $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

b) Funkcija f je ograničena na $[a,b]$ jer je na $[a,b]$ integrabilna. Neka je P podela segmenta $[a,b]$ na n jednakih delova i neka je $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$. Tada je saglasno primeru 350, gl. I. funkcija $\varphi_n(x) = \sup_{x_i \le \xi < x} \{f(\xi)\}$ za $x_i \le x \le x_{i+1}$ neprekidna sleva na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$. Iz a) je $\int_a^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)dx$, gde je c proizvoljna tačka segmenta $[a,b]$. ►

28. Dokazati da ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ to je i apsolutna vrednost $|f|$ funkcije f integrabilna na $[a,b]$, i važi nejednakost:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

◄ Pošto za oscilaciju funkcije f na podsegmentu $[x_i, x_{i+1}]$ važi

$$\omega_f\,[x_i, x_{i+1}] = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \left\{ \left| f(x') - f(x'') \right| \right\},$$

to prema nejednakosti

$$\left| |f(x')| - |f(x'')| \right| \le \left| f(x') - f(x'') \right|, x', x'' \in [x_i, x_{i+1}],$$

dobijamo

$$\sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} \{||f(x')| - |f(x'')||\} \le \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} \{|f(x') - f(x'')|\},$$

tj. $\omega_{|f|} \le \omega_f$ na $[x_i, x_{i+1}]$ pri proizvoljnoj podeli P segmenta $[a,b]$. Zbog ispunjenja kriterijuma integrabilnosti funkcije f, iz poslednje nejednakosti sledi ispunjenje kriterijuma integrabilnosti i funkcije $|f|$. Zatim, pošto je $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, to je

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

$$\text{tj. } \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \ \blacktriangleright$$

29. Neka je funkcija f apsolutno integrabilna na segmentu $[a,b]$ tj. integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ postoji. Da li je f integrabilna na $[a,b]$?

◀ U opštem slučaju f nije integrabilna na $[a,b]$. Tako je na primer za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

$\int_a^b |f(x)|\,dx = b - a$, a sama funkcija f nije integrabilna na $[a,b]$ (primer 26).
▶

30. Neka je f integrabilna na $[a,b]$ i neka je $A \le f(x) \le B$ za $a \le x \le b$. Neka je zatim φ definisana i neprekidna funkcija na $[A,B]$. Dokazati da je $\varphi \circ f$ integrabilna funkcija na $[a,b]$.

◀ Zbog ravnomerne neprekidnosti funkcije φ na $[A,B]$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\sigma > 0$ tako da je $\omega_i^\star < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, kad god je $\Delta\, y_i < \sigma$ (ovde je $\omega_i^\star$ oscilacija funkcije φ na segmentu $[y_i, y_{i+1}]$). Pošto je funkcija f integrabilna na $[a,b]$, to je za nju ispunjen uslov integrabilnosti: Za svaki unapred zadat pozitivan broj (ovde je taj broj σ^2) postoji takvo $\delta > 0$, da za bilo koju podelu P segmenta $[a,b]$, za koju je $\Delta\, x_i < \delta$, važi

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \,\Delta\, x_i < \sigma^2 \tag{1}$$

gde je ω_i oscilacija funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$. Fiksirajmo takvu podelu P i neka je X' skup tačaka segmenata podele P, na svakom od kojih je $\omega_i \geq \sigma$ (f može biti prekidna). Pokažimo da skup X' ima Žordanovu meru nula. Označavajući simbolom $\sum\limits_i{}'$ sumiranje po segmentima skupa X', imamo (prema nejednakosti (1))

$$\sigma^2 > \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \vartriangle x_i \geq \sum_i{}' \omega_i \vartriangle x_i \geq \sigma \sum_i{}' \vartriangle x_i,$$

odakle sledi $\sum\limits_i{}' \vartriangle x_i < \sigma$, što i dokazuje naše tvrđenje (u nejednakosti (1) se umesto σ može uzeti bilo koji pozitivan broj ε).

Pošto je $\vartriangle y_i \leq \omega_i$, to je skoro svuda (tj. na svim segmentima podele P izuzev možda samo segmenata skupa X') $\omega_i < \sigma$, a znači i $\vartriangle y_i < \sigma$. Dakle, skoro svuda je $\omega_i^\star < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ za podelu P. Označavajući simbolom $\sum\limits_i{}''$ sumiranje po segmentima podele P, na svakom od kojih je $\omega_i^\star < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, dobijamo ocenu:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^\star \vartriangle x_i = \sum_i{}' \omega_i^\star \vartriangle x_i + \sum_i{}'' \omega_i^\star \vartriangle x_i < \omega\sigma + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)},$$

gde je ω oscilacija funkcije $\varphi \circ f$ na segmentu $[a, b]$. Birajući σ tako da je $\sigma < \frac{\varepsilon}{2\omega}$, konačno imamo $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i^\star \vartriangle x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Znači složena funkcija $\varphi \circ f$ zadovoljava kriterijum integrabilnosti. ▶

Napomena. Uslov neprekidnosti funkcije φ ne može se zameniti uslovom integrabilnosti. Zaista, ako je

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0, & y = 0; \\ 1, & y \neq 0; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I}; \\ \frac{1}{n}, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

tada je na proizvoljnom segmentu

$$\varphi(f(x)) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I}; \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

neintegrabilna funkcija, kao što je pokazano u primeru 26.

31. Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[A, B]$. Dokazati da je tada

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0, \text{ ako je } [a, b] \subset [A, B].$$

(svojstvo integralne neprekidnosti).

◀ Zbog integrabilnosti funkcije f na $[A, B]$, imamo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \, \Delta\, x_i < \varepsilon$, kad god je $\Delta\, x_i < \delta$. Izaberimo $|h|$ tako malo da bude $a + h > A$, $b + h < B$ i uzmimo podelu P segmenta $[a, b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Tada je

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x+h) - f(x)|\, dx \le \sum_{i=1}^{n} \omega_{i_h} \, \Delta\, x_{i-1},$$

gde je ω_{i_h}, uopšte rečeno, oscilsacija funkcije f na nekom segmentu različitom od $[x_{i-1}, x_i]$. Uzimajući sada podelu P' za koju je $\Delta\, x_i < \frac{\delta}{2}$ i podčinjavajući h uslovu $|h| < \frac{\delta}{2}$, sledi $\sum_{i=1}^{n} \omega_{i_h} \, \Delta\, x_{i-1} < \varepsilon$, jer se za svako i oscilacija funkcije razmatra na segmentu dužine manje od δ. Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je za $|h| < \frac{\delta}{2}$ ispunjena nejednakost $\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx < \varepsilon$. Ovo znači da je $\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0$. ▶

32. Neka je f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$. Dokazati da je $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ tada i samo tada, kada je $f(x) = 0$ u tačkama neprekidnosti funkcije f koje pripadaju $[a, b]$.

◀ **Neophodnost.** Neka je $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ i neka je f neprekidna u $x_0 \in \,]a, b[$ i $f(x_0) \neq 0$. Zbog neprekidnosti funkcije u x_0 postoji $\delta > 0$ tako da je $f^2(x) > 0$ za sve $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Prema svojstvu aditivnosti integrala imamo

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f^2(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f^2(x)dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx = C >$$

gde je C konstanta. Dobijena protivurečnost pokazuje neophodnost tvrđenja.

Dovoljnost. Neka je $f(x) = 0$ u svakoj tački neprekidnosti funkcije f. Iz uslova teoreme sledi integrabilnost funkcije f^2 na segmentu $[a, b]$, zato za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je $\overline{S}_{f^2} - \underline{S}_{f^2} < \varepsilon$ za bilo koju podelu P za koju je $\Delta x_i < \delta$, gde su $\underline{S}_{f^2}$ i $\overline{S}_{f^2}$ redom donja i gornja Darbuova suma funkcije f^2 na segmentu $[a, b]$. Fiksirajmo takvu podelu. Tada na svakom segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ te podele postoji bar jedna tačka neprekidnosti funkcije f^2 (u protivnom f^2 bi bila svuda prekidna na celom $[x_i, x_{i+1}]$ pa nebi bila integrabilna na tom segmentu a samim tim i na celom $[a, b]$). Iz uslova zadatka dalje imamo: $\inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f^2(x)\} = 0$ $(i = \overline{0, n-1})$. Dakle, za $\Delta x_i < \delta$ je $\underline{S}_{f^2} = 0$ i $\overline{S}_{f^2} < \varepsilon$. Odavde sleduje

$$0 = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}_{f^2} = \int_a^b f^2(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S}_{f^2}. \quad \blacktriangleright$$

4.2 Veza određenog i neodređenog integrala

1⁰ Njutn-Lajbnicova formula. Ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ a F njena proizvoljna primitivna funkcija, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{1}$$

U slučaju kada je f neprekidna deo po deo na $[a, b]$, opet važi formula (1). Tada, u opštem slučaju F nije primitivna za f ali je neprekidna na $[a, b]$ i $F'(x) = f(x)$ na svakom intervalu neprekidnosti funkcije f.

2⁰ Integraljenje kompleksno-vrednosne funkcije. Ako je $z(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ kompleksno-vrednosna funkcija, gde su φ, ψ integrabilne funkcije na segmentu $[a, b]$ onda je

$$\int_a^b z(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + i\int_a^b \psi(x)dx.$$

Na taj način je $\int_a^b \varphi(x)dx = \operatorname{Re}\int_a^b z(x)dx$, $\int_a^b \psi(x)dx = \operatorname{Im}\int_a^b z(x)dx$.

Za izračunavanje pojedinih određenih integrala koristi se i Ojlerova formula: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$.

3^0 Rešeni zadaci.

Primenom Njutn-Lajbnicove formule izračunati sledeće određene integrale:

33. $\int\limits_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

◀ Očigledno je

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{\sinh 1}^{\sinh 2} \\ &= \ln \frac{\sinh 2+\sqrt{1+\sinh^2 2}}{\sinh 1+\sqrt{1+\sinh^2 1}} \\ &= \ln \frac{\sinh 2+\cosh 2}{\sinh 1+\cosh 1} = \ln \frac{e^2}{e} = 1. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

34. $\int\limits_0^2 |1-x|\, dx$.

◀ Pošto je $\int |1-x|\, dx = -sgn(1-x)\cdot \frac{(1-x)^2}{2} + C$, to je prema Njutn-Lajbnicovoj formuli

$$\int\limits_0^2 |1-x|\, dx = sgn(1-x)\cdot \frac{(1-x)^2}{2}\Big|_2^0 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1. \ \blacktriangleright$$

35. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $(0<\alpha<\pi)$.

◀ Očigledno,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} = \int\limits_{-1-\cos\alpha}^{1-\cos\alpha} \frac{dt}{t^2+\sin^2\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\arctan\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

36. Dokazati, da ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ sa simetričnim grafikom u odnosu na pravu $x=\frac{a+b}{2}$, to je $\int\limits_a^b f(x)dx = 2\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)$.

◀ Iz uslova zadatka sledi da je $f(x) = f(a+b-x)$ za svako $x \in [a,b]$. Koristeći aditivnost integrala je $\int_a^b f(x)dx = I_1 + I_2$, gde je $I_1 = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$, $I_2 = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$. U integralu I_2 uzmimo $f(x) = f(a+b-x)$ i uvedimo smenu $a+b-x=t$; dobijamo $I_2 = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = I_1$.

Dakle, $\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)$. ▶

37. Izračunati $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $(0 \le \varepsilon < 1)$.

◀ Pošto je $1+\varepsilon\cos x = 1+\varepsilon\cos(2\pi - x)$, to je prema prethodnom primeru

$$I = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}.$$

Izražavajući $\cos x$ preko polovine ugla $\frac{x}{2}$, imamo

$$\begin{aligned} 1+\varepsilon\cos x &= \cos^2\frac{x}{2}\left((1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\tan^2\frac{x}{2}\right) \\ &= \sin^2\frac{x}{2}\left((1-\varepsilon)+(1+\varepsilon)\cot^2\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Predstavljajući integral po segmentu $[0,\pi]$ kao zbir integrala po segmentima $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ i $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ i zamenjujući $1+\varepsilon\cos x$ transformisanim izrazom dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)^2} + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cot\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cot\frac{x}{2}\right)^2}\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cot\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} + \arctan\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Napomena. Integral se može izračunati i prema primeru 206 iz glave III:

$$I = F(2\pi - 0) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

gde je

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right], \\ F(\pi + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi+2k\pi} F(x). \ ▶ \end{aligned}$$

38. $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $(|a| < 1, |b| < 1,\ ab > 0)$.

◀ Zapišimo I u obliku $I = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(A-x)(B-x)}}$, gde je $A = \frac{a}{2} + \frac{1}{2a}$, $B = \frac{b}{2} + \frac{1}{2b}$, i stavljajući $\sqrt{(A-x)(B-x)} = t(A-x)$, dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int\limits_{\left|\frac{b+1}{a+1}\right|\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\left|\frac{b-1}{a-1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \Bigg|_{\left|\frac{b+1}{a+1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\left|\frac{b-1}{a-1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left(\frac{\sqrt{ab}+1}{\sqrt{ab}-1}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}, \end{aligned}$$

jer je $\left|\frac{\sqrt{ab}+1}{\sqrt{ab}-1}\right| = \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$, prema uslovu $|a| < 1, |b| < 1$. ▶

39. $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$, $(ab \neq 0)$.

◀ Za rešavanje ovog primera koristimo formulu

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} sgn x \ (x \neq 0).$$

Očigledno je

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{ab}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{1+\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{b}{a}\cot x\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\cot x\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{ab}\left(\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \arctan\left(\frac{b}{a}\cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{ab}\left(\arctan\frac{a}{b} + \arctan\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2ab}sgn(ab) = \frac{\pi}{2\,|ab|}.
\end{aligned}
$$

Napomena 1. Transformacijom podintegralne funkcije u obliku

$$\frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{2}{(a^2+b^2)(1+\varepsilon\cos 2x)},$$

gde je $\varepsilon = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ i uvodeći smenu $2x = t$, dobijamo, koristeći primer 206, glava III:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a^2+b^2}\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\varepsilon\cos t} \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-|\varepsilon|}{1+|\varepsilon|}}\tan\frac{t}{2} + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]\right)\Big|_0^{\pi-0} \\
&= \frac{\pi}{(a^2+b^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\pi}{2\,|ab|}. \ ▶
\end{aligned}
$$

Napomena 2. Ako[2] u algebarskom izrazu učestvuje a^2 onda se zbog jednakosti $a^2 = |a|^2$ može pretpostaviti nenegativnost broja a.

40. Obrazložiti, da li se u sledećim integralima

a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx$; b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2+\tan^2 x}$ c) $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)dx$ može formalno primeniti Njutn-Lajbnicova formula?

◀ U svakom od slučajeva odgovarajuća primitivna funkcija nije neprekidna na odgovarajućem segmentu. U prvom slučaju funkcija $x \mapsto \ln|x|$ ima prekid druge vrste u 0; kod drugog integrala primitivna funkcija $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$ ima prekide prve vrste u tačkama: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; funkcija $x \mapsto \arctan\frac{1}{x}$ ima prekid prve vrste u 0. U slučaju a) funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nije Riman-integrabilna na segmentu $[-1, 1]$. Znači, u navedenim primerima ne može se primeniti Njutn-Lajbnicova formula. ▶

[2] Primedba redaktora

41. Naći $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$.

◀ Funkcija $F(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ nije primitivna za podintegralnu funkciju na segmentu $[-1,1]$, jer ima prekid u 0, $(F(-0) = 1,\ F(+0) = 0)$. Međutim funkcija

$$\Phi(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [-1,0[, \\ 1, & x = 0, \\ F(x)+1, & x \in]0,1] \end{cases}$$

je neprekidna na $[-1,1]$ i $\Phi'(x) = F'(x)$ na $[-1,0[$ i $]0,1]$, zato prema Njutn-Lajbnicovoj formuli sledi

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{1+0,5} = \frac{2}{3}. \ ▶$$

42. Naći $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

◀ Pošto je $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$, a $|\sin(100\pi - x)| = |\sin(50\pi - x)| = \dots = |\sin(2\pi - x)| = |\sin x|$, to je (primer 36):

$$\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = 100\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 200\sqrt{2}. \ ▶$$

Koristeći određene integrale naći $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, ako je:

43. $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$.

◀ Pošto je $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}$, to je S_n integralna suma funkcije $f(x) = x$ na segmentu $[0,1]$ koji je podeljen na n jednakih delova a istaknute tačke ξ_k jednake su redom deonim tačkama x_{k-1} $(k = \overline{1,n})$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_{0}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \ ▶$$

44. $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$.

◀ $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$; Ovo je integralna suma funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x}$ na segmentu $[0,1]$ koji je podeljen na n jednakih delova a istaknute tačke ξ_k su za

razliku od prethodnog primera jednake deonim tačkama x_k $(k=\overline{1,n})$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\,\Big|_0^1 = \ln 2. \ \blacktriangleright$$

45. $S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$.

◀ Pošto je

$S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. ▶

46. $S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

◀Pošto je

$S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} \sin\frac{\pi i}{n}$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 \sin\pi x dx = \frac{1}{\pi}\cos\pi x\,\Big|_1^0 = \frac{2}{\pi}$. ▶

47. $S_n = \frac{1^p+2^2+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

◀ $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p$; Ovo je integralna suma funkcije $f(x)=x^p$ na segmentu $[0,1]$ koji je podeljen na n jednakih delova a istaknute tačke ξ_k su jednake deonim tačkama x_k $(k=\overline{1,n})$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}. \ \blacktriangleright$$

48. $S_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

◀ Pošto je $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$, to je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\,\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right). \ \blacktriangleright$$

49. $S_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

◀ Zapišimo S_n u obliku $S_n = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}}$, odakle sledi da se rešenje zadatka svodi na nalaženje limesa sume $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}$, koja ima oblik integralne sume. Pošto još nije uveden pojam nesvojstvenog integrala 2 vrste,

formalan zapis $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \int\limits_0^1 \ln x dx$ nema smisla jer funkcija $y = \ln x$ nije Riman-integrabilna na segmentu $[0,1]$.

Neka je $n > k$, tada je $\ln \frac{n}{k} = \ln \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k+2}{k+1} \cdots \frac{n}{n-1} = \sum\limits_{s=k}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$. Na osnovu primera 38, glava I, imamo nejednakosti:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{k} < \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}, \text{ ili}$$

$$-\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) < \ln\frac{k}{n} < -\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Stavljajući u ovim nejednakostima redom $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i sabirajući dobijene nejednakosti imamo

$$-n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} < -n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Odavde sledi (uzimajući u obzir primer 85, glava I)

$$\frac{1}{n} - 1 < \sigma_n < -1 + \frac{\ln n + C + \varepsilon_n}{n},$$

gde je C Ojlerova konstanta, $\varepsilon_n \to 0$ kad $n \to \infty$. Prelaskom na limes u poslednjoj dvostrukoj nejednakosti, dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = -1$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e^{-1}$. ►

50. $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

◄ Iz $S_n = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, sleduje $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$. ►

Izostavljanjem ravnomernih beskonačno malih višeg reda, naći sledeće limese:

51. $S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2} + \left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}$.

◄ Pošto je kad $n \to \infty$ $\sin\frac{k\pi}{n^2} = \frac{k\pi}{n^2} + O^\star\left(\frac{k^3}{n^6}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, to je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)O^\star\left(\frac{k^3}{n^6}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2} + O^\star\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

i zato je $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right) O^{\star}\left(\frac{k^3}{n^6}\right) = 0$. Sada je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) \\
&= \pi \int_0^1 x(1+x)dx = \pi \left(\int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx \right) = \frac{5}{6}\pi. \ ▶
\end{aligned}$$

52. $S_n = \sin\frac{\pi}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

◀ Pošto je $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + O^{\star}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} O^{\star}\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = 0$, to je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Big|_0^{\pi-0} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

(primer 206, glava III). ▶

53. $S_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$ $(x>0)$.

◀ Imamo,

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} O^{\star}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} O^{\star}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, to je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 (x+t)dt = x+\frac{1}{2}. \ ▶$$

54. $S_n = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$.

◀ Transformacijom sledi

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{in}} = S_n' - S_n'',$$

gde je $S_n' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}}$; $S_n'' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+in}$. Ocenimo S_n''; Očigledno je $S_n'' \le \frac{2n}{n(n+1)} < \frac{2}{n}$, i zato je $\lim_{n\to\infty} S_n'' = 0$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$. ▶

55. Naći izvode:

1) $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx$; 2) $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx$; 3) $\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx$.

◀ U prvom slučaju treba naći izvod konstante, a u ostala dva slučaja izvod funkcije čija je promenljiva donja, odnosno gornja granica integrala. Zato je:

1) $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx = 0$, 2) $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx = -\sin a^2$, 3) $\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2$. ▶

56. Naći izvode:

a) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$; b) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$; c) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\pi t^2 dt$.

◀ Koristeći pravila diferenciranja integrala kao složene funkcije (pretpostavljajući diferencijabilnost odgovarajućih funkcija):

$\frac{d}{dx}\int_a^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\psi'(x)$ (za a));

$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$ (za b) i c)).

a) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt = 2x\sqrt{1+x^4}$;

b) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$;

c) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\pi t^2 dt = -\sin x\cos(\pi\cos^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x) =$

$= (\sin x - \cos x)\cos(\pi\sin^2 x)$. ▶

57. Naći limese:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

◀ Očigledno je da se može primeniti Lopitalovo pravilo u sva tri slučaja:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \cos t^2 dt=\lim_{x\to 0}\cos x^2=1.$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x(\arctan t)^2dt}{\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi^2}{4},$$

jer je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$.

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{\frac{d}{dx}e^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0. \ ▶$$

58. Neka $f\in C[0,+\infty[$ i $f(x)\to A$ kad $x\to+\infty$. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)dx$.

◀ Smenom $nx=t$ imamo

$$\int\limits_0^1 f(nx)dx=\frac{1}{n}\int\limits_0^n f(t)dt=\frac{\int\limits_0^n f(t)dt}{n}.$$

Pošto je

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\int\limits_0^y f(t)dt}{y}=\lim_{y\to+\infty}f(y)=A$$

(Lopitalovo pravilo) to je $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)dx=A$. ▶

59. Dokazati, da je $\int\limits_0^x e^{t^2}dt\sim\frac{e^{x^2}}{2x}$ kad $x\to\infty$.

◀ Pokažimo da je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = 1$. Po Lopitalovom pravilu imamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}dt + 2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}} + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} + 1 = 1. \text{ ▶}$$

60. Naći $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int\limits_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}$.

◀ Izraz predstavlja neodređeni oblik $\frac{0}{0}$; Primenom Lopitalovog pravila imamo:

$$L = \lim_{x\to+0} \frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int\limits_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt} = \lim_{x\to+0} \frac{\cos x\sqrt{\tan(\sin x)}}{\frac{\sqrt{\sin(\tan x)}}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}} = \lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\sin x}{\tan x}} = 1. \text{ ▶}$$

61. Neka je f neprekidna i pozitivna funkcija. Dokazati da je funkcija

$$\varphi(x) = \frac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$$

rastuća za $x \geq 0$.

◀ Funkcija φ je očigledno diferencijabilna na skupu $]0,+\infty[$ i njen izvod je

$$\varphi'(x) = \frac{xf(x)\int\limits_0^x f(t)dt - f(x)\int\limits_0^x tf(t)dt}{\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2} = \frac{f(x)}{\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2}\cdot\int\limits_0^x (x-t)f(t)dt > 0$$

(prema a), II). To znači da je φ rastuća za $x \geq 0$. ►

62. Naći integrale:

a) $\int\limits_0^2 f(x)dx$, ako je $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$

b) $\int\limits_0^1 f(x)dx$, ako je $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t; \\ t\frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$

◄ a) Koristeći aditivnost integrala imamo

$$\begin{aligned} \int\limits_0^2 f(x)dx &= \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_1^2 (2-x)dx \\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{(2-x)^2}{2}\Big|_2^1 = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

b) Slično prethodnom primeru je

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^t xdx + \frac{t}{1-t}\int\limits_t^1 (1-x)dx \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^t + \frac{t}{1-t}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_1^t \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{t(1-t)}{2} = \frac{t}{2}. \end{aligned}$$ ►

63. Izračunati integral i nacrtati grafik funkcije $I = I(\alpha)$, ako je

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2}.$$

◄ Za $\alpha \neq 1$ imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{1}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} - \frac{\cos^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} \\ &= \frac{1}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} - \frac{\cos x}{2\alpha} + \frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2} - \frac{(1+\alpha^2)^2}{4\alpha^2(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)} \\ &= \frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2} - \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)} - \frac{\cos x}{2\alpha}, \text{ i} \\ I &= \frac{1}{4\alpha^2}\left((1+\alpha^2)\pi - (1-\alpha^2)^2 I_1\right), \end{aligned}$$

gde je

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{\varepsilon}{2\alpha}\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x},\ \varepsilon = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, |\varepsilon| \leq 1.$$

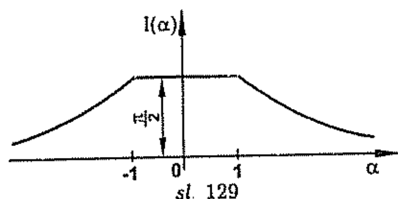
Za $|\varepsilon| < 1$, na osnovu rešenja primera 206, glava III, dobijamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon}{2\alpha}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-|\varepsilon|}{1+|\varepsilon|}}\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Big|_0^{\pi-0} \\ &= \frac{\pi\varepsilon}{2\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\pi}{|1-\alpha^2|} = \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha^2}, & |\alpha|<1; \\ -\frac{\pi}{1-\alpha^2}, & |\alpha|>1. \end{cases} \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da je za $|\alpha| = 1$, $I = \frac{\pi}{2}$, sledi

$$I(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |\alpha| \leq 1; \\ \frac{\pi}{2\alpha^2} & |\alpha| > 1. \end{cases}$$

Grafik funkcije $I(\alpha)$ nacrtan je na (sl.129). ►



sl. 129

Koristeći parcijalno integraljenje rešiti sledeće integrale:

64. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx.$

◄ Kako je

$$|\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]; \\ \ln x, & x \in [1, e], \end{cases}$$

to je $(dx = dv, \ln x = u)$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x)dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= (-x\ln x + x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\big|_1^e = 2(1-e^{-1})\ (). \end{aligned}$$ ►

65. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$.

◀ $dv = xdx$, $u = \arctan x$, $v = \frac{x^2}{2}$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$;

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{3}} dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$ ▶

Koristeći smenu promenljive izračunati integrale:

66. $\int\limits_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

◀ Smenom $x = a \sin t$, dobijamo

$$\int\limits_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{\pi a^4}{16}$$

(za svako k, $m \in \mathbb{N}$ je $\int\limits_0^{\frac{m\pi}{2}} \sin^2 kt dt = \int\limits_0^{\frac{m\pi}{2}} \cos^2 kt dt = \frac{m\pi}{4}$). ▶

67. $I = \int\limits_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

◀ Stavljajući $\frac{1}{x+1} = t$, dobijamo $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2$;

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\frac{4}{7}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{4}{7}}^{1} \frac{d\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \left(t - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right| \Bigg|_{\frac{4}{7}}^{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{14} + \sqrt{\left(\frac{1}{14}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}. \end{aligned}$$ ▶

68. Izračunati integral $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$, smenom $x - \frac{1}{x} = t$.

◀ Razmotrimo neodređeni integral $\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$, $x \in [-1, 1]$. U primeru 27, glava III je pokazano, da je funkcija

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

gde je $\varepsilon(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} sgn x$, primitivna za funkciju $\frac{1+x^2}{1+x^4}$ na intervalu $]-\infty, +\infty[$ (integral je u tom primeru izračunat smenom $x - \frac{1}{x} = t$). Dakle,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = F(x)\,|_{-1}^{1} = \varepsilon(1) - \varepsilon(-1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \;\blacktriangleright$$

69. Da li se u integralu $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}dx$ uvesti smena $x = \sin t$?

◀ Navedena smena nije moguća jer je $|\sin t| \leq 1$. ▶

70. Da li se u integralu $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ smenom $x = \sin t$ za nove granice mogu uzeti brojevi π i $\frac{\pi}{2}$?

◀ Mogu, jer je $\sqrt{1-\sin^2 t} = -\cos t$, ako $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ i

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = -\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt. \;\blacktriangleright$$

71. Dokazati, da ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, to je

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\int\limits_0^1 f\left(a + (b-a)x\right)dx.$$

◀ Smenom $t = \frac{x-a}{b-a}$, dobijamo

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\int\limits_0^1 f\left(a+(b-a)t\right)dt = (b-a)\int\limits_0^1 f\left(a+(b-a)x\right)dx,$$

jer vrednost određenog integrala ne zavisi kojim se slovom označava promenljiva. ▶

72. Dokazati jednakost: $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$ $(a > 0)$.

◀ Smenom $x = \sqrt{t}(t \geq 0)$, dobijamo $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt$, što predstavlja dokaz tvrđenja. ▶

73. Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[A, B] \supset [a, b]$. Naći $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)dy$ ako je $A - a < x < B - b$.

◀ Uzmimo $x + y = t$, sledi $F(x) = \int_a^b f(x+y)dy = \int_{x+a}^{x+b} f(t)dt$. Primenjujući formulu datu u zadatku 56 imamo

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)dy = \frac{d}{dx}\int_{x+a}^{x+b} f(t)dt = f(x+b) - f(x+a). \quad ▶$$

74. Ako je f neprekidna funkcija na $[0, 1]$, onda je

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

b) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$. Dokazati.

◀ a) Zbog $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, sleduje

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt$$

(uvedena je smena $\frac{\pi}{2} - x = t$).

b) Transformacijom

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\pi} xf\left(\sin(\pi - x)\right)dx$$

i smenom $\pi - x = t$, dobijamo

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\pi}(\pi - t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt,$$

odavde sledi $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ (jer vrednost određenog integrala ne zavisi kojim se slovom označava promenljiva) ▶

75. Dokazati da za neprekidnu funkciju f na segmentu $[-l, l]$ važi:

1) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$, ako je funkcuja f parna;

2) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0$, ako je funkcija f neparna.

Dati geometrijsku interpretaciju ovih činjenica.

◀ Očigledno je

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \int\limits_{-l}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{l} f(x)dx;$$

ako u prvom integralu uvedemo smenu $x = -t$ onda je

$$\int\limits_{-l}^{0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{l} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{1} f(-x)dx.$$

Dakle, $\int\limits_{-l}^{1} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1}(f(x) + f(-x))dx$. Ako je funkcija f parna tada je $f(x) + f(-x) = 2f(x)$ i tako imamo 1); u slučaju da je f neparna tada je $f(x) + f(-x) = 0$ i tako dobijamo 2).

U slučaju 1) ravna figura (krivolinijski trapez) je osno simetrična figura (y osa je osa simetrije) i onda je ukupna površina figure jednaka dvostrukoj površini dela figure sa jedne strane ose simetrije. U drugom slučaju krivolinijski trapez se sastoji iz dve figure koje su uzajamno simetrične u odnosu na koordinatni početak, a integral (algebarska suma površina) je jednak 0. ▶

76. Dokazati da svaka parna funkcija ima jednu neparnu primitivnu funkciju, kao i da su sve primitivne funkcije neparne funkcije, parne.

◀ Neka je f zadata na intervalu $]-l, l[$, parna i pripada klasi $C]-l, l[$. Tada svaka primitivna za f ima oblik:

$$F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)dt + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta. Očigledno je

$$F(-x) = \int\limits_{0}^{-x} f(t)dt + C = -\int\limits_{0}^{x} f(z)dz + C$$

(uvedena je smena $t = -z$ i korišćen uslov parnosti funkcije f). Odavde sledi da je $F(-x) = -F(x)$ za svako $x \in]-l, l[$ ako i samo ako je $C = 0$. Time je prvi deo tvrđenja dokazan. Ako je funkcija f neparna, onda za svaku primitivnu funkciju G važi: $G(x) = \int\limits_0^x f(t)dt + K$, gde je K bilo koja konstanta. Sada je

$$G(-x) = \int\limits_0^{-x} f(t)dt + K = \int\limits_0^{x} f(t)dt + K = G(x)$$

(uvedena je smena $t = -z$, $dt = -dz$, $f(-z) = -f(z)$ zbog neparnosti funkcije f). Dokazan je i drugi deo tvrđenja. ▶

Napomena: Tvrđenje je tačno[3] ako se za funkciju f pretpostavi integrabilnost (ne obavezno neprekidnost). Dokaz je isti.

77. Izračunati $I = \int\limits_{0,5}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$.

◀ Uvedimo smenu: $x + \frac{1}{x} = t$. Pošto je x dvoznačna funkcija od t, to ćemo dati integral rastaviti na zbir integrala po segmentima $[0,5; 1]$ i $[1,2]$: $I = I_1 + I_2$ gde je $I_1 = \int\limits_{0,1}^{1} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$ i $I_2 = \int\limits_{1}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$. U integralu I_1 je $x = \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$, a u integralu I_2 je $x = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$, i onda je

$$\begin{aligned} I_1 &= 0,5 \int\limits_{0,5}^{2} e^t \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + t - \sqrt{t^2-4}\right) dt, \\ I_2 &= 0,5 \int\limits_{2}^{2,5} e^t \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + t + \sqrt{t^2-4}\right) dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{2}^{2,5} e^t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \sqrt{t^2-4}\right) dt \\ &= \sqrt{t^2-4}e^t \Big|_2^{2,5} - \int\limits_{2}^{2,5} e^t \sqrt{t^2-4}dt + \int\limits_{2}^{2,5} e^t \sqrt{t^2-4}dt = 1,5e^{2,5}. \end{aligned}$$ ▶

[3] Prim. prevodioca

78. U integralu $I = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x dx$ uvesti smenu $\sin x = t$.

◀ Predstavimo dati integral kao zbir četiri integrala po segmentima na svakom od kojih je funkcija $y = \sin x$ monotona:

$$I = \sum_{k=0}^{3} \int\limits_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} f(x)\cos x dx.$$

Uzimajući u svakom integralu $\sin x = t$, imamo

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 f(\arcsin t)dt + \int\limits_1^0 f(\pi - \arcsin t)dt \\ &+ \int\limits_0^{-1} f(\pi - \arcsin t) + \int\limits_{-1}^0 f(2\pi + \arcsin t)dt \\ &= \int\limits_0^1 (f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t))\,dt \\ &+ \int\limits_{-1}^0 (f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t))\,dt \end{aligned}$$

(tokom smene promenljive korišćena je formula $Arc\sin t = (-1)^k \arcsin t + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, uzimajući $k = 0, \pm 1, 2$). ▶

79. Izračunati integral $I = \int\limits_{e^{-2n\pi}}^{1} \left|\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)'\right| dx$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Zapisujući integral u obliku

$$I = -\int\limits_{e^{-2n\pi}}^{1} \left|\frac{d\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)}{d\left(\ln\frac{1}{x}\right)}\right| d\left(\ln\frac{1}{x}\right)$$

i uvodeći smenu $\ln\frac{1}{x} = t$, dobijamo

$$I = \int\limits_0^{2n\pi} \left|\frac{d}{dt}\cos t\right| dt = \int\limits_0^{2n\pi} |\sin t|\,dt = 2n\int\limits_0^{\pi} \sin t dt = 4n. \ ▶$$

80. Naći $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

◄ Kako je pokazano u zadatku 74, b) $\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} f(\sin x) dx$; Na taj način je

$$I = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{2 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctan}(\cos x) \Big|_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{4}. \text{ ►}$$

81. Naći integral $I = \int\limits_{-1}^{3} \frac{h'(x)}{1+h^2(x)} dx$, ako je $h(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^3(x-2)}$.

◄ Funkcija h ima prekide druge vrste u tačkama $0; 2$, a funkcija $\operatorname{arctan} h$, je primitivna za podintegralnu funkciju na intervalima $]-1, 0[,]0, 2[$ i $]2, 3[$ i ima prekide prve vrste u navedenim tačkama. Zato predstavimo dati integral u obliku zbira tri integrala po segmentima: $[-1, 0]$, $[0, 2]$ i $[2, 3]$. U tačkama prekida funkcije h uzmimo jednostrane limese funkcije $\operatorname{arctan} h$. Kako je $h(-0) = -\infty$, $h(+0) = +\infty$, $h(-1) = 0$, $h(2-0) = -\infty$, $h(2+0) = +\infty$, $h(3) = \frac{32}{27}$, to je $I = \operatorname{arctan} h(-0) + \operatorname{arctan} h(2-0) + \operatorname{arctan} h(3) - \operatorname{arctan} h(-1) - \operatorname{arctan} h(+0) - \operatorname{arctan} h(2+0) = \operatorname{arctan} \frac{32}{27} - 2\pi$. ►

82. Dokazati da ako je f neprekidna periodična funkcija definisana za $-\infty < x < +\infty$, sa periodom T, to je $\int\limits_a^{a+T} f(x) dx = \int\limits_0^{T} f(x) dx$, gde je a proizvoljni broj.

◄ Zapišimo integral u obliku

$$\int\limits_a^{a+T} f(x) dx = \int\limits_a^{T} f(x) dx + \int\limits_T^{a+T} f(x) dx \tag{1}$$

(na osnovu svojstva aditivnosti integrala). Razmotrimo drugi sabirak u desnom delu jednakosti (1). Zbog periodičnosti funkcije f je $\int\limits_T^{a+T} f(x) dx = \int\limits_T^{a+T} f(x - T) dx$. Sada se smenom $x - T = z$, dobija $\int\limits_T^{a+T} f(x) dx = \int\limits_0^{a} f(z) dz$. Na taj način je

$$\int\limits_a^{a+T} f(x) dx = \int\limits_a^{T} f(x) dx + \int\limits_0^{a} f(x) dx = \int\limits_0^{T} f(x) dx,$$

što je i trebalo dokazati. ►

83. Dokazati da su funkcije

$$F(x)=\int_0^x \sin^n t dt \text{ i } G(x)=\int_0^x \cos^n t dt$$

za neparne vrednosti prirodnih brojeva periodične sa periodom 2π, a za parne vrednosti je svaka od njih jednaka zbiru linearne i periodične funkcije.

◀ Ako je $n=2m+1$ imamo

$$F(x+2\pi)=F(x)+\int_x^{x+2\pi}\sin^{2m+1}tdt=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^{2m+1}tdt$$

(prema prethodnom zadatku). Na osnovu primera 82 i 75, sledi $\int_0^{2\pi}\sin^{2m+1}tdt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2m+1}tdt=0$. Dakle, $F(x+2\pi)=F(x)$ u slučaju da je n neparan prirodan broj.

Ako je $n=2m$ imamo

$$F(x+2\pi)=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^{2m}xdx=F(x)+C_m,$$

gde je $C_m>0$ konstanta za svako m (očigledno, $\int_0^{2\pi}\sin^{2m}xdx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}xdx=C_m>0$). Dobili smo dakle jednakost: $F(x+2\pi)-F(x)=C_m$. Pošto je funkcija $\Psi(x)=F(x)-\frac{C_m x}{2\pi}$ periodična sa periodom 2π (direktna provera) to je $F(x)=\Psi(x)+\frac{C_m x}{2\pi}$, tj. F je predstavljena kao zbir periodične i linearne funkcije. Na sličan način se dokazuje tvrđenje i za funkciju G. ▶

84. Ako je f neprekidna periodična funkcija sa periodom T onda se funkcija $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ može predstaviti kao zbir linearne i periodične funkcije istog perioda T.

◀ Zbog neprekidnosti funkcije f funkcija F je diferencijabilna i važi $F'(x)=f(x)$. Zbog periodičnosti funkcije f imamo da je $F'(t+T)=f(t)$. Uzimajući zatim integral na segmentu $[x_0,x]$, sledi $F(x+T)-F(x_0+T)=F(x)$. Ali, $F(x_0+T)=\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=C$, C je konstanta (primer 82). Znači $F(x+T)-F(x)=C$. U slučaju da je $C=0$ imamo $F(x+T)=$

$F(x)$; tj. F je periodična sa periodom T. Neka je $C \neq 0$. Razmotrimo onda funkciju: $\Phi(x) = F(x) - \frac{Cx}{T}$. Ona je periodična (direktna provera) sa periodom T. Odavde sledi da se funkcija F može predstaviti kao zbir linearne i periodične, tj. $F(x) = \frac{Cx}{T} + \Phi(x)$, što i znači kraj dokaza tvrđenja. ▶

Izračunati integrale:

85. $I = \int\limits_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$.

◀ Smenom $2 - x^2 = t$, $xdx = -\frac{1}{2}d\left(2-x^2\right)$ imamo

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_1^0 (2-x^2)^{12}d(2-x^2) = \frac{(2-x^2)^{13}}{26}\Big|_1^0 = 315\frac{1}{26}.$$ ▶

86. $I = \int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$.

◀ Očigledno,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3} + \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$ ▶

87. $I = \int\limits_1^e (x\ln x)^2dx$.

◀ Parcijalnim integraljenjem ($x^2dx = dv$, $\ln^2 x = u$, $\frac{2\ln x}{x}dx = du$) sledi

$$I = \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int\limits_1^e x^2\ln x dx$$

Nađimo $I_1 = \int\limits_1^e x^2\ln x dx$. Opet parcijalnim integraljenjem ($x^2dx = dv$, $\ln x = u, v = \frac{x^3}{3}, \frac{dx}{x} = du$;) imamo

$$I_1 = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

Konačno je

$$I = \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3 - 2}{27}. \blacktriangleright$$

88. $I = \int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx.$

◄ Smenom $1 - x = t^3$ dobijamo

$$I = 3\int_{-2}^{0}(1-t^3)t^3dt = 3\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{7}\right)\Big|_{-2}^{0} = -66\frac{6}{7}. \blacktriangleright$$

89. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

◄ Smenom $x = \frac{1}{\sin t}$ dobijamo $dx = -\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{|\sin t|}{\cos t}$, jer je $-\frac{\pi}{2} \le t \le -\frac{\pi}{6}$. Onda je

$$I = -\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{sgn(\sin t)\sin^2 t\cos t}{\sin^2 t\cos t}dt = -\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} dt = -\frac{\pi}{3}. \blacktriangleright$$

90. $I = \int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx.$

◄ Uzimajući smenu $1 + 3x^8 = z^2$; ($x^7dx = \frac{zdz}{12}$, $x^{15}dx = \frac{z(z^2-1)}{36}dz$); dobijamo

$$I = \frac{1}{36}\int_1^2 z^2(z^2-1)dz = \frac{1}{36}\left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{29}{270}. \blacktriangleright$$

91. $I = \int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx.$

◄ Parcijalnim integraljenjem ($dv = dx$, $u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$), sledi

$$\begin{aligned} I &= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)} = 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^3 \frac{(\sqrt{x})^2 d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} \\ &= \pi - \sqrt{x}\,\Big|_0^3 + \arctan\sqrt{x}\,\Big|_0^3 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

92. $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

◀ Grafik podintegralne funkcije je simetričan u odnosu na pravu $x = \pi$ ($f(x) = f(2\pi - x)$, $x \in [0, 2\pi]$) i zato je

$$I = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)};$$

Pošto je $1 \equiv (3+\cos x) - (2+\cos x)$, to je

$$I = 2\left(\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} - \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+\cos x}\right) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon_1 \cos x} - \frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon_2 \cos x},$$

gde je $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \varepsilon_2 = \frac{1}{3}$. Primitivne za funkcije $f_j(x) = \frac{1}{1+\varepsilon_j \cos x}$ $(j = 1, 2)$ su (primer 206, glava III) funkcije

$$\begin{aligned} F_j(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon_j^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon_j}{1+\varepsilon_j}} \tan\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon_j^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right], \\ F_j(\pi + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi+2k\pi} F(x), \end{aligned}$$

pri čemu je $F_j(\pi - 0) - F_j(0) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon_j^2}}$, na osnovu čega se dobija

$$I = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}} - \frac{2}{3\sqrt{1-\varepsilon_2^2}}\right) = \pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \;\blacktriangleright$$

93. $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

◀ Podintegralna funkcija je periodična sa periodom $\frac{\pi}{2}$ i zato je

$$\begin{aligned} I &= 4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 x)\, d(\tan x)}{1+\tan^4 x} = 4\int\limits_{-1}^{1} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt \\ &= 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \varepsilon(t)\right)\Big|_{-1}^{1} = 4\left(\varepsilon(1) - \varepsilon(-1)\right) = 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

(na osnovu primera 82 i 68).

Napomena. Koristeći jednakost $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}\left(1 + \varepsilon \cos 4x\right)$, gde je $\varepsilon = \frac{1}{3}$, smenu $4x = t$ i primer 206, glava III, imamo

$$\begin{aligned} I &= \varepsilon \int_0^{8\pi} \frac{dt}{1 + \varepsilon \cos t} \\ &= \varepsilon \left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{!+\varepsilon}} \tan \frac{t}{2} \right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \right) \Big|_0^{8\pi-0} \\ &= \frac{8\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 2\sqrt{2}\pi. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

94. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$

◀ Pošto je $\sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x)$, to je

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\left(\sin 6x - \sin 4x\right) = \frac{1}{4}\left(\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x\right);$$

$$\text{te je } I = \frac{1}{4}\left(\frac{\cos 2x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{\cos 6x}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 4x}{4} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} \right) = \frac{1}{6}. \ \blacktriangleright$$

95. a) $I_1 = \int\limits_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$; b) $I_2 = \int\limits_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx.$

◀ Očigledno, $I_1 + I_2 = \int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^3}{3}$; i

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx \\ &= \frac{x \cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Znači, $I_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)$, $I_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\right)$. ▶

96. $I = \int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$

◀ Očigledno je $I = I_1 + I_2$, gde je

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - 1}{2},$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx = \operatorname{Re}\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{x(1+2i)}dx \\ &= \operatorname{Re}\frac{e^{x(1+2i)}}{2(1+2i)}\Big|_0^{\pi} = \left(\operatorname{Re}\frac{e^x(1-2i)(\cos 2x + i\sin 2x)}{10}\right)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)}{10}\Big|_0^{\pi} = \frac{e^{\pi}-1}{10}. \end{aligned}$$

Konačno je

$$I = (e^{\pi}-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right) = \frac{3}{5}(e^{\pi}-1). \blacktriangleright$$

97. $I = \int_0^{\ln 2} \sinh^4 x dx.$

◀ Koristeći formule $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$; $\cosh^2 2x = \frac{1+\cosh 4x}{2}$; imamo

$$\sinh^4 x = \frac{1}{4}\left(\frac{\cosh 4x + 1}{2} - 2\cosh 2x + 1\right) = \frac{1}{8}(\cosh 4x - 4\cosh 2x + 3).$$

Dobijamo da je

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8}\left(3x + \frac{\sinh 4x}{4} - 2\sinh 2x\right)\Big|_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{8}\left(3\ln 2 + 2 - \frac{1}{128} - 4 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{225}{1024}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Koristeći formulu sniženja stepena izračunati sledeće integrale ako je n prirodan broj.

98. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$

◀ Parcijalnim integraljenjem ($\sin x dx = dv, \sin^{n-1} x = u$), imamo

$$I_n = \cos x \sin^{n-1} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx,$$

tj. $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, odnosno $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$. Koristeći dobijenu rekurentnu formulu lako dobijamo konačan rezultat za bilo koji prirodan broj n. Neka je $n = 2k$, tada je

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\dots 2} \cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

jer je $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Neka je $n = 2k+1$, tada je

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 3\cdot 1}\cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

jer je $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$. ►

99. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

◄ Prema primeru 74,a) imamo

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n = 2k, \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$ ►

100. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx$.

◄ Kako je $\tan^{2n} x dx = \tan^{2n-2} x d(\tan x) - \tan^{2n-2} x dx$, to je

$$I_n = \frac{\tan^{2n-1} x}{2n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

Dobili smo formulu sniženja (rekurentnu formulu) tj. I_n je izraženo preko I_{n-1}. Izražavajući dalje I_{n-1} preko I_{n-2}, zatim I_{n-2} preko I_{n-3}, ...dobijamo

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2n-(2k-1)} + (-1)^n I_0 = (-1)^n \left(I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-n}}{2(n-k)+1} \right).$$

Uvodeći novi indeks sumiranja $n - k = m$ i uzimajući u obzir da je $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$, dobijamo

$$I_n = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{2m+1} \right).$$ ►

101. $I_n = \int\limits_0^{1} (1-x^2)^n dx$.

◀ Smenom $x = \sin t$, sleduje $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ (primer 99). ▶

102. $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

◀ Smenom $x = \sin t$, imamo $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$. Ovaj integral je razmatran u primeru 98. ▶

103. $I_n = \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n dx$.

◀ Funkcija $f(x) = x^m (\ln x)^n$, je neprekidna i ograničena na razmaku $]0,1]$ (jer je $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$). Razmotrimo sada funkciju

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

očigledno je $I_n = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 F(x)dx$. Parcijalnim integraljenjem imamo

$$I_n = \frac{xF(x)}{m+1}\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

Izražavajući dalje I_{n-1} preko I_{n-2}, zatim I_{n-2} preko I_{n-3}, ...dobijamo

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n} \cdot I_0 = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

(jer je $I_0 = \frac{1}{m+1}$). ▶

104. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$.

◀ Koristeći formule $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ dobijamo

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t dt$$

(uzeta je smena $\frac{\pi}{4} - x = t$). Postupajući dalje kao u primeru 100 imamo

formulu sniženja: $I_n = -\frac{1}{2n} + I_{n-1}$, na osnovu koje se dobija

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2(n-k)} + (-1)^{n+1} \cdot I_0 = (-1)^n \left(-I_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \right),$$

gde je $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{d(\cos t)}{\cos t} = \ln\cos t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \ln\sqrt{2}$. ▶

105. Koristeći **Ojlerovu formulu** $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, pokazati da je

$$I = \int\limits_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 2\pi, & m = n. \end{cases}$$

◀ $I = \int\limits_0^{2\pi} e^{ix(n-m)} dx = 2\pi$ za $n = m$; Neka je $n \neq m$; tada je

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} \cos(n-m)x dx + i \int\limits_0^{2\pi} \sin(n-m)x dx \\ &= \frac{1}{n-m} \left(\sin(n-m)x \Big|_0^{2\pi} + i\cos(n-m)x \Big|_0^{2\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$ ▶

Ako $m, n \in \mathbb{N}$ izračunati sledeće integrale:

106. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$

◀ Neka je $I(2m, 2n) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$; Parcijalnim integraljenjem ($\cos x dx = dv$, $\sin^{2m} x \cos^{2n-1} x = u$), nalazimo da je $I(2m, 2n) = \frac{2n-1}{2m+1} \cdot I(2m+2, 2n-2)$. Snižavanjem reda dalje (još $n-1$ puta) dobijamo

$$\begin{aligned} I(2m, 2n) &= \frac{(2n-1)(2n-2)\ldots 3 \cdot 1}{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)} I(2m+2n, 0) \\ &= \frac{(2n-1)!!(2m+2n-1)!!}{((2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)0(2m+2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-1)!!(2m-1)!!\pi}{2(2m+2n)!!} = \frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2n+1} m! n! (m+n)!}. \end{aligned}$$ ▶

107. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx.$

◄ Podintegralna funkcija nije definisana u tačkama $x = 0$ i $x = \pi$, ali je na intervalu $]0, \pi[$ ograničena jer postoje konačni limesi kad $x \to +0$ i $x \to \pi - 0$; Razmotrimo funkciju

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in]0, \pi[; \\ n, \ x = 0, & (-1)^{n+1}n, \ x = \pi \end{cases}$$

gde je $f(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$. Očigledno je $\int\limits_0^\pi f(x)dx = \int\limits_0^\pi F(x)dx$. Prema Ojlerovoj formuli je $\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$ $(k = \overline{1, n})$. Dakle, $\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \sum\limits_{k=1}^n e^{i((n+1)-2k)x} = \begin{cases} 2(\cos(n-1)x + \cos(n-3)x + \cdots + \cos x), & n = 2m; \\ 2(\cos(n-1)x + \cos(n-3)x + \cdots + \cos x) + 1, & n = 2m-1, \end{cases}$

Kako je $\int\limits_0^\pi \cos((n+1)-2k)xdx = 0$ $(k = \overline{1, n})$ to je $\int\limits_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx = \begin{cases} 0, & n = 2m; \\ \pi, & n = 2m-1. \end{cases}$ ►

108. $I = \int\limits_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$.

◄ Označimo $f(x) = \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}$ i razmotrimo funkciju

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \\ (-1)^n(2n+1), & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Onda je $\int\limits_0^\pi f(x)dx = \int\limits_0^\pi F(x)dx$. Koristeći opet Ojlerovu formulu imamo

$$\cos(2n+1)x = \frac{1}{2}\left(e^{i(2n+1)x} + e^{-i(2n+1)x}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix});$$

zato je

$$\begin{aligned} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} &= e^{i2nx} - e^{i(2n-2)x} + \cdots + (-1)^n + \cdots + e^{-i2nx} \\ &= 2\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\cos 2\left(n - (k-1)\right)x + (-1)^n. \end{aligned}$$

Integraleći poslednji izraz član po član, dobijamo vrednost integrala: $I = (-1)^n\pi$ (jer je $\int\limits_0^\pi \cos 2(n-(k-1))xdx = 0$, $k = \overline{1, n}$). ►

109. $I = \int\limits_0^\pi \cos nx \cos^n x dx$.

◄ Iz Ojlerove formule sleduje

$$\cos^n x \cos nx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(e^{2(n-k)x}+e^{-2kx}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n e^{i2(n-k)x}+\sum_{k=0}^{n} C_k^n e^{-i2kx}\right)\\
&= \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k^n e^{i2(n-k)x}+\sum_{k=1}^{n} C_k^n e^{-i2kx}\right)\\
&= \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k^n \cos 2\,(n-k)\,x
\end{aligned}$$

Integraljenjem nalazimo da je $I = \frac{\pi}{2^n}$, jer je $C_k^n \int\limits_0^{\pi} \cos 2\,(n-k)\,x dx = 0$ $(k = \overline{0, n-1})$. ►

110. $\int\limits_0 \pi \sin^n x \sin nx dx$.

◄ Očigledno je

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{\pi} \cos^n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)dx\\
&= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\cos\left(nt+(n-1)\right)\frac{\pi}{2}dt
\end{aligned}$$

(uvedena je smena $x-\frac{\pi}{2}=t$). Prema Ojlerovoj formuli sleduje

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos^n t\cos\left(nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}(e^{it}+e^{-it})^n\left(e^{i\left(nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} C_k^n e^{i(n-2k)t}\left(e^{i\left(nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} C_k^n e^{i(n-2k)t}\left(e^{i\left(nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{\cos(n-1)\frac{\pi}{2}}{2^n}+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k^n\cos\left(2(n-k)t+(n-1)\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Integraleći sada levu i desnu stranu dobijene jednakosti na segmentu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dobijamo

$$I_n = \frac{\pi}{2^n} \cos(n-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^n} \sin\frac{n\pi}{2},$$

gde smo uzeli u obzir da je

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2(n-k)t + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) dt = 0 \ (k = \overline{0, n-1}). \ ▶$$

Naći integrale, $n \in \mathbb{N}$.

111. $I = \int\limits_0^\pi \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx$.

◀ Očigledno,

$$I = \int_0^\pi \sin^{n-1} x \cos nx \cos x dx - \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx.$$

Parcijalnim integraljenjem prvog integrala ($dv = \sin^{n-1} x \cos x dx = \frac{d(\sin^n x)}{n}$; $u = \cos nx$) je

$$I = \frac{\sin^n x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx - \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx = 0 \ ▶$$

112. $I = \int\limits_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx$.

◀ Slično prethodnom primeru $I = 0$ ▶

113. $I = \int\limits_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx$.

◀ Zamenjujući $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, dobijamo za podintegralnu funkciju

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-ax}}{2^{2n}} \left(e^{i2nx} + C_1^{2n} e^{i(2n-2)x} + C_2^{2n} e^{i(2n-4)x} + \cdots + C_{2n-(2n-1)}^{2n} e^{-i(2n-2)x} + e^{-i2nx}\right) \\ &= \frac{e^{-ax}}{2^{2n}} \left(2\left(C_0^{2n} \cos 2nx + C_1^{2n} \cos(2n-2)x + \cdots + \cdots + C_{n-1}^{2n} \cos 2x\right) + C_n^{2n}\right). \end{aligned}$$

Pošto je

$$I_{n,k} = \int_0^{2\pi} \cos(2n-2k)x e^{-ax} dx = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{x(-a+i(2n-2k))} dx = \left(\operatorname{Re} \frac{e^{x(-a+i(2n-2k))}}{-a+i(2n-2k)}\right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-ax}}{a^2+(2n-2k)^2}\left((2n-2k)\sin(2n-2k)x - a\cos(2n-2k)x\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{a\left(1-e^{-2a\pi}\right)}{a^2+(2n-2k)^2}\ (k=\overline{0,n-1}) \text{ i } \int\limits_0^{2\pi} e^{-ax}dx = \frac{1-e^{-2a\pi}}{a},
\end{aligned}
$$

to je konačno

$$
I = \frac{1-e^{-2a\pi}}{2^{2n}a}\left(C_n^{2n} + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k^{2n}\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right). \ ▶
$$

114. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \ln\cos x dx.$

◀ Podintegralna funkcija nije ograničena u okolini tačke $x=\frac{\pi}{2}$, dakle nije integrabilna na segmentu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Označavajući dati integral sa I_n i koristeći činjenicu da je funkcija

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (\cos(2n-2)x + \cos 2nx)\ln\cos x \\
&= 2\cos(2n-1)x\cos x\ln\cos x,
\end{aligned}
$$

$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ i $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ integrabilna na segmentu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ uz primenu parcijalnog integraljenja sleduje:

$$
\begin{aligned}
I_n + I_{n-1} &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \\
&= 2\left(\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\cos x\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} + \frac{1}{2n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x\sin x\right. \\
&\quad +2\left(\frac{1}{2n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\sin x\ln\cos x dx\right) \\
&= \frac{1}{2n-1}\left(I_{n-1}-I_n\right),
\end{aligned}
$$

odakle je $I_n = -\frac{n}{n-1}I_{n-1}$. Iz dobijene rekurentne veze sleduje $I_n = (-1)^{n-1}\frac{I_1}{n}$.

Zatim je

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_0 &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ln\cos x dx \\
&= 2\sin x\cos x\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ln\cos x dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\
&= I_0 - I_1 + \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

odakle se dobija $I_1 = \frac{\pi}{4}$, $I_n = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{4n}$. ▶

115. Izračunati **Ojlerov integral:** $B(m,n) = \int\limits_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ ako $m, n \in \mathbb{N}$.

◀ Parcijalnim integraljenjem ($x^{m-1}dx = dv; (1-x)^{n-1} = u$), imamo $B(m,n) = \frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{m}\int\limits_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx = \frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)$.
Primenjujući uzastopno formulu sniženja imamo

$$
\begin{aligned}
B(m,n) &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{m(m+1)\dots(m+n-2)}B(m+n-1,1) \\
&= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.
\end{aligned}
$$
▶

116. Ležandrov polinom je definisan sledećom formulom:
$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$
Dokazati da je

$$
\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}
$$

◀ Primenom Lajbnicove formule o izvodu proizvoda primenjene na funkciju $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ dobijamo

$$
\frac{d^j}{dx^j}\left((x^2-1)^n\right)\Big|_{-1}^{1} = 0 \quad \left(j = \overline{0, n-1}\right) \tag{1}
$$

Razmotrimo integral $I_{m,n} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) x^m dx$ u slučaju $m < n$. Parcijalnim integraljenjem m puta uz uslov (1) imamo

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= (-1)^m m! \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left((x^2-1)^n\right) dx \\ &= (-1)^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left((x^2-1)^n\right)\Big|_{-1}^{1} = 0. \end{aligned}$$

Polinom $P_n(x)$ se samo konstantnim činiocem razlikuje od polinoma $\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$, a polinom $P_m(x)$ je linearna kombinacija funkcija $x^m, x^{m-1}, \dots, 1$, i zato je prema (2), $\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ ako je $m < n$. Ako je $m > n$, to je $\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)x^n dx = 0$, znači $\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$, u slučaju da je $m \neq n$. Razmotrimo još integral $I = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$ Parcijalnim integraljenjem n puta, računajući (1) imamo

$$I = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left((x^2-1)^n\right)(x^2-1)^n dx.$$

Polinom $(x^2-1)^n$ uz najstariji član x^{2n} ima koeficijent 1, i zato je $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left((x^2-1)^n\right)$ $(2n)!$, odakle sleduje

$$I = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = \frac{2(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{0}^{1} (x^2-1)^n dx.$$

Uvodeći smenu $x = \sin t$ u poslednjem integralu dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot (2n)!(2n)!!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)!!} \\ &= \frac{2 \cdot (2n)!((2n)!!)^2}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Dokazali smo dakle

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$ ▶

Napomena. Dve integrabilne funkcije φ i ψ na segmentu $[a,b]$ nazivaju se ortogonalnim, ako je $\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$. Ležandrovi polinomi $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ su prema prethodnom zadatku ortogonalni na $[-1,1]$. Ovi polinomi imaju veliku primenu u rešavanju zadataka matematičke fizike.

117. Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ i F takva funkcija da je $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in [a,b]$ sa izuzetkom možda konačno unutrašnjih tačaka c_i $(i = \overline{1,p})$ i tačaka a i b, u kojima funkcija F ima prekide prve vrste.
Dokazati da je:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} (F(c_i+0) - F(c_i-0)).$$

◄ Definišimo novu funkciju na sledeći način:

$$\underset{x\in[c_i,c_{i+1}]}{F_1(x)} = \begin{cases} F(x), & x \in]c_i, c_{i+1}[; \\ F(c_i+0), \ x = c_i; & F(c_{i+1}-0), \ x = c_{i+1} \end{cases}$$

$(i = \overline{0,p})$, $c_0 = a$, $c_{p+1} = b$.

Razmotrimo sada proizvoljnu podelu P segmenta $[a,b]$ takvu da tačke c_i $(i = \overline{1,p})$ ulaze u deone tačke. Tada je (prema Lagranžovoj teoremi):

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (F_1(x_{j+1}) - F(x_j)) = \sum_{j=0}^{n-1} F_1'(\xi_j) \triangle x_j = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \triangle x_j, \ x_j < \xi_j < x_{j+1} \tag{1}$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^{n-1} (F_1(x_{j+1}) - F(x_j)) = \sum_{i=0}^{p} (F_1(c_{i+1}) - F_1(c_i)) \\ &= F_1(c_1) - F_1(c_0) + F_1(c_{p+1}) - F_1(c_p) + \sum_{i=1}^{p-1} (F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0)) \\ &= F(b-0) - F(a+0) + F(c_1-0) - F(c_1+0) + \cdots + F(c_p-0) - F(c_p+0) \\ &= F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} (F(c_i+0) - F(c_i-0)) \end{aligned} \tag{2}$$

Iz (1) dobijamo $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{j=0}^{n-1} (F_1(x_{j+1}) - F(x_j)) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Odavde i iz (2)

sleduje $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum\limits_{i=1}^{p} (F(c_i+0) - F(c_i-0))$ tj. dokaz tvrđenja je završen. ►

118. Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ i neka je $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$ njen neodređeni integral. Dokazati da je funkcija F neprekidna i u svim tačkama neprekidnosti funkcije f važi jednakost $F'(x) = f(x)$. Šta se može reći o izvodu funkcije F u tačkama prekida funkcije f ?

◄ Dokaz teoreme se može naći u udžbeniku **B.B.Nemickii i dr.** Kurs matematičke analize, tom I. Što se tiče pitanja o izvodu funkcije F u tačkama prekida funkcije f imamo primer: Uzmimo funkciju f na sledeći način: $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $f(x) = 0$ za $x \neq \frac{1}{n}$. Očigledno je $\int\limits_0^x f(t)dt = 0$ za proizvoljno fiksirano $|x| \leq 1$ (funkcija f je različita od nule na skupu Žordanove mere nula), zato je $F(x) = C$ tj. $F'(x) = 0$ u bilo kojoj tački $x \in [-1,1]$. Znači u tačkama prekida $\frac{1}{n}$ funkcije f funkcija F ima izvod. Uzmimo sada funkciju $f(x) = sgn x$. Ovde je $F(x) = |x| + C$, i $F'(0)$ ne postoji, a 0 je tačka prekida funkcije f. ►

Napomena. Neodređenim integralom (uopštenom primitivnom funkcijom) ograničene prekidne funkcije f na nekom razmaku X zovemo skup svih funkcija F definisanih i neprekidnih na tom razmaku, tako da je $F'(x) = f(x)$ u svakoj tački x neprekidnosti funkcije f. Iz navedenog zadatka sledi da svaka integrabilna funkcija na segmentu $[a,b]$ ima uopštenu primitivnu funkciju i da je njen oblik: $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$.

Naći neodređene integrale od ograničenih prekidnih funkcija:

119. $\int sgn x dx$.

◄ Najpre imamo $F(x) = \int\limits_0^x sgn t dt = \begin{cases} x, & 0 \leq t \leq x; \\ -x, & x \leq t \leq 0. \end{cases}$ Pošto je $F(-0) = F(+0)$, to je konačno $F(x) = |x|$. Sada je prema formuli

$$\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C,$$

(gde je C proizvoljna konstanta)

$$\int sgn x dx = |x| + C. \quad ►$$

120. $\int sgn(\sin x)dx$.

◀ Uzmimo $F(x) = \int_0^x sgn(\sin t)dt$. Podintegralna funkcija je periodična a F neprekidna. Neka je $x > 0$ i $x \in]n\pi, (n+1)\pi[$; tada je očigledno, $F(x) = \int_{n\pi}^x dt = x - n\pi$, ako je n paran broj. Ako $x \in](n-1)\pi, n\pi[$ i n je paran broj to je

$$F(x) = \pi + \int_{(n-1)\pi}^{x} (-1)dt = -x + n\pi.$$

Neka je zatim $x < 0$ i $x \in]-(n+1)\pi, -n\pi[$, gde je n paran, tada je

$$F(x) = \int_{-n\pi}^{x} (-1)dt = -x - n\pi;$$

ako $x \in]-n\pi, -(n-1)\pi[$, to je

$$F(x) = \pi + \int_{-(n-1)\pi}^{x} dt = x + n\pi.$$

Za svako x očigledno je $F(x) = \pm x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $0 \le F(x) \le \pi$. Pokažimo da je $F(x) = \arccos(\cos x)$. Ako je $y = \arccos(\cos x)$ onda je $\cos y = \cos x$, odakle je $y = \pm x + 2k\pi$; $0 \le y \le \pi$. Znači,

$$\int sgn(\sin x)dx = \arccos(\cos x) + C. \quad ▶$$

121. $\int [x]\, dx \ (x \ge 0)$.
◀ Neka $x \in]k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x [t]\, dt = \sum_{j=1}^{k} \int_{j-1}^{j} [t]\, dt + \int_k^x [t]\, dt = \sum_{j=1}^{k-1} j + kx - k^2 \\ &= \frac{k(k-1)}{2} - k^2 + kx = kx - \frac{k(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Pošto je $k = [x]$ to je $F(x) = x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2}$. Neprekidna funkcija F je primitivna za $f(x) = [x]$ na svakom od intervala neprekidnosti funkcije f. Dakle,

$$\int [x]\, dx = x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C$$

gde je C proizvoljna konstanta ▶

122. $\int x\,[x]\,dx$ $(x \geq 0)$.

◀ Pretpostavljajući da $x \in \,]k, k+1[\,$, nalazimo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t\,[t]\,dt = \sum_{j=1}^{k} \int_{j-1}^{j} (j-1)t dt + k \int_k^x t dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(2j^2 - 3j + 1) + \frac{kx^2}{2} - \frac{k^3}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{3} - \frac{3k(k+1)}{2} + k\right) + \frac{kx^2}{2} - \frac{k^3}{2} \\ &= \frac{kx^2}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{12} = [x]\,\frac{x^2}{2} - \frac{[x]\,([x]+1)\cdot(2\,[x]+1)}{12}, \end{aligned}$$

jer je $k = [x]$. Dakle,

$$\int x\,[x]\,dx = [x]\,\frac{x^2}{2} - \frac{[x]\,([x]+1)\cdot(2\,[x]+1)}{12} + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta. ▶

123. $\int (-1)^{[x]} dx$.

◀ Neka $x \in \,]k, k+1[\,$, $x > 0$; tada imamo

$$F(x) = \int_0^x (-1)^{[t]} dt = \begin{cases} x - k, & k = 2m; \\ -x + k + 1, & k = 2m - 1. \end{cases}$$

Neka $x \in \,]-k-1, -k[\,$, $x < 0$ tada je očigledno

$$F(x) = \int_0^x (-1)^{[t]} dt = \begin{cases} -x - k, & k = 2m; \\ x + k + 1, & k = 2m - 1. \end{cases}$$

U opštem slučaju je $F(x) = \pm x + 2n$; $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq F(x) \leq 1$; Dakle,

$$\int (-1)^{[x]} dx = \pm x + 2n + C, n \in \mathbb{Z}.$$

Rezultat se može zapisati u drugom obliku. Zaista, razmotrimo funkciju $y = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos \pi x)$. Dalje je $\cos \pi y = \cos \pi x$, odakle sledi $y = \pm x + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq y \leq 1$. Na taj način je $F(x) \equiv y(x)$, tj.

$$\int (-1)^{[x]} dx = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos \pi x) + C. \;▶$$

124. $\int\limits_0^x f(t)dt$, gde je $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < l; \\ 0, & |t| > l \end{cases}$

◀ Integraljenjem sledi

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & |x| \le l \\ l, & x > l \\ -l, & x < -l \end{cases} = \frac{1}{2}(|x+l| - |x-l|). \ ▶$$

Izračunati određene integrale od ograničenih prekidnih funkcija:

125. $\int\limits_0^3 sgn(x - x^3)dx$.

◀ Pošto je $sgn(x - x^3) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ -1, & 1 < x \le 3; \\ 0, & x = 0, x = 1, \end{cases}$ to je

$$\int\limits_0^3 sgn(x - x^3)dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_1^3 dx = 1 - 2 = -1. \ ▶$$

126. $\int\limits_0^2 [e^x]\, dx$.

◀ Monotona i neprekidna funkcija $y = e^x$ na segmentu $[0, 2]$ uzima sve vrednosti između 1 i e^2 $(7 < e^2 < 8)$. Tačke prekida funkcije $[e^x]$ su $x_k = \ln k$ $(k = 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, pri čemu je $[e^x] = k$, ako $x \in [\ln k, \ln(k+1)[$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Zato je

$$\begin{aligned} \int\limits_0^2 [e^x]\, dx &= \sum_{k=1}^{6} \int\limits_{\ln k}^{\ln(k+1)} k dx + 7 \int\limits_{\ln 7}^{2} dx = \sum_{k=1}^{6} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + 7(2 - \ln 7) \\ &= \ln \frac{7^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \ln 7^7 + 14 = 14 - \ln(7!). \ ▶ \end{aligned}$$

127. $I = \int\limits_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx$.

◀ Tačke prekida podintegralne funkcije su $x_k = k$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Kako je $[x] = k$ za $x \in [k, k+1[$, to je

$$I = \sum_{k=1}^{5} k \int\limits_k^{k+1} \sin \frac{\pi x}{6} dx = \sum_{k=1}^{5} \frac{6k}{5} \cos \frac{\pi x}{6} \Big|_{x=k+1}^{x=k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{5} k\left(\cos\frac{k\pi}{6} - \cos\frac{(k+1)\pi}{6}\right)\\
&= \frac{6}{\pi}\left(\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) +\right.\\
&\quad \left. +4\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{6}\right) + 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} - \cos\pi\right)\right) = \frac{30}{\pi}. \ \blacktriangleright
\end{aligned}
$$

128. $\int\limits_0^\pi x sgn(\cos x)dx.$

◀ Podintegralna funkcija je ograničena i prekidna u tački $x = \frac{\pi}{2}$, zato je

$$
\int\limits_0^\pi x sgn(\cos x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{4}. \ \blacktriangleright
$$

129. $\int\limits_1^{n+1} \ln[x]\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$

◀ Tačke prekida podintegralne funkcije su $x_k = k$ $(k = \overline{2, n+1})$. Pošto je $\ln[x] = \ln k$, za $x \in [k, k+1[$ $(k = \overline{1,n})$, to je

$$
\int\limits_1^{n+1} \ln[x]\,dx = \sum_{k=1}^{n} \ln k \int\limits_k^{k+1} dx = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!). \ \blacktriangleright
$$

130. $\int\limits_0^1 sgn(\sin(\ln x))dx.$

◀ Tačke prekida podintegralne funkcije su nule funkcije $y = \sin(\ln x)$, tj. $x_k = e^{-k\pi}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Na taj način je

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^1 sgn(\sin(\ln x))dx &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{x_{k+1}}^{x_k} sgn(\sin(\ln x))dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k-1}\left(e^{-k\pi} - e^{-(k+1)\pi}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}(e^{-k\pi} - e^{-(k+1)\pi})\\
&= (1 - e^{-\pi})\lim_{n\to\infty}\frac{-1 + (-1)^n e^{-(n+1)\pi}}{1 + e^{-\pi}}\\
&= \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} + 1} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}} = -\tanh\frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

jer je

$$sgn(\sin(\ln x)) = \begin{cases} -1, & x \in]x_{k+1}, x_k[\,, \ k = 2m; \\ 1, & x \in]x_{k+1}, x_k[\,, \ k = 2m-1 \end{cases} = (-1)^{k-1},$$

$x \in]x_{k+1}, x_k[$. ►

131. Naći $\int\limits_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$, gde je E skup svih vrednosti segmenta $[0, 4\pi]$, za koje podintegralni izraz ima smisla.

◄ Očigledno da je $E = [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$, pa je

$$\int\limits_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d(\sin x) - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x} d(\sin x) + \int\limits_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d(\sin x) - \int\limits_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} \sqrt{\sin x} d(\sin x)$$

$$= \frac{2}{3} \left(\sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} - \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} \right) = \frac{8}{3}.$$ ►

4.3 Teoreme o srednjoj vrednosti

1^0 Srednja vrednost funkcije. Broj

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x) dx$$

se naziva srednjom vrednošću funkcije f na segmentu $[a, b]$. Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, onda postoji tačka $\xi \in]a, b[$, takva da je $M[f] = f(\xi)$.

2^0 Prva teorema o srednjoj vrednosti. Ako su funkcije f i φ ograničene i integrabilne na $[a, b]$ i pri tom funkcija φ ne menja znak za $a < x < b$, onda je

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x) dx = \mu \int\limits_a^b \varphi(x) dx,$$

gde je $m \le \mu \le M$, $m = \inf\limits_{a<x<b} \{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{a<x<b} \{f(x)\}$ Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, to je $\mu = f(\xi)$, gde je $a \le \xi \le b$.

3^0 Druga teorema o srednjoj vrednosti. Ako su funkcije f i φ ograničene i integrabilne na segmentu $[a,b]$ i ako je funkcija φ monotona za $a < x < b$, onda je

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx,$$

gde je $a \le \xi \le b$. Ako je pri tom funkcija φ opadajuća i nenegativna, tada je

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx \ (a \le \xi \le b).$$

Ako je funkcija φ rastuća i nenegativna, onda je

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx \ (a \le \xi \le b).$$

4^0 Rešeni zadaci.

132. Odrediti znak sledećih određenih integrala:

a) $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx$; b) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$; c) $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx$; d) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx$.

◀ a) Predstavimo dati integral u obliku zbira dva integrala po segmentima $[0,\pi]$ i $[\pi, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx = \int_0^\pi x\sin x dx + \int_\pi^{2\pi} x\sin x dx.$$

Smenom $x - \pi = t$, dobijamo

$$\int_\pi^{2\pi} x\sin x dx = \int_0^\pi (t+\pi)\sin(t+\pi) = -\int_0^\pi t\sin t dt - \pi\int_0^\pi \sin t dt.$$

Dolazimo do zaključka da je $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx = -\pi\int\limits_0^\pi \sin x dx < 0$, jer je $\int\limits_0^\pi \sin x dx = \pi\sin\xi > 0$, $0 < \xi < \pi$ (prema prvoj teoremi o srednjoj vrednosti).

b) Razmotrimo funkciju

$$\underset{x\in[0,2\pi]}{F(x)} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

tada je $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{2\pi} F(x)dx$. Očigledno,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{\pi} F(x)dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{F(x)dx}{\pi + x} = \pi F(\xi) \ln 2,$$

gde je $0 < \xi < \pi$ (u integralu $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ je uvedena smena $x - \pi = t$, a u poslednjem integralu je primenjena prva teorema o srednjoj vrednosti). Pošto je $F(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} > 0$ za $0 < \xi < \pi$, to je $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 0$.

c) Zapišimo dati integral u obliku zbira dva integrala po segmentima $[-2, 0]$ i $[0, 2]$ i u integralu po segmentu $[-2, 0]$ uvedimo smenu $x = -t$; dobijamo

$$\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx = 2 \int\limits_0^2 x^3 \sinh(x \ln 2) dx = 8(\xi \ln 2),\ 0 < \xi < 2$$

(po prvoj teoremi o srednjoj vrednost). Na taj način je $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx > 0$.

d) Primenom prve teoreme o srednjoj vrednosti imamo

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx = \xi^2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x dx = \frac{\xi^2}{2} (\ln 2 - 1) < 0,$$

jer je $\ln 2 < 1$, $\frac{1}{2} < \xi < 1$. ▶

133. Koji je integral veći?

a) $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ ili $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$;

b) $I_1 = \int\limits_0^1 e^{-x} dx$ ili $I_2 = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$;

c) $I_1 = \int\limits_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ ili $I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$.

◀ a) Pošto je $\sin^2 x > \sin^{10} x$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ i jednakost $\sin^2 x = \sin^{10} x$ je moguća jedino za $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$ to je $\varphi(x) = \sin^2 x - \sin^{10} x > 0$, ako $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)dx > 0$ tj. $I_2 > I_1$.

b) Zbog $e^{-x^2} > e^{-x}$ za $x \in]0,1[$, to je $I_2 > I_1$.

c) Uvodeći smenu $x - \pi = t$, u drugom integralu imamo $I_2 = \int\limits_0^{\pi} e^{-(\pi+t)^2} \cos^2 t$
Sada je

$$I_1 - I_2 = \int\limits_0^{\pi} \left(e^{-x^2} - e^{-(\pi+x)^2}\right) \cos^2 x dx.$$

Primenjujući na poslednji integral prvu teoremu o srednjoj vrednosti, nalazimo

$$I_1 - I_2 = \left(e^{-\xi^2} - e^{-(\pi+\xi)^2}\right) \frac{\pi}{2},$$

gde je $0 < \xi < \pi$. Kako je $e^{-\xi^2} - e^{-(\pi+\xi)^2} > 0$, to je $I_1 > I_2$. ▶

134. Odrediti srednju vrednost funkcije u navedenim segmentima:
a) $f(x) = x^2$ na $[0,1]$; b) $f(x) = \sqrt{x}$ na $[0,100]$;
c) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$ na $[0, 2\pi]$;
d) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ na $[0, 2\pi]$.

◀ Polazeći od definicije srednje vrednosti funkcije, imamo

a) $M[f] = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$; b) $M[f] = 0,01 \int\limits_0^{100} \sqrt{x} dx = \frac{20}{3}$;

c) $M[f] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (10 + 2\sin x + 3\cos x)dx = 10$

d) $M[f] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin x \sin(x+\varphi)dx = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi - \cos(2x+\varphi))dx = \frac{\cos\varphi}{2}$.

▶

135. Naći srednju vrednost dužine radijus vektora elipse $r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

◀

$$M[r] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{p d\varphi}{1 - \varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan\frac{x}{2}\right)$$

$$+\frac{p}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] \Big|_0^{2\pi-0} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

(primer 206, glava III). Iz analitičke geometrije znamo da je $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,

$p = \frac{b^2}{a}$ (a je veća a b manja polu osa elipse). Zamenjivanjem ε i p svojim vrednostima dobijamo $M[r] = b$. ►

136. Naći srednju vrednost brzine tela koje slobodno pada, ako mu je v_0 početna brzina.

◄ Brzina tela koje slobodno pada u trenutku t, data je formulom $v(t) = v_0 + gt$, gde je v_0 početna brzina a g ubrzanje slobodnog padanja.

$$M[v] = \frac{1}{T}\int_0^T (v_0 + gt)dt = v_0 + \frac{gT}{2} = \frac{v(T) + v_0}{2},$$

jer je $\frac{gT}{2} = \frac{v(T) - v_0}{2}$. ►

137. Jačina sile data je formulom $i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$, gde je i_0 amplituda; t vreme; T period i φ početna faza. Naći srednju vrednost kvadrata jačine sile.

◄

$$i^2 = \frac{i_0^2}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\varphi\right)\right);$$

$$M[i^2] = \frac{t_0^2}{2T}\int_0^T \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\varphi\right)\right)dt = \frac{t_0^2}{2}. \ ►$$

138. Neka $f \in C[0, +\infty[$ i neka je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Naći

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

Razmotriti slučaj funkcije $f(t) = \arctan t$.

◄ Pošto je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji $B \in \mathbb{R}$ tako da je $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ kad god je $x \geq B$. Neka je $x > B$; tada je

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^B f(t)dt + \frac{1}{x}\int_B^x f(t)dt = \frac{C}{x} + \left(1 - \frac{B}{x}\right) f(\xi),$$

gde je $C = \int_0^B f(t)dt$ =const, $B \leq \xi \leq x$ prema prvoj teoremi o srednjoj vrednosti). Ocenimo razliku:

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - A\right| = \left|\frac{C}{x} + (f(\xi) - A) - \frac{f(\xi)B}{x}\right| \leq \frac{|C - f(\xi)B|}{x} + |f(\xi) - A|.$$

Kako je f neprekidna funkcija, B fiksiran broj, a x možemo uzeti dovoljno veliko, to je $\frac{|C-f(\xi)B|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ za dovoljno veliko x, a $|f(\xi)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$ jer je $B \leq \xi \leq x$. Na taj način je za dovoljno veliko x: $\left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt - A\right| < \varepsilon$, odakle sledi da je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt = A$. Uzimajući $f(x) = \arctan x$, imamo da je $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x \arctan t dt = \frac{\pi}{2}$. ▶

139. Neka je $\int\limits_0^x f(t)dt = xf(\theta x)$. Naći θ, ako je :

a) $f(t) = t^n$ $(n > -1)$; **b)** $f(t) = \ln t$; **c)** $f(t) = e^t$. Čemu je jednak $\lim\limits_{x\to 0} \theta$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta$?

◀ a) Po uslovu je $\int\limits_0^x t^n dt = x(\theta x)^n$; odavde je $\theta^n = \frac{1}{n+1}$; $\theta = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ =const. Zatim je $\lim\limits_{x\to 0} \theta = \lim\limits_{x\to+\infty} \theta = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

b) Ovde je $\int\limits_0^x \ln t dt = x\ln(\theta x)$, ili $x(\ln x - 1) = x(\ln x + \ln\theta)$, odakle sledi $\theta = e^{-1}$ =const. pa je $\lim\limits_{x\to 0} \theta = \lim\limits_{x\to+\infty} \theta = e^{-1}$.

Napomena: Integral $\int\limits_0^x \ln t dt$ shvatamo u nesvojstvenom smislu tj. $\int\limits_0^x \ln t dt = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int \varepsilon^x \ln t dt$.

c) Prema usalovu zadatka je $e^x - 1 = xe^{\theta x}$, odakle je $\theta = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$. Neka $x \to 0$; tada je

$$\ln\frac{e^x-1}{x} = \frac{x}{2} + O^\star\left(x^2\right)$$

tj. $\lim\limits_{x\to 0} \theta = \frac{1}{2}$. Neka $x \to +\infty$; tada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x} &= \frac{1}{x}\left(\ln(e^x-1) - \ln x\right) = \frac{1}{x}\left(x + \ln(1-e^{-x}) - \ln x\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(x - e^{-x} + o(e^{-x}) - \ln x\right);\end{aligned}$$

dakle $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta = 1$. ▶

Koristeći prvu teoremu o srednjoj vrednost, oceniti integrale:

140. $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$.

◀ Pošto je $\cos(2\pi - x) = \cos x$, to je

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5\cos x} = \frac{2\pi}{1 + 0,5\cos\xi},\ 0 < \xi < \pi$$

(prva teorema o srednjoj vrednosti). Imamo ocenu: $\frac{4}{3}\pi < I < 4\pi$, tj. $-\frac{4}{3}\pi < I - \frac{8}{3}\pi < \frac{4}{3}\pi$. Označimo $\frac{I-\frac{8}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \theta$; onda je $I = \frac{8\pi}{3} + \frac{4\pi\theta}{3}$, gde je $|\theta| < 1$. ▶

141. $I = \int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx$.

◀ Prema prvoj teoremi o srednjoj vrednosti, nalazimo da je $I = \frac{1-e^{-100}}{\xi+100}$, gde je $0 < \xi < 100$. Pošto je $\xi = 100\theta$, $0 < \theta < 1$, to je $I = \frac{0,01(1-e^{-100})}{1+\theta}$. Kako je zatim $0,005(I - e^{-100}) < I < 0,01(1 - e^{-100})$, to je $-0,005(1 - e^{-100}) < I - 0,01(1 - e^{-100}) < 0$, odakle je $0 < \frac{I-0,01(1-e^{-100})}{-0,005(1-e^{-100})} < 1$. Stavljajući $\theta_1 = \frac{I-0,01(1-e^{-100})}{-0,005(1-e^{-100})}$, dobijamo $I = (0,01 - 0,005\theta_1)(1 - e^{-100}) \approx 0,01(1 - 0,5\theta_1)$, $0 < \theta_1 < 1$. ▶

142. $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$.

◀ Po prvoj teoremi imamo $I = \int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{1}{10\sqrt{1+\xi}}$, gde je $0 < \xi < 1$, odakle je $\frac{1}{10\sqrt{2}} < I < \frac{1}{10}$. ▶

143. Dokazati jednakosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

◀ a) Na osnovu prve teoreme o srednjoj vrdnosti je $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{(n+1)(1+\xi)}$, $0 < \xi < 1$; Odavde sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.

b) Imamo

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = I_n' + I_n'',$$

gde je $0 < \varepsilon < \pi$ proizvoljnan unapred zadati broj. Za svako n, očigledno važi ocena:

$$|I_n''| \le \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

S obzirom da je $I_n' < I_{n-1}'$ i $I_n' > 0$, to postoji $\lim\limits_{n\to\infty} I_n' = C$. Po prvoj teoremi o srednjoj vrednosti je $I_n' = \sin\xi_n \cdot I_{n-1}'$; $0 < \xi_n < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$. Zapisujući sada nizove I_n' i I_{n-1}' u obliku zbira njihovog limesa C i nekih beskonačno malih nizova, dobijamo da je $C = 0$. Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 tako da je za $n > n_0$

$$|I_n'| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Iz ocena (1) i (2) dobijamo da je $|I_n| < \varepsilon$ kad god je $n > n_0$, što znači da je $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. ▶

144. Naći: a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3+1}$; b) $\lim\limits_{\varepsilon\to +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x}$, gde je $a > 0$, $b > 0$, $f \in C[0,1]$.

◀ a) Prema prvoj teoremi je $\int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3+1} = \frac{1}{\varepsilon\xi^3+1}$, $0 < \xi < 1$, odavde sledi $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3+1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon\xi^3+1} = 1$.

b) Prema prvoj teoremi imamo $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x} = f(\xi)\ln\frac{b}{a}$, $a\varepsilon < \xi < b\varepsilon$; ako $\varepsilon \to 0$ onda $\xi \to 0$, i pošto $f \in C[a,b]$ to je $\lim\limits_{\varepsilon\to +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to +0} f(\xi)\ln\frac{b}{a} = f(0)\ln\frac{b}{a}$. ▶

145. Neka su funkcije f, φ neprekidne na $[a,b]$ i neka je φ diferencijabilna na $]a,b[$ tako da je $\varphi'(x) \ge 0$ za $a < x < b$. Dokazati drugu teoremu o srednjoj vrednosti primenom parcijalne integracije i prve teoreme o srednjoj vrednosti.

◀ Razmotrimo integral $I = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$; parcijalnim integraljenjem uzimajući $dv = f(x)dx$, $u = \varphi(x)$: imamo

$$\begin{aligned} I &= \left(\varphi(x)\int_a^x f(t)dt\right)\Big|_a^b - \int_a^b \left(\varphi'(x)\int_a^x f(t)dt\right)dx \\ &= \varphi(b)\int_a^b f(x)dx - (\varphi(b)-\varphi(a))\int_a^\xi f(x)dx, \end{aligned}$$

gde je $a < \xi < b$ (na integral $\int\limits_a^b \left(\varphi'(x)\int\limits_a^x f(t)dt\right)dx$ se može primeniti prva teorema o srednjoj vrednosti jer je funkcija $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ neprekidna, a $\varphi'(x) \geq 0$ po uslovu zadatka). Primenjujući dalje jednostavnu transformaciju imamo

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx + \varphi(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx,$$

što je i trebalo dokazati. ▶

Polazeći od druge teoreme o srednjoj vrednosti, oceniti integrale:

146. $I = \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}dx.$

◀ Na osnovu svojstva aditivnosti integrala imamo

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=100}^{199}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \sum_{k=100}^{199}(-1)^k\int\limits_0^\pi \frac{\sin t dt}{t+k\pi} \\ &= \sum_{n=50}^{99}\left(\int\limits_0^\pi \frac{\sin t dt}{t+2n\pi} - \int\limits_0^\pi \frac{\sin t dt}{t+(2n+1)\pi}\right) = \pi\sum_{n=50}^{99}\int\limits_0^\pi \frac{\sin t dt}{(t+2n\pi)(t+(2n+1)\pi)} \\ &= \sum_{n=50}^{99}\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\int\limits_0^{\xi_n}\sin t dt = \sum_{n=50}^{99}\frac{1-\cos\xi_n}{2n(2n+1)\pi} \end{aligned}$$

(u integralu $\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$ je uvedena smena $x - k\pi = t$, a zatim primenjena druga teorema o srednjoj vrednosti). Kako je $0 < 1-\cos\xi_n < 2$, $0 < \sum\limits_{n=50}^{99}\frac{1-\cos\xi_n}{2n(2n+1)\pi} < \frac{2\cdot 50}{10^4\pi} = \frac{1}{100\pi}$, to je $0 < I < \frac{1}{100\pi}$. Označavajući $\theta = \frac{I\pi}{0{,}01}$ dobijamo $I = \frac{\theta}{100\pi}$, $0 < \theta < 1$. ▶

147. $\int\limits_a^b e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ $(\alpha \geq 0, 0 < a < b)$.

◀ Na osnovu druge teoreme je $I = \frac{e^{-\alpha a}}{a}(\cos a - \cos\xi)$, $a < \xi < b$. Jasno $-\frac{2}{a} < I < \frac{2}{a}$. Označavanjem $\frac{aI}{2} = \theta$, dobijamo $I = \frac{2\theta}{a}$, gde je $|\theta| < 1$. ▶

148. $\int\limits_a^b \sin x^2 dx$ $(0 < a < b)$.

◀ Smenom $x^2 = t$, imamo $I = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$; primenjujući drugu teoremu o srednjoj vrednosti sledi $I = \frac{1}{2a}\int\limits_{a^2}^{\xi} \sin t dt = \frac{\cos a^2 - \cos \xi}{2a}$, $a^2 < \xi < b^2$. Pošto je zatim $-\frac{1}{a} < I < \frac{1}{a}$, to stavljajući da je $I : \frac{1}{a} = \theta$, dobijamo $I = \frac{\theta}{a}$, gde je $|\theta| < 1$. ▶

149. Neka su funkcije φ, ψ integrabilne na segmentu $[a,b]$ zajedno sa svojim kvadratima. Dokazati nejednakost Koši-Bunjakovskog:

$$\left(\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)^2 \leq \int\limits_a^b \varphi^2(x)dx \cdot \int\limits_a^b \psi^2(x)dx.$$

◀ Označimo $\alpha = \int\limits_a^b \varphi^2(x)dx$, $\beta = \int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$, $\gamma = \int\limits_a^b \psi^2(x)dx$ i analizirajmo dva moguća slučaja: **1)** $\alpha = \gamma = 0$; **2)** bar jedan od brojeva α ili γ je različit od nule.

1) Neka je $\alpha = \gamma = 0$; integraleći očiglednu nejednakost, $|\varphi(x)\psi(x)| \leq \frac{1}{2}(\varphi^2(x) + \psi^2(x))$, dobijamo

$$\left|\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |\varphi(x)\psi(x)|\, dx \leq \frac{1}{2}\left(\int\limits_a^b \varphi^2(x)dx + \int\limits_a^b \psi^2(x)dx\right) = \frac{\alpha+\gamma}{2},$$

odakle sledi, $\beta = 0$ tj. nejednakost je ispunjena.

2) Neka je na primer, $\gamma > 0$. Tada je za sve realne vrednosti parametra λ izraz $(\varphi(x)+\lambda\psi(x))^2$ nenegativan. Integrišući nejednakost $(\varphi(x)+\lambda\psi(x))^2 \geq 0$, dobijamo da je $\lambda^2\gamma + 2\lambda\beta + \alpha \geq 0$ (za svako realno λ). Dakle, diskriminanta kvadratnog trinoma $y = \lambda^2\gamma + 2\lambda\beta + \alpha$ je nepozitivna, tj. $\beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$, odakle sledi $\beta^2 \leq \alpha\gamma$ ili

$$\left(\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)^2 \leq \int\limits_a^b \varphi^2(x)dx \cdot \int\limits_a^b \psi^2(x)dx,$$

što je i trebalo dokazati. ▶

150. Neka je funkcija g neprekidno diferencijabilna na segmentu $[a,b]$ i neka je $g(a) = 0$. Dokazati nejednakost $M^2 \leq (b-a)\int\limits_a^b (g'(x))^2\, dx$, gde je $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} \{|g(x)|\}$.

◄ Zapišimo nejednakost Koši-Bunjakovskog u obliku

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \psi^2(x)dx}$$

i u njoj uzmimo $\varphi(t) = g'(t), \psi(t) \equiv 1$ na segmentu $[a, x]$, gde je $a \le x \le b$: imamo

$$\sqrt{\int_a^x (g'(t))^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_a^x 1^2 dt} \ge \left|\int_a^x g'(t) \cdot 1dt\right|,$$

odakle (uzimajući u obzir da je $g(a) = 0$) sledi

$$\sqrt{(x-a)} \cdot \int_a^x (g'(t))^2 \ge |g(x)|,$$

tj. imamo da tim pre važi

$$\sqrt{(b-a)} \cdot \int_a^b (g'(x))^2 \ge |g(x)|.$$

Prelaskom na supremum leve i desne strane, dobijamo

$$\sqrt{(b-a)\int_a^b (g'(x))^2\, dx} \ge M$$

gde je $M = \sup\limits_{a \le x \le b} \{|g(x)|\}$. Kavadriranjem leve i desne strane poslednje nejednakosti završavamo dokaz navedenog tvrđenja. ►

151. Dokazati jednakost $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0$ $(p > 0)$.

◄ Funkcija $x \mapsto \frac{1}{x}$ opada na proizvoljnom segmentu $[n, n+p]$, a funkcija $x \mapsto \sin x$ je neprekidna na tom segmentu. Prema **drugoj teoremi o srednjoj vrednosti** imamo $\int_p^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos n - \cos \xi_n}{n}$, $n < \xi_n < n+p$. Kako je sada $\left|\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx\right| = \frac{|\cos n - \cos \xi_n|}{n} \le \frac{2}{n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0$. ►

4.4 Nesvojstveni integral

4.4.1 Nesvojstveni integral prve vrste.

1^0 Ako je funkcija $y = f(x)$ definisana za $a \leq x < +\infty$ i integrabilna na svakom konačnom segmentu $a \leq x \leq b < +\infty$, onda je po definiciji,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx. \tag{1}$$

Ako za $X \to +\infty$ funkcija $F(X) = \int_a^X f(x)dx$ ima konačan limes, onda se nesvojstveni integral (prve vrste) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ naziva konvergentnim; ako za $X \to +\infty$ funkcija $F(X)$ nema konačan limes, tada se nesvojstveni integral naziva divergentnim i ne dodeljuje mu se nikakva brojna vrednost.

2^0 **Košijev kriterijum.** Integral (1) konvergira, ako i samo ako za svaki pozitivan broj ε postoji $X > a$ takvo da je za svako $X' > X$ i svako $X'' > X$

$$|F(X') - F(X'')| = \left| \int_{X'}^{X''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

3^0 Ako je f nenegativna funkcija na $[a, +\infty[$, onda je $F(X) = \int_a^X f(x)dx$ neopadajuća; ako je F neograničena na $]a, +\infty[$, to za $X \to +\infty$, $F(X) \to +\infty$ i tada se kaže da integral (1) divergira ka $+\infty$; ako je F ograničena na $]a, +\infty[$, onda je $\sup\{F(X)\} = \lim_{X \to +\infty} F(X)$ i integral (1) konvergira.

4^0 **Poredbeni kriterijum.** Ako su na $]a, +\infty[$ date dve nenegativne funkcije f_1 i f_2, pri čemu je $f_1(x) \leq Cf_2(x)$ $(C > 0)$, onda iz konvergencije integrala od $f_2(x)$ sledi konvergencija integrala od $f_1(x)$, a iz divergencije integrala od $f_1(x)$, sledi divergencija integrala od $f_2(x)$. Neka je u integralu (1) $f(x) = \frac{1}{x^\lambda}$; za $\lambda > 1$ integral (1) konvergira, a za $\lambda \leq 1$ integral divergira. Dobili smo praktičan kriterijum upoređivanja: ako je $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^\lambda}\right)$ kad $x \to +\infty$, onda za $\lambda > 1$ integral (1) konvergira, a za $\lambda \leq 1$ divergira. U praksi se ovaj kriterijum često koristi.

U ovom paragrafu simbol $O^\star$ se koristi i za označavanje reda rasta funkcija. Tako na primer zapis " $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^\lambda}\right)$ za $x \to +\infty$" označava , da je za $\lambda > 0$ funkcija f beskonačno mala kad $x \to +\infty$ reda λ u poređenju

sa beskonačno malom $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, a za $\lambda < 0$ je beskonačno velika, čiji je red rasta u poređenju sa beskonačno velikom funkcijom $\varphi(x) = x$ jednak $-\lambda$. Slično zapis "$g(x) = O^{\star}\left(\frac{1}{(x-a)^{\lambda}}\right)$ za $x \to a$" označava, da je funkcija g u okolini tačke $x = a$ beskonačno mala (za $\lambda < 0$) i beskonačno velika (za $\lambda > 0$) respektivno reda $-\lambda$ i λ. Pretpostavlja se takođe da za dovoljno veliko x kao i u nekoj maloj okolini tačke $x = a$ funkcije f i g imaju potpuno određen znak.

5^0 Integral (1) se naziva apsolutno konvergentnim, ako konvergira integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{2}$$

Integral (1) može konvergirati i u slučaju, kada integral (2) divergira; tada se kaže da integral (1) konvergira uslovno. Iz apsolutne konvergencije nesvojstvenog integrala prvog reda uvek sledi njegova konvergencija.

6^0 **Abelov i Dirihleov kriterijum konvergencije nesvojstvenog integrala.** Razmotrimo nesvojstveni integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx. \tag{3}$$

Ako integral $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ konvergira a funkcija g je monotona i ograničena, tada integral (3) konvergira. (Abelov kriterijum).

Ako za $x \to +\infty$ neprekidno diferencijabilna funkcija g monotono teži nuli, a funkcija f ima ograničenu primitivnu funkciju F, tj. $|F(x)| \le C$, onda integral (3) konvergira. (Dirihleov kriterijum).

Napomenimo da se prilikom ispitivanja konvergencije nesvojstvenih integrala u praksi često javljaju integrali oblika

$$I_1 = \int_a^{+\infty} g(x)\sin kx dx; \; I_2 = \int_a^{+\infty} g(x)\cos kx dx,$$

gde je $k \neq 0$ proizvoljan fiksiran ceo broj. Ako je g neprekidno diferencijabilna funkcija koja monotono teži nuli kad $x \to +\infty$, onda integrali I_1 i I_2 konvergiraju.

Zaista, funkcije $F(X) = \int_a^X \sin kx dx = \frac{\cos ak - \cos kX}{k}$, $\Phi(X) = \int_a^X \cos kx dx =$

$\frac{\sin kX - \sin ak}{k}$ su ograničene za svako fiksirano celo $k \neq 0$ i za svako X. Zato prema Dirihleovom kriterijumu integrali I_1 i I_2 konvergiraju.

7^0 Parcijalno integraljenje i smena u nesvojstvenom integralu,

a) Ako se parcijalnim integraljenjem na segmentu $[a, X]$ dobija formula

$$\int_a^X f(x)g(x)dx = f(x)G(x)\,|_a^X - \int_a^X f'(x)G(x)dx$$

(G je primitivna za g) onda važi i jednakost

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = f(x)G(x)\,|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)G(x)dx$$

pod pretpostavkom da bar dva od tri napisana limesa postoje. Pri tom je

$$f(x)G(x)\,|_a^{+\infty} = \lim_{X\to+\infty} f(x)G(x)\,|_a^X = \lim_{X\to+\infty}(f(X)G(X) - f(a)G(a)).$$

b) Ako pri uvođenju smene $x = x(u)$ dobijemo jednakost: $\int_a^X f(x)dx = \int_b^U f(x(u))x'(u)du$ i pri tom $U \to +\infty$ kad $X \to +\infty$, onda je $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_b^{+\infty} f(x(u))x'(u)du$ ako postoji bar jedan od napisanih integrala. Slično se uvode i integrali $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{Y\to-\infty}\int_Y^a f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{X\to+\infty\\ Y\to-\infty}}\int_Y^X f(x)dx$.

4.4.2 Nesvojstveni integral druge vrste.

8^0 Ako je funkcija f ograničena i integrabilna na svakom segmentu $[a+\varepsilon, b]$, ali nije integrabilna (na primer nije ograničena) na segmentu $[a, b]$, to je po definiciji

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{4}$$

Ako ovaj limes postoji, to se integral (4) (nesvojstveni integral druge vrste) naziva konvergentnim; u suprotnom slučaju se naziva divergentnim.

9^0 Košijev kriterijum. Ako je funkcija f definisana i neprekidna na

razmaku $a < x \leq b$, onda integral (4) konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

kad god je $0 < x_1 - a < \delta$, $0 < x_2 - a < \delta$.

10^0 Stav. Ako je za $x \to a+0 : f(x) = O^\star \left(\frac{1}{(x-a)^\lambda} \right)$, onda za $\lambda < 1$ integral (4) konvergira, a za $\lambda \geq 1$ divergira.

Primetimo da se smenom $t = \frac{1}{x-a}$ nesvojstveni integral druge vrste svodi na nesvojstveni integral prve vrste.

Napomena. Ako $c \in]a, b[$ i ako funkcija f nije ograničena ni u jednoj dvostranoj okolini te tačke, onda je po definiciji

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \mu \to +0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\mu}^b f(x)dx \right\}$$

gde ε i μ nezavisno jedan od drugog teže nuli, pretpostavljajući da integrali u zagradi postoje.

11^0 Rešeni zadaci.

Izračunati integrale:

152. $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

◀

$$\begin{aligned} I &= \int_2^X \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_2^X \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \Big|_2^X \\ &= \frac{1}{3} \left(\ln \frac{X-1}{X+2} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \ln \frac{4(X-1)}{X+2}. \end{aligned}$$

Dakle, $I = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{3} \ln \frac{4(X-1)}{X+2} = \frac{2}{3} \ln 2$. ▶

153. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

◀ Iz primera 140, glave III sledi

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

zato je

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\substack{X\to+\infty \\ Y\to-\infty}} \int\limits_{Y}^{X} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \lim_{\substack{X\to+\infty \\ Y\to-\infty}} \left(\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_Y^X = \\ &= \lim_{\substack{X\to+\infty \\ Y\to-\infty}} \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2X+1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{2Y+1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}. \ ▶ \end{aligned}$$

154. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

◀ Pošto je prema primeru 110, glave III

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

to je

$$\begin{aligned} I &= \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^X \\ &= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2X-1}{\sqrt{3}} - \arctan \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \ ▶ \end{aligned}$$

155. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

◀ Funkcija $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ je primitivna za funkciju $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$ na razmaku $[0, +\infty[$ (primer 68) zato je

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{X\to+\infty} \left(\arctan \frac{X^2-1}{X\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} sgn X \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \ ▶$$

156. $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

◀ Smenom $1 - x = t^2$ $(dx = -2tdt)$; dobijamo

$$I = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

157. $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$

◀ Pošto je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = -\frac{1}{5}\int \frac{d\left(\frac{1}{x^5}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2+\frac{1}{x^5}+1}} \\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{2x^5}{2+x^5+2\sqrt{1+x^5+x^{10}}}+C, \end{aligned}$$

to je po definiciji

$$\begin{aligned} I &= \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{5}\left(\ln\frac{2X^5}{2+X^5+2\sqrt{1+X^5+X^{10}}} - \ln\frac{2}{3+2\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right). \ ▶ \end{aligned}$$

158. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}.$

◀ Parcijalnim integraljenjem $dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$, $u = \ln x$ dobijamo

$$\int \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C = F(x) + C.$$

Po definiciji je

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\substack{X\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Big|_\varepsilon^X \\ &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right) \\ &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) = 0; \\ \lim_{X\to+\infty} F(X) &= 0;\ \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^2\ln\varepsilon = 0. \ ▶ \end{aligned}$$

159. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

◀ Smenom $\arctan x = z$; $\frac{dx}{1+x^2} = dz$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos z$; $0 \le z \le \frac{\pi}{2}$, imamo

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} z \cos z dz = (z \sin z + \cos z)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \;\blacktriangleright$$

160. $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx.$

161. $I_2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \;\; (a > 0).$

◀ Množenjem I_2 sa imaginarnom jedinicim i sabiranjem sa I_1 dobijamo
:

$$\begin{aligned} I_1 + iI_2 &= \int\limits_0^{+\infty} e^{(-a+ib)x} dx = \frac{e^{(-a+ib)x}}{-a+ib}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a-ib)(\cos bx + i \sin bx)\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\left((b \sin bx - a \cos bx) + i(a \sin bx + b \cos bx)\right)\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Na taj način je $I_1 = \frac{a}{a^2+b^2}$, $I_2 = \frac{b}{a^2+b^2}$. ▶

Koristeći formulu sniženja izračunati sledeće integrale ($n \in \mathbb{N}$):

162. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$

◀ Parcijalnim integraljenjem ($e^{-x}dx = dv$, $x^n = u$) dobijamo

$$I_n = x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1}.$$

Kako je $I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, to je $I_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$. ▶

163. $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \;\; (ac - b^2 > 0).$

◀ Očigledno

$$(ax^2+2bx+c)^n = \left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}\right)^n.$$

Smenom $x+\frac{b}{a}=t$ i označavanjem $\frac{ac-b^2}{a}=B$, parcijalnim integraljenjem dobijamo ($n>1$):

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(at^2+B)^{n-1}} = \frac{t}{(at^2+B)^{n-1}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{at^2dt}{(at^2+B)^n} \\
&= 2(n-1)(I_{n-1}-BI_n),
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n-3}{2(n-1)B}\cdot I_{n-1} = \frac{(2n-3)(2n-5)}{2(n-1)\cdot 2(n-2)B^2}\cdot I_{n-2} = \cdots \\
&= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{I_1}{B^{n-1}} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{B^{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{at^2+B}.
\end{aligned}$$

Pošto je $\frac{B}{a}>0$, to konačno imamo

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{(2n-3)!!}{aB^{n-1}(2n-2)!!}\sqrt{\frac{a}{B}}\arctan t\sqrt{\frac{a}{B}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi(2n-3)!!}{aB^{n-1}(2n-2)!!}\sqrt{\frac{a^2}{ac-b^2}} \\
&= \frac{\pi(2n-3)!!a^{n-1}\,\mathrm{sgn}\,a}{(2n-2)!!(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}. \ ▶
\end{aligned}$$

164. $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$.

◀ Po definiciji je

$$I_n = \lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)};$$

inače lako se vidi da integral konvergira. Razlaganjem podintegralne funkcije imamo

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{x+k},$$

gde je $A_k = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k C_n^k}{n!}$. Na taj način je

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} &= \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \ln(X+k)\right.\\ \left.+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_k^n \ln(k+1)\right) &= \frac{1}{n!}\left(\ln\prod_{k=0}^{n}(X+k)^{(-1)^k C_k^n}\right.\\ &\left.+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_k^n \ln(k+1)\right)\end{aligned}$$

Kako je suma binomnih koeficijenata, koji stoje na parnim mestima, jednaka sumi binomnih koeficijenata na neparnim mestima, onda je

$$\lim_{X\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(X+k)^{(-1)^k C_k^n} = 1, \text{ tj. } \lim_{X\to+\infty}\ln\prod_{k=0}^{n}(X+k)^{(-1)^k C_k^n} = 0,$$

pa je zato

$$I = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_k^n \ln(k+1). \ \blacktriangleright$$

165. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

◀ Smenom $x = \sin t$, dati integral postaje $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ rešen ranije (primer 98). ▶

166. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^{n+1} x}$.

◀ Parcijalnim integraljenjem ($\frac{dx}{\cosh^2 x} = dv$, $v = \tanh x$; $u = \frac{1}{\cosh^{n-1} x}$; $du = -\frac{(n-1)\sinh x dx}{\cosh^n x}$) nalazimo ($n > 1$)

$$I_n = \frac{\tanh x}{\cosh^{n-1} x}\Big|_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty}\frac{\sinh^2 x dx}{\cosh^{n+1} x} = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

(jer je $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$). Dobili smo formulu sniženja (rekurentnu vezu): $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Na osnovu toga se dobija

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!},$$

ako je n neparan prirodan broj (jer je $I_1 = 1$); i

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} I_0 = \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

ako je n paran, jer je $I_0 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(e^x)}{1+e^{2x}} = 2 \arctan e^x \Big|_0^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$. ▶

Izračunati sledeće Ojlerove integrale:

167. a) $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$; b) $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$.

◀ I_1 i I_2 su nesvojstveni integrali druge vrste (0 je singularitet prvog, a $\frac{\pi}{2}$ drugog integrala). Smenom $\pi - x = t$, u drugom integralu dobija se $I_1 = I_2$. Dakle,

$$2I_1 = I_1 + I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx.$$

Uzimajući u poslednjem integralu smenu $2x = t$, imamo

$$\begin{aligned} I_3 &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0 \pi \ln \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2}} \pi \ln \sin t dt \right) \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = I_1. \end{aligned}$$

U integralu $\int\limits_{\frac{\pi}{2}} \pi \ln \sin t dt$ je uvedena smena $\pi - t = z$ i dobijena njegova jednakost sa I_1. Sada je $2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2} \ln 2$, odakle se dobija: $I_1 = -\frac{\pi}{2} \ln 2 = I_2$, što znači da su I_1 i I_2 izračunati. ▶

168. Naći $\int\limits_E \frac{e^{-\frac{\pi}{2}|\sin x - \cos x|}}{\sqrt{\sin x}} dx$, gde je E skup svih vrednosti od $]0, +\infty[$ za koje podintegralni izraz ima smisla.

◀ Pošto je $\sin x > 0$ za $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, to je

$$I = \int_E \frac{e^{-\frac{x}{2}}\,|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{2k\pi}^{\pi+2k\pi}\frac{e^{-\frac{x}{2}}\,|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi}\int\limits_0 \pi\frac{e^{-\frac{z}{2}}\,|\sin z - \cos z|}{\sqrt{\sin z}}dz$$

(posle smene $x - 2k\pi = z$). Pod znakom za sumiranje stoji nesvojstveni integral druge vrste (konvergentan) ; pošto je $\sin z - \cos z \leq 0$ ako je $0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}$ i $\sin z - \cos z \geq 0$ ako je $\frac{\pi}{4} \leq z \leq \pi$, to je

$$I = \int\limits_0 \pi\frac{e^{-\frac{z}{2}}\,|\sin z - \cos z|}{\sqrt{\sin z}}dz$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{fz}{2}}d\sqrt{\sin z} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{fz}{2}}\sqrt{\sin z}dz + \int\limits_{\frac{\pi}{4}} \pi e^{-\frac{fz}{2}}\sqrt{\sin z}dz - 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}} \pi e^{-\frac{fz}{2}}d\sqrt{\sin}$$

$$= 2e^{-\frac{fz}{2}}d\sqrt{\sin z}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2e^{-\frac{fz}{2}}d\sqrt{\sin z}\Big|_{\frac{f\pi}{4}}\pi = 2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}$$

(parcijalno integraljenje). Na taj način je

$$\int\limits_E \frac{e^{-\frac{x}{2}}\,|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx = 2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} = \frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1 - e^{-\pi}} \quad ▶$$

169. Dokazati jednakost

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2 + 4ab}\right)dx,$$

ako je $a > 0$, $b > 0$, i ako integral sleve strane jednakosti ima smisla.

◀ Neka integral $\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)dx$ ima smisla. Označimo ga sa I i uvedimo smenu $ax + \frac{b}{x} = t$; kako je x dvoznačna funkcija od t, predstavimo $I = I_1 + I_2$ gde je

$$I_1 = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)dx,\ I_2 = \int\limits_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)x.$$

Posle uvođenja smene dobijamo

$$I_1 = \frac{1}{2a}\int\limits_{+\infty}^{2\sqrt{ab}} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right)dt,\ I_2 = \frac{1}{2a}\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right)dt,$$

$$I = \frac{1}{a}\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}dt = \frac{1}{a}\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)d\sqrt{t^2-4ab}$$

Označavajući $\sqrt{t^2-4ab}=z$, $t=z^2+4ab$ sledi

$$I = \int\limits_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx$$

što je i trebalo dokazati. ►

170. Srednjom vrednošću funkcije f na intervalu $]0,+\infty[$ naziva se broj $M[f] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(\xi)d\xi$. Naći srednju vrednost sledećih funkcija:

a) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2\left(x\sqrt{2}\right)$; b) $f(x)=\arctan x$; c) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

◄ a) Najpre je $\int\limits_0^x\left(\sin^2\xi+\cos^2\left(\xi\sqrt{2}\right)\right)d\xi = x+\frac{\sin 2\sqrt{2}x}{4\sqrt{2}}-\frac{\sin 2x}{4}$, sada je

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin 2\sqrt{2}x}{4\sqrt{2}x}-\frac{\sin 2x}{4x}\right)=1.$$

b) $M[\arctan x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)=\frac{\pi}{2}$.

c) Prema drugoj teoremi o srednjoj vrednosti sledi

$$\int\limits_0^x \sqrt{t}\sin t dt = \sqrt{x}\int\limits_\xi^x \sin t dt = \sqrt{x}(\cos\xi-\cos x),\ (0<\xi<x),$$

odakle je $\left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x\sqrt{t}\sin t dt\right| \le \frac{2}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ za dovoljno veliko x ($\varepsilon>0$, proizvoljan unapred zadat broj). Dakle, $M[\sqrt{x}\sin x]=0$. ►

171. Naći:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x\sqrt{1+t^4}dt}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt$, gde je $\alpha > 0$ i $f \in C[0,1]$.

◀ a) Prema prvoj teoremi o srednjoj vrednosti imamo

$$\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = \cos\xi \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right), \quad x < \xi < 1$$

Neka je $\varepsilon > 0$ unapred zadato. Za $0 < x < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $\cos\xi \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) > \frac{\cos\xi}{\varepsilon}$, sledi $\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt \to +\infty$ kad $x \to +0$. Sada na osnovu Lopitalovog pravila imamo

$$\lim_{x\to 0} x \int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt\right)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

b) Lopitalovim pravilom sledi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}dt}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

c) Integral $\int\limits_a^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt$ konvergira za svako fiksirano $a > 0$, a $\ln\frac{1}{x} \to +\infty$ kad $x \to +0$, zato je $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\int\limits_a^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}} = 0$, sledi

$$\lim_{x\to+0} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\int\limits_x^{a} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{-x^{-1}e^{-x}}{-x^{-1}} = \lim_{x\to+0} e^{-x} = 1$$

(Lopitalovo pravilo).

d) Primenom Lopitalovog pravila sledi

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}}{-\alpha x^{-(\alpha+1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\alpha} = \frac{f(0)}{\alpha}$$

(na osnovu neprekidnosti funkcije f u tački $x = 0$). ▶

Ispitati konvergenciju integrala:

172. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$.

◀ $\frac{x^2}{x^4-x^2+1} = O^\star\left(\frac{1}{x^2}\right)$ kad $x \to +\infty$, zato integral konvergira (poredbeni kriterijum). ▶

173. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

◀ Za $x \to +\infty$ $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = O^\star\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\right)$, integral konvergira. ▶

174. $I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

◀ Po definiciji je

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mu\to 0}} \left\{ \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\ln x} + \int\limits_{1+\mu}^{2} \frac{dx}{\ln x} \right\} \quad (\varepsilon > 0,\ \mu > 0).$$

Iz nejednakosti $\ln x < x-1$, $1 < x < 2$, sledi nejednakost $(\ln x)^{-1} > (x-1)^{-1}$, zato je $\int\limits_x^2 \frac{dt}{\ln t} > \int\limits_x^2 \frac{dt}{t-1} = \ln\frac{1}{x-1}$. Pošto je $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, to je integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ divergentan, odakle po definiciji sledi divergencija integrala $I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ (napomena data posle 10^0). ▶

175. $I = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

◀ $I = I_1 + I_2$, gde je $I_1 = \int\limits_0^a x^{p-1}e^{-x}dx$ i $I_2 = \int\limits_a^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, gde je $0 < a < +\infty$ fiksiran broj. Analizirajmo konvergenciju integrala I_1. Kad $x \to +0$, $x^{p-1}e^{-x} = O^\star\left(\frac{1}{x^{1-p}}\right)$, dakle I_1 konvergira ako je $1-p < 1$, tj. za $p > 0$ (kao nesvojstven integral druge vrste). Ako $x \to +\infty$ eksponencijalna funkcija $y = e^{-x}$ opada brže od proizvoljne funkcije oblika $\frac{1}{x^\lambda}$ ($\lambda > 1$), zato integral I_2 konvergira za svako p. Integral I konvergira ako istovremeno konvergiraju oba integrala I_1 i I_2, tj. za $p > 0$. ▶

176. $I = \int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$.

◀ Smenom $\ln\frac{1}{x} = t$, dobijamo $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}t^q dt$. Sada se I može predstaviti kao zbir dava integrala (jednog prve i jednog druge vrste). Ako $t \to +0$: $e^{-(p+1)t}t^q = O^\star\left(\frac{1}{t^{-q}}\right)$, a za $x \to +\infty$, $e^{-(p+1)t}t^q = O^\star(t^{-\lambda})$, gde je λ proizvoljan broj veći od 1, ako je $p+1 > 0$ (pod tim uslovom se Lopitalovim pravilom dobija $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{t^{-(\lambda+q)}} = 0$ za bilo koje λ i q). Dakle, za

konvergenciju integrala I dovoljno je da bude: $-q < 1$, $p+1 > 0$, tj. $q > -1$ i $p+1 > 0$. Znači integral konvergira , ako je $q > -1$; $p > -1$. ▶

177. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ $(n \geq 0)$.

◀ Imamo $\frac{x^m}{1+x^n} = O^\star\left(\frac{1}{x^{-m}}\right)$ ako $x \to +0$, a kad $x \to +\infty$ je $\frac{x^m}{1+x^n} = O^\star\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, dakle, integral konvergira ako je $-m < 1$, $n-m > 1$, tj. $m > -1$, $n-m > 1$. ▶

178. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx$ $(a \neq 0)$.

◀ Za $x \to +0$, $f(x) = \frac{\arctan ax}{x^n} = O^\star\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$, a za $x \to +\infty$ $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^n}\right)$, dakle dati integral konvergira, za $n-1 < 1$ i $n > 1$, tj. za $1 < n < 2$. ▶

179. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$.

◀ Smenom $\ln(1+x) = t$, dobijamo

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{te^t dt}{(e^t-1)^n} = \int\limits_0^{a} \frac{te^t dt}{(e^t-1)^n} + \int\limits_a^{+\infty} \frac{te^t dt}{(e^t-1)^n} = I_1 + I_2,$$

gde je $a > 0$ proizvoljan fiksiran broj, na primer $a = 1$. Za $t \to +0$, $f(t) = \frac{te^t}{(e^t-1)^n} = O^\star\left(\frac{1}{t^{n-1}}\right)$, zato integral I_1 konvergira, ako je $n-1 < 1$, tj. ako je $n < 2$; kad $t \to +\infty$, $f(t) = \frac{t}{e^{(n-1)t}(1-e^{-t})^n} = o\left(\frac{1}{t^\lambda}\right)$, $\lambda > 1$, ako je $n-1 > 0$, tj. za $n > 1$. Integral I konvergira, ako je $1 < n < 2$. ▶

180. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx$ $(n \geq 0)$.

◀ Kad $x \to +0$, $f(x) = \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} = O^\star\left(\frac{1}{x^{-(m+1)}}\right)$, a kad $x \to +\infty$ $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, zato integral konvergira ako su istovremeno ispunjeni uslovi $-(m+1) < 1$ i $n-m > 1$, tj. za $m > -2$ i $n-m > 1$. ▶

181. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$ $(n \geq 0)$.

◀ Ako je $a \neq 0$ i $n > 0$ integral konvergira po Dirihleovom principu. ▶

182. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

◀ Zapišimo integral u obliku

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int\limits_0^{a} \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \ (a > 0).$$

Prvi integral postoji tj. on je Rimanov; dalje je očigledno

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Pošto integral $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ divergira ka $+\infty$ a integral $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ konvergira (prema Dirihleovom kriterijumu), to integral $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ divergira, dakle i polazni integral divergira. ▶

183. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

◀ Za $x \to +0$ $f(x) = \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = O^\star\left(\frac{1}{x^p}\right)$, za $x \to \frac{\pi}{2} - 0$, $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^q}\right)$. Sledi, integral konvergira za $p < 1$, $q < 1$. ▶

184. $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

◀ Kad $x \to +0$ $f(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} = O^\star\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)$, a kad $x \to 1 - 0$, $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right)$, zato integral konvergira, ako je $-n < 1$, tj. $n > -1$. ▶

185. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

◀ Kad $x \to +0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = O^\star\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$, a kad $x \to +\infty$, $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$, zato dati integral konvergira. ▶

186. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$.

◀ Analizirajmo slučajeve $p < q$ i $p > q$ (za $p = q$ integral očigledno divergira). Neka je $p < q$; tada kad $x \to +0$, $f(x) = \frac{1}{x^p+x^q} = O^\star\left(\frac{1}{x^p}\right)$, a kad $x \to +\infty$, $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^q}\right)$, odakle sledi da integral konvergira za $p < 1$; $q > 1$.

Neka je $q < p$. Tada prema dobijenom sledi da integral konvergira za $q < 1$; $p > 1$. Oba slučaja lako objedijujemo: integral konvergira za $\min(p,q) < 1$, $\max(p,q) > 1$. ▶

187. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$.

◀ $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}$; podintegralna funkcija je ograničena u okolini tačke

$x = 1$. Neka je $0 < \lambda < 1$. Imamo

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1-x^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{1-x^2} \cdot \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\lambda}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\lambda x^{-\lambda-1}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^\lambda}{-\lambda} = 0.$$

Podintegralna funkcija u okolini nule ima niži red rasta, od beskonačno velike $\frac{1}{x^\lambda}$ u istoj okolini ($0 < \lambda < 1$). Prema poredbenom kriterijumu dati integral konvergira. ►

188. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$.

◄ Uporedimo podintegralnu funkciju u maloj okolini tačke $x = 0$ sa beskonačno velikom funkcijom $\frac{1}{x^\lambda}$, gde je $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ u toj okolini. Imamo

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} : \frac{1}{x^\lambda} = \lim_{x\to+0} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \lim_{x\to+0} \frac{\cot x}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) x^{-\lambda-\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{x\to+0} \frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\tan x} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) x} = 0,$$

jer je $\lambda+\frac{1}{2} > 1$. Red rasta podintegralne funkcije kad $x \to +0$ je niži od reda rasta beskonačno velike funkcije $\frac{1}{x^\lambda}$ ($\frac{1}{2} < \lambda < 1$). Kako integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^\lambda} dx$ za $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ konvergira , onda prema poredbenom kriterijumu i dati integral konvergira. ►

189. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

◄ Smenom $\ln x = t$ ($x = e^t, dx = e^t dt$) imamo $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt$.

Kad $t \to +0$ $f(t) = \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} = O^\star\left(\frac{1}{t^q}\right)$, a za $p > 1$ funkcija $y = e^{(1-p)t}$ brže opada od proizvoljne funkcije oblika $\frac{1}{t^\lambda}$ ($\lambda > 1$), kad $t \to +\infty$. Dakle, integral konvergira za $p > 1$, $q < 1$. ►

190. $I = \int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln\ln x)^r}$.

◄ Smenom $\ln\ln x = t$ ($\ln x = e^t, x = e^{e^t}; dx = e^{e^t} e^t dt$); tada je

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)e^t} e^{(1-q)t}}{t^r} dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Kad $t \to +0$, $f(t) = O^\star\left(\frac{1}{t^r}\right)$; ako je $p = 1$, to je za $q > 1$, $f(t) =$

$O^\star\left(\frac{1}{t^\lambda}\right)$, $(\lambda > 1)$ ako je q proizvoljan realan broj, a $p \neq 1$, onda je za $p > 1$, $f(t) = \frac{e^{(1-p)e^t+(1-q)t}}{t^r} = O^\star\left(\frac{1}{t^\lambda}\right)$, $\lambda > 1$. Na taj način integral konvergira za: a) $r < 1$; $p = 1$; $q > 1$; b) $r < 1$, $q \in \mathbb{R}$, $p > 1$. ►

191. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$

◄ U okolini tačke $x = a_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{|x-a_j|^{p_j}}\right)$, a kad $x \to \infty$ $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{|x|^{p_1+p_2+\dots+p_n}}\right)$, sledi, I konvergira, ako je $p_j < 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j > 1$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. ►

192. $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha |x-1|^\beta \, dx.$

◄ Neka je $f(x) = x^\alpha |x-1|^\beta$. Kad $x \to +0$, $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^{-\alpha}}\right)$ za $x \to 1$ $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{|x-1|^{-\beta}}\right)$, i na kraju za $x \to +\infty$ $f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^{-(\alpha+\beta)}}\right)$, zato integral konvergira , ako je $-\alpha < 1; -\beta < 1; -(\alpha+\beta) > 1$, tj. $\alpha > -1$; $\beta > -1$; $\alpha + \beta < -1$. ►

193. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$, gde su $P_m(x)$ i $P_n(x)$ uzajamno prosti polinomi redom stepena m i n.

◄ Ako polinom $P_n(x)$ u intervalu $]0, +\infty[$ ima nulu $x = x_i$ onda integral divergira jer je kad $x \to x_i$: $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^\star\left(\frac{1}{(x-x_i)^{\lambda_i}}\right)$, $\lambda_i \geq 1$. Ako polinom $P_n(x)$ nema nula u intervalu $]0, +\infty[$, onda je za konvergenciju integrala dovoljno da bude ispunjen uslov $n - m > 1$, jer je kad $x \to +\infty$: $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^\star\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$. Dakle, integral konvergira ako polinom $P_n(x)$ nema nula u intervalu $]0, +\infty[$ i $n - m > 1$. ►

Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih integrala:

194. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$

◄ Uzmimo $I = I_1 + I_2$, gde je

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx,$$

i $a > 0$ proizvoljan fiksiran broj. Pošto je funkcija $y = \frac{\sin x}{x}$ neprekidna i ograničena na razmaku $]0, a]$ to integral I_1 postoji. Na osnovu Dirihleovog kriterijuma imamo da integral I_2 konvergira, tj. dati integral konvergira. U primeru 182 smo pokazali da integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ divergira. Kako je $|\sin x| \geq$

$\sin^2 x$ za sve x, onda po poredbenom kriterijumu sledi da I ne konvergira apsolutno, tj. integral I konvergira uslovno. ▶

195. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$.

◀ Kad $x \to +\infty : \frac{\sqrt{x}}{x+100} \searrow 0$, sledi prema Dirihleovom kriterijumu integral konvergira. Ispitajmo konvergenciju integrala : $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100}|\cos x|\,dx$. S obzirom da je $|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ za sve x, to je $f_1(x) \geq f_2(x) + f_3(x)$, (1), gde je $f_1(x) = \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+100}$, $f_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{2(x+100)}$, $f_3(x) = \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(x+100)}$. Razmotrimo integrale

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100}dx;\ I_3 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx.$$

Kad $x \to +\infty$, $\frac{\sqrt{x}}{x+100} = O^\star\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, tj. integral I_2 divergira (ka $+\infty$); I_3 konvergira prema Dirihleovom kriterijumu. Na osnovu nejednakosti (1) integral I_1 divergira, sledi, I uslovno konvergira. ▶

196. $I = \int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)dx\ (q \neq 0)$.

◀ Uvedimo smenu $x^q = t : I = \frac{1}{|q|}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$, gde je $\alpha = 1 - \frac{p+1}{q}$. Uzmimo dalje $I = I_1 + I_2$, gde je $I_1 = \frac{1}{|q|}\int\limits_0^{a} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$, $I_2 = \frac{1}{|q|}\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$, $a > 0$ proizvoljan fiksiran broj. Pošto je kad $t \to +0$, $\frac{\sin t}{t^\alpha} = O^\star\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)$, onda I_1 konvergira za $\alpha < 2$ tj. za $\frac{p+1}{q} > -1$, a za $\frac{p+1}{q} \leq -1$ divergira. Za $\alpha > 0$ tj. $\frac{p+1}{q} < 1$ I_2 konvergira (Dirihleov kriterijum) a za $\alpha \leq 0$ divergira. Ovo treba dokazati. Neka je $0 < \varepsilon < 2$ zadato unapred. Za svako $A > a$ postoji n takvo da je $2\pi n > A$ ($n \in \mathbb{N}$). Na osnovu druge teoreme o srednjoj vrednosti (stavljajući $\alpha = -\beta$), dobijamo ocenu: $\left|\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} t^\beta \sin t\,dt\right| = \xi^\beta \cdot 2 \geq 2$, jer je $2n\pi < \xi < (2n+1)\pi$, $\beta \geq 0$. Saglasno Košijevom kriterijumu, I_2 za $\alpha \leq 0$ divergira. Dakle, I konvergira, za $-1 < \frac{p+1}{q} < 1$, tj. za $\left|\frac{p+1}{q}\right| < 1$. Ispitivanje apsolutne konvergencije integrala I svodi se na ispitivanje konvergencije integrala $\overline{I}_1 = \frac{1}{|q|}\int\limits_0^{a} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}dt$ i $\overline{I}_2 = \frac{1}{|q|}\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}dt$. $\overline{I}_1$ očigledno konvergira za $\frac{p+1}{q} > -1$. Ostaje da se ispita $\overline{I}_2$. Iz nejednakosti

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^\alpha} - \frac{\cos 2t}{t^\alpha}\right) = \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} \le \frac{|\sin t|}{t^\alpha} \le \frac{1}{t^\alpha}$, $t \in]a, +\infty[$ sledi, da $\overline{I}_2$ konvergira ako je $\alpha > 1$, tj. za $\frac{p+1}{q} < 0$ i divergira ako je $\alpha \le 1$ (jer $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ divergira ka $+\infty$ za $\alpha \le 1$, a integral $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^\alpha} dt$ konvergira na osnovu Dirihleovog kriterijuma). Sledi, I konvergira apsolutno, ako je $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$. Za $0 \le \frac{p+1}{q} < 1$ on konvergira uslovno. ▶

197. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x) dx$.

◀ Smenom $\sec x = t$; $(dx = \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}})$; imamo

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int\limits_1^{a} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}} + \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}} = I_1 + I_2,$$

$a > 1$ je proizvoljan fiksiran broj. Kad $t \to 1+0$, $\frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} = O^\star\left(\frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$, sledi, I_1 konvergira (apsolutno). Pošto je za $t \in]a, +\infty[$ $\left|\frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}}\right| \le \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$, i kako integral $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ konvergira, to I_2 apsolutno konvergira. Dakle, polazni integral konvergira apsolutno. ▶

198. $I = \int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$.

◀ Smenom $e^x = t$ dobijamo $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t \cdot \cos t}{t} dt$. Kad $t \to +\infty$ $\frac{\ln^2 t}{t} \searrow 0$, sledi, prema Dirihleovom kriterijumu integral konvergira. Pošto je $|\cos t| \frac{\ln^2 t}{t} \ge \cos^2 t \frac{\ln^2 t}{t} = \frac{1}{2}\frac{\ln^2 t}{t} + \frac{1}{2}\cos 2t \cdot \frac{\ln^2 t}{t}$ za $t > 1$, onda je

$$\int\limits_1^{+\infty} |\cos t| \frac{\ln^2 t}{t} dt \ge \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt + \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \cos 2t \cdot \frac{\ln^2 t}{t} dt \tag{1}$$

Očigledno, $\frac{\ln^2 t}{t} > \frac{1}{t}$ za $t > e$, zato integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt$ divergira (ka $+\infty$). Integral $\int\limits_1^{+\infty} \cos 2t \cdot \frac{\ln^2 t}{t} dt$ konvergira, dakle prema nejednakosti (1) imamo da I uslovno konvergira. ▶

199. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$.

◀ Predstavimo $I = I_1 + I_2$, gde je $I_1 = \int\limits_0^a \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$; $I_2 = \int\limits_a^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$; $a > 0$ fiksiran broj; kad $x \to +0$, $\frac{x^p \sin x}{1+x^q} = O^\star \left(\frac{1}{x^{-(p+1)}}\right)$, sledi, za $p + 1 > -1$ integral I_1 apsolutno konvergira, a za $p + 1 \leq -1$ divergira. Ako je $p < q$, $\frac{x^p}{1+x^q} \searrow 0$, kad $x \to +\infty$ i integral I_2 konvergira (neapsolutno). Znači, I konvergira (neapsolutno), ako je $p > -2$, $q > p$. Za $x \in]a, +\infty[$, $\frac{1}{2}\left(\frac{x^p}{1+x^q} - \frac{x^p \cos 2x}{1+x^q}\right) \leq \frac{|\sin x| x^p}{1+x^q} \leq \frac{x^p}{1+x^q}$ sledi, I_2 konvergira apsolutno, ako je $q - p > 1$, tj. $q > p + 1$ (za $q \leq p + 1$ integral $\int\limits_a^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$ divergira). Dobili smo da integral I konvergira apsolutno ako je $p > -2$; $q > p + 1$. On uslovno konvergira za $p > -2$, $p < q \leq p + 1$. ▶

200. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$.

◀ Uvedimo smenu $x + \frac{1}{x} = t$; pošto je x dvoznačna funkcija od t, to se integral I predstavlja u obliku zbira integrala:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int\limits_2^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} - 1\right)\sin t}{\left(\frac{t - t\sqrt{^2-4}}{2}\right)^n} dt + \int\limits_2^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + 1\right)\sin t}{\left(\frac{t+\sqrt{^2-4}}{2}\right)^n} dt\right) \\ &= 2^{n-1}\left(\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin t dt}{\sqrt{t^2-4}\left(t - \sqrt{t^2-4}\right)^{n-1}} + \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin t dt}{\sqrt{t^2-4}\left(t + \sqrt{t^2-4}\right)^{n-1}}\right) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned}$$

gde je

$$I_1 = \frac{1}{2^{n-1}} \int\limits_2^a \frac{\sin t dt}{\sqrt{t^2-4}\left(t + \sqrt{t^2-4}\right)^{1-n}},$$

$$I_2 = \frac{1}{2^{n-1}} \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t dt}{\sqrt{t^2-4}\left(t + \sqrt{t^2-4}\right)^{1-n}},$$

$$I_3 = 2^{n-1} \int\limits_2^a \frac{\sin t dt}{\sqrt{t^2-4}\left(t + \sqrt{t^2-4}\right)^{n-1}},$$

$$I_4 = 2^{n-1}\int_a^{+\infty}\frac{\sin t dt}{\sqrt{t^2-4}\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^{n-1}}, a>2$$

proizvoljan fiksiran broj. Kad $t\to 2+0$, $\frac{\sin t}{\sqrt{t^2-4}\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^{\pm(n-1)}} = O^\star\left(\frac{1}{(t-2)^{\frac{1}{2}}}\right)$, sledi integrali I_1 i I_3 konvergiraju; kad $t\to+\infty$ imamo

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-4}\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^{1-n}} = O^\star\left(\frac{1}{t^{2-n}}\right),$$
$$\frac{1}{\sqrt{t^2-4}\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^{n-1}} = O^\star\left(\frac{1}{t^{n}}\right),$$

sledi, I_2 konvergira ako je $2-n>0$; I_4 konvergira za $n>0$ (Dirihleov kriterijum). Znači I konvergira za $0<n<2$. Očigledno, I uslovno konvergira, jer I_2 konvergira apsolutno za $n<1$, a I_4 konvergira apsolutno za $n>1$. ►

201. $I=\int\limits_a^{+\infty}\frac{P_m(x)\sin x}{P_n(x)}dx$, gde su $P_m(x)$ i $P_n(x)$ polinomi i $P_n(x)>0$, za $x\geq 0$.

◄ Polinom $P_n(x)$ nema nula u intervalu $]a,+\infty[$, zato integral pod nekim uslovom može konvergirati. Kad $x\to+\infty$, $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^\star\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$ i za $n-m>0$ monotono teži nuli, dakle prema Dirihleovom kriterijumu integral I konvergira (neapsolutno). Pošto je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|P_m(x)|}{P_n(x)}-\frac{|P_m(x)|\cos 2x}{P_n(x)}\right) \leq \frac{|P_m(x)\sin x|}{P_n(x)} \leq \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} = O^\star\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$$

kad $x\to+\infty$, to je za apsolutnu konvergenciju integrala dovoljno da bude ispunjen uslov: $n-m>1$, tj. $n>m+1$. Sada možemo naći uslov pod kojim integral I ne konvergira apsolutno: $m<n\leq m+1$. ►

202. Ako integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergira, da li obavezno $f(x)\to 0$ kad $x\to+\infty$?

◄ Ne obavezno; na primer, Fresnelov integral $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$ konvergira (uvodimo smenu $x^2=t$, i onda primenom Dirihleovog kriterijuma sledi dokaz) a funkcija $y=\sin x^2$ nema limes kad $x\to+\infty$. Analizirajmo takođe

integral

$$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}(-1)^{[x^2]}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

Niz S_n konvergira, jer važi ocena: $|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$, koja ja tačna za sve $p>0$, $p\in\mathbb{N}$ (ostavlja se čitaocu za dokaz). Sledi, integral konvergira, iako funkcija $y=(-1)^{[x^2]}$ ne teži nuli kad $x\to+\infty$. Nesvojstveni integral $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ može da konvergira i u slučaju kada $f(x)$ nije ograničena kad $x\to+\infty$. Na primer, u integralu $I=\int\limits_0^{+\infty}x\sin x^4dx$ podintegralna funkcija nije ograničena na razmaku $]0,+\infty[$; smenom $x^2=t$, imamo $I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\sin t^2dt$. Ovaj integral kao što se zna konvergira. ►

203. Neka $f\in C^{(1)}[x_0,+\infty[$, $|f'(x)|<C$ za $x_0\le x<+\infty$, i $\int\limits_{x_0}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ konvergira. Dokazati, da $f(x)\to0$ kad $x\to+\infty$.

◄ Razmotrimo integral $I=\int\limits_{x_0}^{+\infty}f'(x)f(x)dx$. Zbog konvergencije integrala $I_1=\int\limits_{x_0}^{+\infty}|f(x)|\,dx$, i nejedakosti $|f'(x)|<C$ sledi konvergencija integrala $I=\int\limits_{x_0}^{+\infty}f'(x)f(x)dx=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^2(x)-f^2(x_0)\right)$, tj. funkcija f^2 ima konačan limes kad $x\to+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f^2(x)=M\ge0$. Ako pretpostavimo da je $M\ne0$, onda je $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=\sqrt{M}>0$, odakle, za svako $\varepsilon>0$, postoji $A\ge x_0$ tako da je $|f(x)|>\sqrt{M}-\varepsilon$ kad god je $x\ge A$. Sada je očigledno, $\int\limits_A^X|f(x)|\,dx>\left(\sqrt{M}-\varepsilon\right)(X-A)$ i $\lim\limits_{X\to+\infty}\int\limits_A^X|f(x)|\,dx=+\infty$, što protivureči činjenici da je $I_1<\infty$. ►

204. Može li se konvergencija nesvojstvenog integrala $\int\limits_a^b f(x)dx$ od neograničene funkcije f na segmentu $[a,b]$ razmatrati kao limes odgovarajuće integralne sume $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\bigtriangleup x_i$, gde je $x_i\le\xi_i\le x_{i+1}$ i $\bigtriangleup x_i=x_{i+1}-x_i$

◄ Ne, jer se u opštem slučaju ne dobija konačan limes integralne sume (rezultat zavisi od izbora tačaka ξ_i). ►

205. Neka integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{1}$$

konvergira i neka je funkcija φ ograničena. Da li konvergira integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx? \tag{2}$$

Navesti odgovarajući primer. Šta se može reći o konvergenciji integrala (2), ako integral (1) konvergira apsolutno?

◂ Ako integral (1) konvergira neapsolutno, integral (2) može divergirati, na primer: neka je $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi(x) = \sin x$; φ je ograničena funkcija, integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ konvergira, a integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ divergira. Integral (2) može konvergirati, na primer: $\varphi(x) = 2\cos x$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Sledi, integral (2) nije obavezno konvergentan.

Neka integral (1) konvergira apsolutno, tada iz nejednakosti $|f(x)\varphi(x)| \leq C\,|f(x)|$, saglasno kriterijumu upoređivanja, sledi apsolutna konvergencija integrala (2), a to znači i njegova konvergencija. ▸

206. Dokazati, da ako integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergira, a f je monotona funkcija, onda je $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ kad $x \to +\infty$.

◂ Iz konvergencije integrala sledi da $|f(x)| \to 0$ kad $x \to +\infty$ (u protivnom slučaju integral bi divergirao, jer bi funkcija f zbog monotonosti imala stalan znak za dovoljno velike x, i tada funkcija $x \mapsto \left|\int\limits_a^x f(t)dt\right|$, $a \leq x < +\infty$, ne bi bila ograničena za $x \to +\infty$). Dakle, $|f|$ je opadajuća funkcija. Iz konvergencije integrala, sledi (Košijev kriterijum) da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $A > a$ tako da je $\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$ kad god je $x_1 > A$ i $x_2 > A$. Fiksirajmo proizvoljno $x_0 > A$ i razmotrimo za $x > x_0$ integral $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$. Kako $|f|$ opada, to je $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ za $x > x_0$, i zato je $|f(x)|(x - x_0) < \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right| < \varepsilon$. S obzirom da je $\lim\limits_{x\to+\infty} x_0\,|f(x)| = 0$, to iz poslednje nejednakosti proističe da je $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, odnosno da je $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ kad $x \to +\infty$. ▸

207. Neka je f monotona funkcija na razmaku $]0,1]$ i neograničena u okolini tačke $x=0$. Dokazati, da ako postoji integral $\int\limits_0^1 f(x)dx$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x))dx$.

◀ Prema uslovu postoji $\lim\limits_{\mu\to+0} \int\limits_{\mu}^{1} f(x)dx$; stavimo $\mu=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Ako f opada na $[\frac{1}{n},1]$, to deleći taj segment na n jednakih delova imamo $\overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n}$; i $\underline{S}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(\frac{1}{n})}{n}$, gde su $\overline{S}_n$ i $\underline{S}_n$ respektivno gornja i donja Darbuova suma funkcije f na segmentu $[\frac{1}{n},1]$. Prema poznatim svojstvima integrala ispunjene su nejednakosti:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \le \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n}. \tag{2}$$

Ako funkcija f raste na $[\frac{1}{n},1]$, onda očigledno važi:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n} \le \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n}. \tag{3}$$

Pokažimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{n} = 0$. Stvarno, ako to nije, onda to znači da je $f(x) = O^{\star}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)$, $\alpha\ge 1$ kad $x\to 0$ i integral $\int\limits_0^1 f(x)dx$ ne bi konvergirao. Prelaskom na limes kad $n\to\infty$, u nejednakostima (2) ili (3) i uzimajući u obzir da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1)}{n}=0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{n}=0$, dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)dx$, što je i trebalo dokazati. ▶

208. Dokazati, da ako je funkcija f monotona u intervalu $0<x<a$ i postoji integral $I=\int\limits_0^a x^p f(x)dx$, onda je $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x)=0$.

◀ Smatraćemo da funkcija $y=x^p f(x)$ ima na segmentu $[0,a]$ jedan sungularitet i to tačku $x=0$ (tačka $x=x_0$ je singularitet funkcije φ, ako ta funkcija nije ograničena ni u jednoj njenoj okolini-jednostranoj ili dvostranoj).Zbog monotonosti funkcija f i $x\mapsto x^p$, moguća su dva slučaja:

a) $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0$ (i pri tom očigledno $|f|$ raste na $]0, a[$);

b) $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1} = 0$; $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \infty$ (i pri tom očigledno $|f|$ opada na $]0, a[$).

Slučaj $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1} f(x) = C$, $C \neq 0$, $C \neq \infty$ se isključuje, jer bi u tom slučaju bilo $x^p f(x) = O^\star\left(\frac{1}{x^\lambda}\right)$, $\lambda \geq 1$ kad $x \to +0$, što protivreči činjenici da integral $\int\limits_0^a x^p f(x)dx$ konvergira. Zbog konvergencije navedenog integrala imamo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je za $0 < x < \delta$ ispunjeno

$$\left|\int\limits_{0,5x}^{x} t^p f(t)dt\right| = \left|\int\limits_{0,5x}^{x} t^{p+1}\frac{f(t)}{t}dt\right| = \mu \ln 2 < \varepsilon,$$

gde je $\inf\left\{t^{p+1}|f(t|\right\} \leq \mu \leq \sup\left\{t^{p+1}|f(t)|\right\}$, $t \in [0,5x; x]$ (Košijev kriterijum i teorema o srednjoj vrednosti). Pošto je

$$\mu \ln 2 \geq \begin{cases} x^{p+1}|f(0,5x)|\ln 2, & \text{u slučaju a);} \\ (0,5x)^{p+1}|f(x)|\ln 2, & \text{u slučaju b),} \end{cases}$$

to je $(0,5x)^{p+1}|f(0,5x)| < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}\ln 2}$, u slučaju a); tj. $x^{p+1}|f(x)| < \frac{\varepsilon \cdot 2^{p+1}}{\ln 2}$, u slučaju b). Iz poslednjih nejednakosti sledi da je $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x) = 0$. ▶

Definicija. Ako je funkcija f takva da za svako $\varepsilon > 0$ postoje svojstveni (Rimanovi) integrali

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \text{ i } \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (a < c < b),$$

to se pod glavnom vrednošću integrala u Košijevom smislu (v.p) podrazumeva broj:

$$v.p \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

$$\text{Slično, } v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx.$$

209. Pokazati, da je

a) v.p. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$; b) v.p. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0$; c) v.p $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$.

◀ Označimo sa $I_{v.p}$ traženi integral. Onda imamo

a)

$$\begin{aligned} I_{v.p} &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln(-x)\left|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln x\right|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} I_{v.p} &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\varepsilon}^{A}\frac{dx}{1-x^2}\right) + \int_A^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{A}\right) \\ &\quad + \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_A^B \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} + \ln\left|\frac{1+A}{1-A}\right| - \ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\ &\quad + \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+B}{1-B}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+A}{1-A}\right| \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\ln\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon} + \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+B}{1-B}\right| = 0 \end{aligned}$$

(A je proizvoljan pozitivan broj veći od $1+\varepsilon$).

c)

$$I_{v.p} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}\sin x dx = \lim_{A\to+\infty}(\cos(-A) - \cos A) = 0. \ ▶$$

210. Dokazati, da za $x \geq 0$ postoji $lix = v.p. \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\ln\xi}$, $x \neq 1$.

◀ Za $0 \leq x \leq \alpha < 1$ integral očigledno postoji; za $1 < x \leq 2$

$$\begin{aligned} lix &= v.p. \int_0^x \frac{d\xi}{\ln\xi} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d\xi}{\ln\xi} + \int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{d\xi}{\ln\xi}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|\xi-1|\,\Big|_0^{1-\varepsilon} + \frac{\xi}{2}\Big|_0^{1-\varepsilon} + O^\star((\xi-1)^2)\,\Big|_0^{1-\varepsilon}\right. \end{aligned}$$

$$+\ln(\xi-1)\Big|_{1+\varepsilon}^{x}+\frac{\xi}{2}\Big|_{1+\varepsilon}^{x}+O^{\star}\left((\xi-1)^2\right)\Big|_{1+\varepsilon}^{x}\Big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\ln\varepsilon+\frac{1-\varepsilon}{2}+\ln(1-x)-\ln\varepsilon+\frac{x}{2}-\frac{1+\varepsilon}{2}$$

$$+O^{\star}(\varepsilon^2)+O^{\star}\left((x-1)^2\right)\Big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln(x-1)+\frac{x}{2}+O^{\star}\left((x-1)^2\right)-\varepsilon+O^{\star}(\varepsilon^2)\right)$$

$$= \ln(x-1)+\frac{x}{2}+O^{\star}\left((x-1)^2\right).$$

Ako je $x>2$ imamo

$$lix=v.p.\int_0^x\frac{d\xi}{\ln\xi}=v.p.\int_0^2\frac{d\xi}{\ln\xi}+\int_2^x\frac{d\xi}{\ln\xi}=1+\int_2^x\frac{d\xi}{\ln\xi}+O(1). \ \blacktriangleright$$

Naći sledeće integrale:

211. $v.p.\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

◀ Imenilac podintegralne funkcije postaje nula za $x=1$ i za $x=2$; neka je $A>2$ proizvoljan fiksiran broj. Po definiciji je:

$$v.p.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_0^{1-\varepsilon}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{2-\mu}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{2+\mu}^{A}\right)$$

$$+\lim_{B\to+\infty}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_A^B$$

$$= -\ln 2+\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}}\left(\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)+\lim_{B\to+\infty}\ln\left|\frac{B-2}{B-1}\right|=\ln\frac{1}{2}. \ \blacktriangleright$$

212. $v.p.\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

◀ Po definiciji je

$$v.p.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln(-\ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}+\ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{-\varepsilon}{\varepsilon}\right|=0. \ \blacktriangleright$$

213. $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$

◀ Po definiciji je

$$\begin{aligned} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \lim_{A\to+\infty} \left(\left(\arctan x + \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right)\right) \Big|_{-A}^{A} \right) \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left(\arctan A - \arctan(-A) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+A^2}{1+A^2} \right) \\ &= \lim_{A\to+\infty} 2 \arctan A = \pi. \end{aligned}$$ ▶

214. $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \arctan x dx.$

◀ Iz definicije v.p. sledi

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \arctan x dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right) \Big|_{-A}^{A} \right) = 0.$$ ▶

4.5 Izračunavanje površine

1^0 Površina u pravouglim koordinatama.

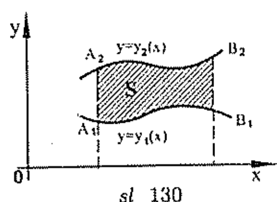
Površina S ravne figure $A_1A_2B_2B_1$ (sl.130), ograničena graficima dve neprekidne funkcije $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ ($y_2(x) \geq y_1(x)$) i pravama $x = a$ i $x = b$ $(a < b)$, jednaka je

$$S = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))\, dx.$$

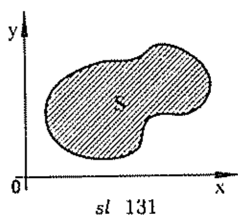
2^0 Površina ravne figure, ograničena krivom, koja je zadata u parametarskom obliku.

Ako su $x = x(t)$, $y = y(t)$, $[0 \leq t \leq T]$ parametarske jednačine deo po deo glatke prosto zatvorene krive C, orijentisane u smeru suprotnom kretanju

kazaljke na satu i ograničavajući sleva od sebe povrinu S (**sl.131**),



sl 130

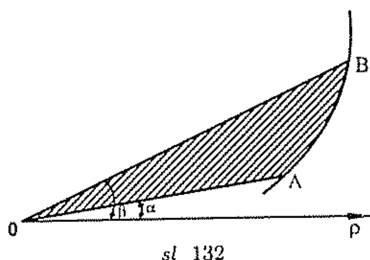


sl 131

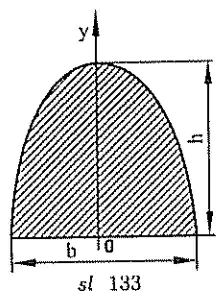
onda je

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t)y'(t)dt \text{ ili } S = \frac{1}{2}\int_0^T \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\, dt.$$

3^0 Površina u polarnim koordinatama. Površina S ravne figure OAB (**sl.132**), ograničena grafikom neprekidne funkcije $\rho = \rho(\varphi)$



sl 132



sl 133

i dvema polupravama $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, jednaka je

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

4^0 Rešeni zadaci.

215. Dokazati, da je površina pravouglog paraboličkog segmenta jednaka $S = \frac{2}{3}bh$, gde je b osnovica a h visina segmenta (**sl.133**) .

◄ Zapišimo jednačinu parabole u obliku $y = ax^2 + c$ i nađimo a i c iz uslova : $y(0) = h$, $y(\pm\frac{b}{2}) = 0$; $(c = h,\ a = -\frac{4h}{b^2}$). Primenom formule za izračunavanje površine je

$$S = 2\int_0^{\frac{b}{2}} \left(-\frac{4h}{b}x^2 + h\right) dx = 2\left(hx - \frac{4h}{3b^2}x^3\right)\Big|_0^{\frac{b}{2}} = bh - \frac{bh}{3} = \frac{2}{3}bh. \ ►$$

Naći površinu ravne figure ograničene krivama koje su date Dekartovim koordinatama:

216. $ax = y^2$, $ay = x^2$.

◀ Po formuli 1^0, imamo

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3a}\right)\Big|_0^a = \frac{a^2}{3}. \ ▶$$

217. $y = x^2$, $x + y = 2$.

◀ Nađimo apscise tačaka preseka parabole $y = x^2$ i prave $x + y = 2$. Rešavanjem jednačine $x^2 + x - 2 = 0$, nalazimo $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Po formuli 1^0 imamo

$$P = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = \frac{(2-x)^2}{2}\Big|_1^{-2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = 8 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = 4,5. \ ▶$$

218. $x + y = 0$, $y = 2x - x^2$.

◀ Parabola i prava se seku u tačkama čije su apscise $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, sledi,

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 + x)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{6} = 4,5. \ ▶$$

219. $y = |\lg x|$; $y = 0$; $x = 0,1$; $x = 10$.

◀ Pošto je $\lg x \le 0$; za $x \in [0,1;1]$; $\lg x \ge 0$, $x \in [1,10]$, to je

$$\begin{aligned} S &= \int_{0,1}^{10} |\lg x|\, dx = \int_1^{0,1} \lg x dx + \int_1^{10} \lg x dx \\ &= \lg e((x \ln x - x)\Big|_1^{0,1} + (x \ln x - x)\Big|_1^{10}) \\ &= (x \lg x - x \lg e)\Big|_1^{0,1} + (x \lg x - x \lg e)\Big|_1^{10} = 9,9 - 8,1 \lg e. \ ▶ \end{aligned}$$

220. $y = 2^x$; $y = 2$; $x = 0$.

◀ Prava $y = 2$ seče krivu $y = 2^x$ u tački $A(1,2)$. Tražena površina je $S = \int_1^2 (2 - 2^x)\, dx = 2 - \frac{1}{\ln 2}$. ▶

221. $y = (x+1)^2$; $x = \sin \pi y$; $y = 0$ $(0 \le y \le 1)$

◀ Uzimajući u obzir dato, treba naći površinu lika ograničenog krivama $x = \sin \pi y$, $x = -1 + \sqrt{y}$ i $y = 0$. Dakle,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sin \pi y - (-1 + \sqrt{y}))\, dy = \frac{\cos \pi y}{\pi}\Big|_1^0 + \left(y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$ ▶

222. $y = x$; $y = x + \sin^2 x$ $(0 \leq x \leq \pi)$.

◀
$$S = \int_0^\pi (x + \sin^2 x - x)dx = \frac{\pi}{2}.$$ ▶

223. $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$; $y = 0$.

◀ Imamo da $y \to 0$ kad $x \to \infty$; figura nema površinu u običnom smislu. Pošto je funkcija $y(x)$ parna to je $S_A = \int\limits_{-A}^{A} y(x)dx = 2\int\limits_0^A y(x)dx$. Dalje dobijamo $S_A = 2a^3 \int\limits_0^A \frac{dx}{a^2+x^2} = 2a^2 \arctan \frac{A}{a}$. Po definiciji je $S = \lim\limits_{A\to+\infty} S_A = 2a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$. ▶

224. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

◀ Označimo površinu elipse sa S, onda je: $\frac{S}{4} = b\int\limits_a^b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}ab$, odavde sledi da je $S = \pi ab$ (uvedena je smena $x = a \sin t$). ▶

225. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

◀ Izraz $x^2(a^2 - x^2)$ je nenegativan, ako je $|x| \leq a$,a kriva je zatvorena $(y = \pm |x| \sqrt{a^2 - x^2})$. Zbog simetričnog položaja krive imamo:

$$S = 4\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt = \frac{4}{3}a^2 \cos^3 t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{4}{3}a^2$$

(uvedena je smena $x = a \sin t$). ▶

226. $y^2 = 2px$; $27py^2 = 8(x - p)^3$.

◀ Iz navedenih uslova sledi da je $x \geq 0$ i $x \geq p$. Nađimo apscisu presečne tačke krivih; iz druge jednačine imamo $y^2 = \frac{1}{p}\left(\frac{2(x-p)}{3}\right)^3 = 2p^2x$. Označimo $z = \frac{2(x-p)}{3}$. Dolazimo do kubne jednačine $z^3 = 3p^2z + 2p^3$ ili $z(z+p)(z-p) =$

$2p^2(z+p)$. Koren $z = -p$ ne zadovoljava uslov zadatka, jer se dobija $x = -\frac{p}{2}$ (negativan broj). Rešavanjem jednačine $z^2 - pz - 2p^2 = 0$, dobijamo $z_1 = 2p$ i $z_2 = -p$ (z_2 otpada). Prelaskom od z na x sledi $x = 4p$ je apscisa presečne tačke. Funkcija $y = \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}$ je definisana za $x \geq p$; za $p < x < 4p$ je $\sqrt{2px} > \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}$. Uzimajući u obzir da je figura simetrična u odnosu na Ox osu, nalazimo

$$\begin{aligned} S &= 2\left(\int_0^p \sqrt{2p}x^{\frac{1}{2}}dx + \int_p^{4p}\left(\sqrt{2p}x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}\right)dx\right) \\ &= 2\left(\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^p + \left(\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{1}} - \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_p^{4p}\right) \\ &= 2\left(\frac{8}{3}2^{\frac{3}{2}}p^2 - \frac{3}{5}2^{\frac{5}{2}}p^2\right) = 2p^2 2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{88p^2\sqrt{2}}{15}. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

227. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ $(A > 1,\ AC - B^2 > 0)$.

◀ Rešavanjem jednačine $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ u odnosu na x imamo $x = \frac{-By \pm \sqrt{A - (AC - B^2)y^2}}{A}$. Funkcija $x = x(y)$ uzima realne vrednosti, ako je $A - (AC - B^2)y^2 \geq 0$, odakle sledi $|y| \leq \sqrt{\frac{A}{AC - B^2}} = b$. Površinu nalazimo po formuli

$$S = \int_{-b}^{b} (x_1(y) - x_2(y))\,dy,$$

gde je $x_1 = \frac{-By + \sqrt{A - (AC - B^2)y^2}}{A}$; $x_2 = \frac{-By - \sqrt{A - (AC - B^2)y^2}}{A}$. Očigledno je

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{A}\int_{-b}^{b} \sqrt{A - (AC - B^2)y^2}dy = \frac{2\sqrt{AC - B^2}}{A}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2 - y^2}dy \\ &= \frac{4}{A}\sqrt{AC - B^2}b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{\pi b^2}{A}\sqrt{AC - B^2} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}. \end{aligned}$$

Napomena. Jednačina krive se metodom analitičke geometrije može svesti na kanonski oblik-jednačinu elipse sa poluosama $\frac{1}{\sqrt{A}}$ i $\sqrt{\frac{A}{AC - B^2}}$; površina te elipse je (pokazano u primeru 284) $S = \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \sqrt{\frac{A}{AC - B^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$. ▶

228. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ **(cisoida)**; $x = 2a$.

◀ Kriva je simetrična u odnosu na osu Ox ; funkcija $y = y(x)$ ima tačku $x = 2a$ za singularitet, tj. ona nije ograničena u proizvoljnoj levoj polu -okolini te tačke, zato se površina figure izražava pomoću nesvojstvenog integrala druge vrste: $S = 2\int\limits_0^{2a} \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{(2a-x)^{\frac{1}{2}}}$. Smenom $x = 2a\sin^2 t$ dobijamo Rimanov integral:

$$S = 16a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = 16a^2 \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2. \ ▶$$

229. $x = a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$, $y = 0$ **(traktrisa)**.

◀ Očigledno je, $0 < y \le a$; ako zatim x raste od 0 do $+\infty$, onda y opada. Diferenciranjem, dobijamo $dx = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy$. Uzimajući u obzir da je x opadajuća funkcija od y i da figura nema površinu u običnom smislu, uzimamo:

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^{+\infty} y dx = -\int\limits_a^0 \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} y dy = \int\limits_0^a \sqrt{a^2-y^2} dy \\ &= a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi a^2}{4}. \ ▶ \end{aligned}$$

230. $y^2 = \frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}$ $(x > 0;\ n > -2)$.

◀ Kriva je simetrična u odnosu na osu Ox; za $x \to +\infty$ $|y| \searrow 0$. Površina figure data je nesvojstvenim integralom:

$$\begin{aligned} S &= 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{1+x^{n+2}} = \frac{4}{n+2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2} = \\ &= \frac{4}{n+2} \arctan x^{\frac{n+2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{4}{n+2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{n+2}. \ ▶ \end{aligned}$$

231. $y = e^{-x}|\sin x|$, $y = 0$ $(x \ge 0)$.

◀

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x| dx;$$

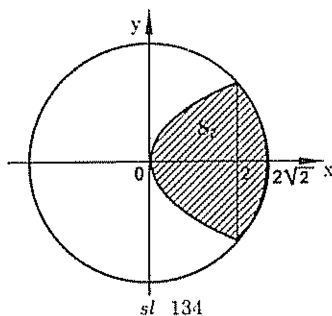
uvodeći u svakom integralu smenu $x - k\pi = t$, imamo

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} \frac{e^{-t}(\sin t + \cos t)}{2} \Big|_{\pi}^{0} = \frac{1+e^{-\pi}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} \\ &= \frac{1+e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{1}{2} \coth \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

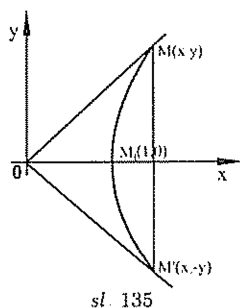
(primer 130). ▶

232. U kom odnosu parabola $y^2 = 2x$ deli površinu kruga $x^2 + y^2 = 8$?

◀ Neka je S_1 površina kruga, a S_2 površina koju čine parabolički i kružni segment (**sl.134**). Očigledno, $S_1 = 8\pi$. Rešavanjem sistema jednačina: $y^2 = 2x$ i $x^2 + y^2 = 8$



sl. 134



sl. 135

dobijamo apscisu $x = 2$ presečne tačke parabole i kruga. Sada je

$$\begin{aligned} S_2 &= 2\left(2\pi - \int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \sqrt{2x}\right) dx\right) \\ &= 2\left(2\pi - \int_0^2 \sqrt{8-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2\right) \\ &= 2\left(2\pi + \frac{8}{3} - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t) dt\right) = 2\pi + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$(S_1 - S_2) : S_2 = \left(8\pi - 2\pi - \frac{4}{3}\right) : S_2 = (9\pi - 2) : (3\pi + 2).$$ ▶

233. Izraziti koordinate tačke $M(x, y)$ hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ kao funkciju

površine hiperboličkog sektora $S = OM'M$, ograničenog lukom hiperbole $M'M$ i polupravama OM i OM', gde je $M'(x, -y)$ tačka simetrična tački $M(x, y)$ u odnosu na osu Ox (sl.135).

◀ Označimo sa M_1 tačku $(1, 0)$, sa S_1 površinu trougla $M'OM$, a sa S_2 površinu hiperboličkog segmenta $M'M_1M$. Očigledno je

$$S_1 = xy;$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 2\int_1^x \sqrt{t^2-1}dt = \left(t\sqrt{t^2-1} - \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)\right)\Big|_1^x \\ &= x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 = xy - x\sqrt{x^2-1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\ &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{aligned}$$

(jer je $y = \sqrt{x^2-1}$). Na taj način je $S = Archx$, tj. $x = \cosh S$, $y = \sqrt{\cosh^2 S - 1} = \sinh S$. ▶

Naći površinu figure ograničene krivima koje su date parametarski:

234. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ **(cikloida)** i $y = 0$.

◀ Sa rašćenjem parametra t raste i x, zato je

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt \\ &= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}dt = 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 z dz = 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 z dz \\ &= \frac{16a^2 \cdot 3}{2 \cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$ ▶

235. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$.

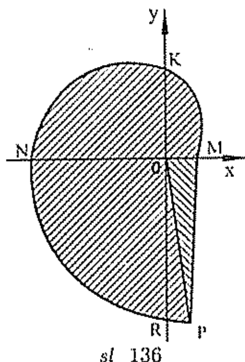
◀ Kriva sama sebe seče u koordinatnom početku: $x = 0$ za $t = 0$ i $t = 2$; $y = 0$ takođe za $t = 0$ i $t = 2$. Za izračunavanje površine petlje koristićemo

formulu:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^2 (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = 4\left(\frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$ ▶

236. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ i $x = a$; $y \le 0$.

◀ Razmotrimo ravnu figuru $MKNRP$, ograničenu datom figurom i pravom $x = a$, $y \le 0$ (**sl.136**). Traženu površinu možemo predstaviti u obliku zbira površina figure $MKNRPOM$ i trougla MOP. Očigledno, $S_{\Delta MOP} = \pi a^2$ $(OM = a, |MP| = 2\pi a)$.



sl 136

Pređimo na polarne koordinate: $\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2(1+t^2)$; $\tan\varphi = \frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t\sin t}$;

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t\sin t}\right), & (x,y) \in KM \cup RP; \\ \arctan\left(\frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t\sin t}\right) + \pi sgn y, & (x,y) \in KN \cup NR; \\ \frac{\pi}{2} sgn y, & x = 0. \end{cases}$$

U svim slučajevima je $d\varphi = \frac{t^2 dt}{1+t^2}$; znači,

$$\begin{aligned} S_{MKNRPOM} &= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1+t^2)t^2}{1+t^2}dt = \frac{4}{3}a^2\pi^3; \\ S_{MKNRP} &= S_{MKNRPOM} + S_{\Delta MOP} = \frac{4}{3}a^2\pi^3 + \pi a^2 = \frac{a^2}{3}\left(4\pi^3 + 3\pi\right). \end{aligned}$$ ▶

237. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$; $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

◄ Figura je ograničena i zatvorena ($x(0) = x(2\pi)$; $y(0) = y(2\pi)$), sledi,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\right) dt = a^2 \int_0^{2\pi}(3 - 3\cos t)dt = 6\pi a^2. \;\blacktriangleright$$

238. $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$ ($c^2 = a^2 - b^2$)(**evoluta elipse**).
◄ Primenom jedne od formula iz 2^0 imamo:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} x dy = \frac{3c^4}{ab}\int_0^{2\pi}\cos^4 t \sin^2 t dt = \frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t - \cos^6 t)dt \\ &= \frac{12c^4}{ab}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi c^4}{8ab}. \;\blacktriangleright \end{aligned}$$

239. $x = a\cos t$, $y = \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.
◄ Pri promeni parametra t od 0 do π, x opada od a do $-a$, $y = L_1(t)$ uzima nenegativne vrednosti (raste od 0 do $\frac{a}{3}$ pri promeni t od 0 do $\frac{\pi}{2}$, a zatim opada od $\frac{a}{3}$ do 0 pri promeni t od $\frac{\pi}{2}$ do π). Pri promeni t od π do 2π, x raste od $-a$ do a; vrednost funkcije $y = L_2(t)$ u intervalu $]\pi, 2\pi[$ je veća od vrednosti $y = L_1(t)$ ($\sin t < 0$ za $t \in]\pi, 2\pi[$). Data kriva je inače zatvorena sa povratnim tačkama $(a, 0)$ i $(-a, 0)$. Zato je $S = \int_0^{2\pi} y dx$ (pri promeni t od 0 do π, po ovoj formuli se dobija površina ograničena krivom $y = L_1(t)$ i odsečkom $[-a, a]$ ose Ox, a pri promeni t od π do 2π, dobija se površina ograničena krivom $y = L_2(t)$ i odsečkom $[-a, a]$ ose Ox; algebarski zbir dobijenih rezultata i daje traženu povšinu). Dobijamo:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}(-a\sin t)dt = -a^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3 t}{2+\sin t}dt \\ &= -a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t - 2\sin t + 4 - \frac{8}{2+\sin t}\right)dt \\ &= 8a^2\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1+\sin t} - 9\pi a^2. \end{aligned}$$

Pošto je $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1+\sin t} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{dz}{1+\varepsilon\cos z}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (smena $t - \frac{\pi}{2} = z$) to prema rešenju

primera 206, glava III imamo

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Konačno dobijamo $S=\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. ►

Naći površinu S ravne figure, ograničene krivama, koje su date u polarnim koordinatama:

240. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ **(lemniskata).**

◄ Kriva je zatvorena, simetrična u odnosu na prave $\rho\cos\varphi=0$ i $\rho\sin\varphi=0$, zato je

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4};\ S=a^2. \ ►$$

241. $\rho=a(1+\cos\varphi)$ **(kardioida).**

◄ Kriva je simetrična u odnosu na pravu $\rho\sin\varphi=0$, zato je

$$S=\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=\frac{3\pi a^2}{2}. \ ►$$

242. $\rho=a\sin 3\varphi$ **(trolist).**

◄ Izračunajmo treći deo površine trolista:

$$\frac{S}{3}=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{a^2\sin^2 3\varphi}{2}d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 6\varphi)d\varphi=\frac{\pi a^2}{12};\ S=\frac{\pi a^2}{4}. \ ►$$

243. $\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}$ **(parabola);** $\varphi=\frac{\pi}{4};\ \varphi=\frac{\pi}{2}$.

◄ Pomoću formule 3^0 nalazimo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{p^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}=\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cot^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{p^2}{4}\left(\cot\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\cot^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{p^2}{4}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^3-1\right)\right) \\ &= \frac{p^2}{12}\left(8\sqrt{2}+6\right)=\frac{p^2}{6}\left(4\sqrt{2}+3\right). \ ► \end{aligned}$$

244. $\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ **(elipsa)**.

◄ Prema formuli u 3^0 i na osnovu rešenja zadatka 207, glave III, sledi

$$\begin{aligned}
S &= \frac{p^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} \\
&= \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)}\left(-\frac{\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x}+\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Big|_0^{2\pi-0} \\
&= \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}. \ ►
\end{aligned}$$

245. $\rho = 3 + 2\cos\varphi$.

◄ S obzirom na simetričnost figure u odnosu na pravu $\rho\sin\varphi = 0$, nalazimo

$$S = \int_0^{\pi}(3+2\cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi}(9+12\cos\varphi+4\cos^2\varphi)d\varphi = 11\pi. \ ►$$

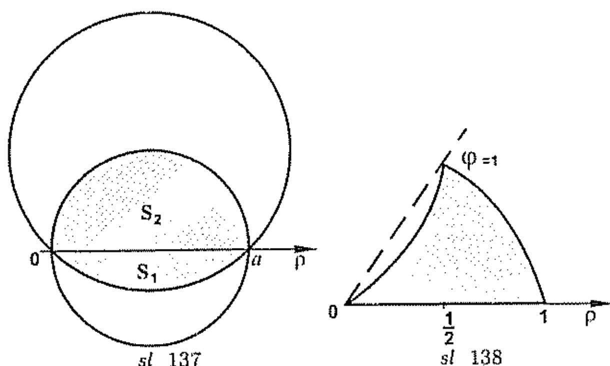
246. $\rho = \frac{1}{\varphi}$; $\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$ $(0 < \varphi \le \frac{\pi}{2})$.

◄ Zbog $\sin\varphi < \varphi$ $(0 < \varphi \le \frac{\pi}{2})$, to je $\frac{1}{\sin\varphi} > \frac{1}{\varphi}$ $(\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[)$, zato je

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}\right)d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}+\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\cot\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon\cos\varepsilon-\sin\varepsilon}{\varepsilon\sin\varepsilon} \\
&= \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}-\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{6}+O^\star(\varepsilon^5)}{\varepsilon^2+O^\star(\varepsilon^4)} = \frac{1}{\pi}. \ ►
\end{aligned}$$

247. $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = a(\cos\varphi+\sin\varphi)$ $\left(M\left(\frac{a}{2},0\right)\in S\right)$.

◀ Iz uslova zadatka sledi, da je $S = S_1 + S_2$, (sl.137)



sl 137 sl 138

gde je

$$S_1 = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^2}{8};$$

$$S_2 = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\sin\varphi + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (1+\sin 2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{-\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(\pi - 1). \quad ▶$$

248. Naći površinu sektora ograničenog krivom $\varphi = \rho\arctan\rho$ i polupravama $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

◀ Za $\varphi = 0$, $\rho = 0$, a za $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, $\rho = \sqrt{3}$. U integralu $S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi$ smenom dobijamo:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2\varphi'(\rho)d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \rho^2\left(\arctan\rho + \frac{\rho}{1+\rho^2}\right)d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^3}{3}\arctan\rho + \frac{\rho^2}{3} - \frac{1}{3}\ln\left(1+\rho^2\right)\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{2}{3}\ln 2\right). \quad ▶$$

249. Naći površinu ravne figure ograničene krivom: $\rho^2 + \varphi^2 = 1$.

◀ Iz uslova $\rho^2 = 1 - \varphi^2$ zaključujemo, da je $|\varphi| \le 1$. Tražena površina je

$$S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\varphi^2)d\varphi = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}. \quad ▶$$

250. Naći površinu figure ograničene cvetastom krivom $\varphi = \sin \pi\rho$, $0 \le \rho \le 1$.

◀ Ako ρ raste od 0 do $\frac{1}{2}$, φ raste od 0 do 1; ako ρ raste od $\frac{1}{2}$ do 1, φ opada od 1 do 0 (**sl.138**), zato veličina integrala $\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \rho^2\varphi'(\rho)d\rho$ daje traženu površinu uzetu sa znakom "-". Prema rečenom je

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho^2\cos\pi\rho d\rho = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho^2\sin\pi\rho}{\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \rho\sin\pi\rho d\rho\right) \\ &= \int_0^1 \rho\sin\pi\rho d\rho = \rho\frac{\cos\pi\rho}{\pi}\Big|_1^0 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\pi\rho d\rho = \frac{1}{\pi}. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

251. Naći površinu figure ograničene linijama: $\varphi = 4\rho - \rho^2; \varphi = 0$.

◀ Rasuđujući slično kao u prethodnom primeru imamo:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\int_0^2 \rho^2(4-3\rho^2)d\rho = \frac{1}{2}\int_0^2 (3\rho^4 - 4\rho^2)d\rho \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\rho^5 - \frac{4}{3}\rho^3\right)\Big|_0^2 = \frac{64}{15}. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

252. Naći površinu figure ograničene linijama: $\varphi = \rho - \sin\rho$; $\varphi = \pi$.

◀ Pošto je $0 \le \rho \le \pi$, to je

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2(1-\cos\rho)d\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \rho^2\cos\rho d\rho\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{3} + 2\pi\right) = \pi\left(1 + \frac{\pi^2}{6}\right). \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

253. Naći površinu ravne figure, ograničene zatvorenom krivom $\rho = \frac{2at}{1+t^2}$; $\varphi = \frac{\pi t}{1+t}$.

◀ Ako pretpostavimo da je $a > 0$, onda zabog $\rho \ge 0$ (uvek) to je $t \ge 0$; $\rho = 0$ za $t = 0$ i $\rho \to 0$ ako $t \to +\infty$, zato imamo:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{4a^2\pi t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t)^2} = 2\pi a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t)^2}.$$

Integraleći po metodu **Ostrogradskog** dobijamo

$$S = 2\pi a^2 \left(-\frac{t^2+t+2}{4(1+t^2)(1+t)} - \frac{1}{4}\arctan t \right)\Big|_0^{+\infty} = \pi a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \blacktriangleright$$

Prelaskom na polarne koordinate, naći površinu ravne figure, ograničene krivama:

254. $x^3 + y^3 = 3axy$ (**Dekartov list**).

◀ Stavljajući $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, dobijamo jednačinu Dekartovog lista u obliku $\rho = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; sada imamo

$$\begin{aligned} S &= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2} = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\varphi d(\tan\varphi)}{(1+\tan^3\varphi)^2} \\ &= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan^3\varphi)}{(1+\tan^3\varphi)^2} = \frac{3a^2}{2} - \frac{1}{1+\tan^3\varphi}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{3}{2}a^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

255. $x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

◀ Prelaskom na polarne koordinata dobijamo jednačinu krive:

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi};$$

i uzimajući u obzir simetričnost sledi:

$$S = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi} = \pi\sqrt{2}a^2$$

(primer 93). ▶

256. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ (**lemniskata**).

◀ Uzimajući $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$, dobijamo jednačinu leminiskate u obliku $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$. Računajući na simetričnost figure u odnosu na pravu $\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi$ i koordinatni početak, dobijamo

$$S = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi = a^2\cos 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = a^2. \blacktriangleright$$

Svodeći jednačinu na parametarski oblik, naći površinu ravne figure ograničene krivama:

257. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (astroida).

◀ Stavimo $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Uzimajući u obzir simetričnost astroide u odnosu na obe koordinatne ose i koristeći formulu $S = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}(xy' - yx')dt$, nalazimo

$$\begin{aligned} S &= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3a^2\sin^2 t\cos^4 t + 3a^2\cos^2 t\sin^4 t)dt \\ &= 6a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$ ▶

258. $x^4 + y^4 = ax^2y$.

◀ Uzmimo $y = tx$; tada je $x = \frac{at}{1+t^4}$, $y = \frac{at^2}{1+t^4}$ $(y \ge 0)$. Ravna figura je ograničena dvema petljama simetričnim u odnosu na osu Oy; Ako je $t = 0$, onda je $y = x = 0$ i $\lim\limits_{t\to\infty} y = \lim\limits_{t\to\infty} x = 0$. Tražena površina jednaka je dvostrukoj površini figure ograničene jednom od navedenih petlji:

$$S = \int\limits_0^{+\infty}\left(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right)dt = a^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^4)^2}.$$

Smenom, $y = \frac{1}{z}$, dobijamo

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{y^m dy}{(1+y^4)^n} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{y^{4n-m-2}dy}{(1+y^4)^n},\ n \ge 1,\ m \ge 0 \qquad (1)$$

Primenjujući (1) a zatim parcijalno integraljenje dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^4)^2} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^4dt}{(1+t^4)^2} = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}td\left(\frac{1}{1+t^4}\right) \\ &= -\frac{t}{4(1+t^4)}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt. \end{aligned}$$

Pošto je prema (1),

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt = \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt,$$

$$\text{to je } I = \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \frac{1}{8}F(t)\,|_0^{+\infty}\,, \text{ gde je}$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}sgnt,\ t \neq 0,\ F(0) = 0.$$

Konačno je $I = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$, $S = \frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. ►

4.6 Izračunavanje dužine luka

1^0 **Dužina luka u Dekartovim koordinatama.** Dužina luka glatke (neprekidno diferencijabilne) krive $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ jednaka je

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

2^0 **Dužina luka krive date parametarski.** Ako je kriva data jednačinama $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$), gde su x, y neprekidno diferencijabilne funkcije na segmentu $[t_0, T]$, onda je dužina L luka krive jednaka

$$L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

3^0 **Dužina luka krive date u polarnim koordinatama.** Ako je $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$, gde je ρ neprekidno diferencijabilna funkcija na segmentu $[\alpha, \beta]$, onda je dužina L odgovarajućeg luka krive jednaka

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2}d\varphi$$

4^0 **Rešeni zadaci.**
Naći dužinu luka sledećih krivih:
259. $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 4$).
◄ Po formuli 1^0 imamo

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).\ ►$$

260. $y^2 = 2px \; (\, 0 \le x \le x_0 \,)$.
◀ Kriva je simetrična u odnosu na osu Ox, zato je

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^{x_0}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx = 2\int_0^{x_0}\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2x}\right)^2+p}}{\sqrt{2x}}dx = 2\int_0^{x_0}\sqrt{\left(\sqrt{2x}\right)^2+1}d\left(\sqrt{2x}\right) \\ &= 2\int_0^{\sqrt{2x_0}}\sqrt{t^2+p}dt = \left(t\sqrt{t^2+p}+p\ln\left(t+\sqrt{t^2+p}\right)\right)\Big|_0^{2x_0} \\ &= \sqrt{2x_0}\sqrt{2x_0+p}+p\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{2x_0+p}}{\sqrt{p}} \\ &= 2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}. \end{aligned}$$ ▶

261. $y = a\cosh\frac{x}{a}$ od tačke $A(0,a)$ do tačke $B(b,h)$.
◀ Prema formuli $\mathbf{1}^0$, dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \int_0^b\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx = \int_0^b\cosh\frac{x}{a}dx = a\sinh\frac{x}{a}\Big|_0^b = a\sinh\frac{b}{a} \\ &= a\sqrt{\cosh^2\frac{b}{a}-1} = a\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1} = \sqrt{h^2-a^2}. \end{aligned}$$ ▶

262. $y = e^x \; (0 \le x \le x_0)$
◀ Koristeći formulu $\mathbf{1}^0$ dobijamo

$$L = \int_0^{x_0}\sqrt{1+e^{2x}}dx = \int_0^{x_0}\sqrt{1+e^{-2x}}d(e^x) = \int_1^{e^{x_0}}\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}dz;$$

parcijalnim integraljenjem ($dz = dv$; $u = \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}$; $v = z$, $du = -\frac{dz}{z^2\sqrt{1+z^2}}$;) sledi

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{1+z^2}\,\Big|_1^{e^{x_0}} + \int_1^{e^{x_0}}\frac{dz}{z^2\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}} = \sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\int_{e^{x_0}}^1\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}} \\ &= \sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\ln\left(\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}\right)\Big|_{e^{x_0}}^1 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1+e^{2x_0}} - \sqrt{2} + \ln \frac{1+\sqrt{2}}{e^{-x_0}+\sqrt{e^{-2x_0}+1}}$$
$$= \sqrt{1+e^{2x_0}} - \sqrt{2} + x_0 - \ln \frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}. \quad ▶$$

263. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y \ (1 \le y \le e)$.

◀ U formuli 1^0 za nalaženje dužine luka L promenljiva integraljenja je y, zato je

$$L = \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1+(x'(y))^2}dy \tag{1}$$

U našem slučaju je

$$L = \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{y}\right)^2}dy = \int_1^e \sqrt{\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{1}{y}+y\right)dy = \frac{1}{2}\left(\ln y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{4}(1+e^2). \quad ▶$$

Primere 264-267 rešiti pomoću formule 1^0 i formule (1) primera 263.

264. $y = a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2} \ (0 \le x \le b < a)$.

◀

$$L = \int_0^b \sqrt{1+\frac{4a^2x^2}{(a^2-x^2)^2}}dx = \int_0^b \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}dx$$
$$= 2a^2\int_0^b \frac{dx}{a^2-x^2} - \int_0^b dx = a\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\Big|_0^b - b = a\ln\frac{a+b}{a-b} - b. \quad ▶$$

265. $y = \ln\cos x \ (0 \le x \le a < \frac{\pi}{2})$.

◀

$$L = \int_0^a \sqrt{1+\tan^2 x}dx = \int_0^a \frac{dx}{\cos x}$$
$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^a = \ln\left(\tan\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right). \quad ▶$$

266. $x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2} \ (0 < b \le y \le a)$.

◀

$$L=\int_b^a \sqrt{1+(x'(y))^2}dy = a\int_b^a \frac{dy}{y} = a\ln y\,|_b^a = a\ln\frac{a}{b}.$$ ▶

267. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ $(0\le x\le \frac{5}{3}a)$.

◀ Zbog simetričnosti krive u odnosu na osu Ox imamo

$$L=2\int_0^{\frac{5}{3}a}\sqrt{1+\frac{x(3a-x)^2}{(2a-x)^3}}dx.$$

Smenom $t^2(2a-x)=8a-3x$ $(2\le t\le 3)$. Posle jednostavnih transformacija sledi

$$\begin{aligned} L &= 4a\int_2^3 \frac{t^2dt}{t^2-3} = 4a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\,|_2^3\right) \\ &= 4a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = 4a\left(1+\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$ ▶

268. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ **(astroida)**.

◀ Prelaskom na parametarske jednačine astroide ($x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$; $0\le t\le 2\pi$) i uzimajući u obzir njenu simetričnost u odnosu na koordinatne ose imamo

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t d(\sin t) = 6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$ ▶

269. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2=a^2-b^2$ **(evoluta elipse)**.

◀ Prema formuli 2^0 je

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t,\ y'(t)=\frac{3c^2}{b}\sin^2 t\cos t, \\ (x'(t))^2+(y'(t))^2 &= 9c^4\sin^2 t\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sigma in^2 t}{b^2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{9c^4\sin^2 t\cos^2 t}{2a^2b^2}(a^2+b^2-c^2\cos 2t);\\
L &= \frac{3c^2}{2\sqrt{2}ab}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2-c^2\cos 2t}\,|\sin t\cos t|\,dt\\
&= \frac{3c^2}{\sqrt{2}ab}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{a^2+b^2-c^2\cos 2t}d(\cos 2t)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{ab}\left(a^2+b^2-c^2\cos 2t\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{ab}\left((a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2+b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{ab}\left((2a^2)^{\frac{3}{2}}-(2b^2)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{4}{ab}(a^3-b^3). \ \blacktriangleright
\end{aligned}
$$

270. $x=\cos^4 t$; $y=\sin^4 t$.

◀ Pošto pri promeni t od 0 do $\frac{\pi}{2}$ pokretna tačka $(x(t), y(t))$ opisuje celu krivu, to je

$$0\le t\le\frac{\pi}{2};\ x'(t)=-4\cos^3 t\sin t,\ y'(t)=4\sin^3 t\cos t;$$

$$
\begin{aligned}
\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2 &= 16\cos^6 t\sin^2 t+16\sin^6 t\cos^2 t\\
&= 16\sin^2 t\cos^2 t(\sin^4 t+\cos^4 t)\\
&= 4\sin^2 2t\left(1-\frac{\sin^2 2t}{2}\right)=2\sin^2 2t(1+\cos^2 2t);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{1+\cos^2 2t}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos^2 2t}d(\cos 2t)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos 2t\sqrt{1+\cos^2 2t}+\ln\left|\cos 2t+\sqrt{1+\cos^2 2t}\right|\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right). \ \blacktriangleright
\end{aligned}
$$

Pri rešavanju primera 271-274 koristiti formulu 2^0.

271. $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$

◀

$$x'(t) = a(1-\cos t),\ y'(t) = a\sin t;$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 2a^2(1-\cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2};$$

$$L = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 4a\int_0^{a}\sin z dz = 4a\cos z\,|_\pi^0 = 8a.\ ▶$$

272. $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$ za $0 \le t \le 2\pi$.
◀ $x'(t) = at\cos t$; $y'(t) = at\sin t$; $x'^2(t) + y'^2(t) = a^2t^2$;

$$L = a\int_0^{2\pi} tdt = \frac{at^2}{2}\,|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a.\ ▶$$

273. $x = a(\sinh t - t)$, $y = a(\cosh t - 1)$ $(0 \le t \le T)$.
◀

$$x'(t) = a(\sinh t - 1), y'(t) = a\sinh t;$$

$$\begin{aligned} x'^2(t) + y'^2(t) &= a^2(\sinh^2 t + \cosh^2 t - 2\cosh t + 1) \\ 2a^2(\cosh^2 t - \cosh t) &= = 4a^2\cosh t\sinh^2\frac{t}{2} = 4a^2\sinh^2\frac{t}{2}\left(2\cosh^2\frac{t}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

(prema formulama: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$; $\cosh t - 1 = 2\sinh^2\frac{t}{2}$; $\cosh t + 1 = 2\cosh^2\frac{t}{2}$). Sada se lako dobija dužina luka:

$$\begin{aligned} L &= 2a\int_0^T \sinh\frac{t}{2}\sqrt{2\cosh^2\frac{t}{2} - 1}dt = \\ &= \frac{4a}{\sqrt{2}}\int_0^T \sqrt{\left(\sqrt{2}\cosh\frac{t}{2}\right)^2 - 1}\cdot d\left(\sqrt{2}\cosh\frac{t}{2}\right) = \\ &= \sqrt{2}a\left(\sqrt{2}\cosh\frac{t}{2}\sqrt{\cosh t} - \ln\left(\sqrt{2}\cosh\frac{t}{2} + \sqrt{\cosh t}\right)\right)|_0^T \\ &= a\left(2\left(\cosh\frac{T}{2}\sqrt{\cosh T} - 1\right) - \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\cosh\frac{T}{2} + \sqrt{\cosh T}}{\sqrt{2}+1}\right).\ ▶ \end{aligned}$$

274. $x = \cosh^3 t$; $y = \sinh^3 t$ $(0 \le t \le T)$.

◀
$$x'(t) = 3\cosh^2 t \sinh t;\ y'(t) = 3\sinh^2 t\cosh t;$$
$$x'^2(t) + y'^2(t) = 9\sinh^2 t\cosh^2 t(\sinh^2 t + \cosh^2 t) = \frac{9}{4}\sinh^2 2t\cosh 2t;$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{3}{2}\int_0^T \sinh 2t\sqrt{\cosh 2t}dt = \frac{3}{4}\int_0^T \sqrt{\cosh 2t}d(\cosh 2t) = \\ &= \frac{1}{2}\cosh^{\frac{3}{2}} 2t\,|_0^T = \frac{1}{2}\left(\cosh^{\frac{3}{2}} 2T - 1\right). \ ▶ \end{aligned}$$

275. $\rho = a\varphi$ **(Arhimedova spirala)** $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

◀ Kriva je zadata u polarnim koordinatama; za nalaženje dužine luka koristimo formulu:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}d\varphi = \\ &= \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\right)|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)\right). \ ▶ \end{aligned}$$

276. $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m > 0$ i $0 < \rho < a)$.

◀ Iz uslova $0 < \rho < a$, nalazimo $-\infty < \varphi < 0$; $\rho'(\varphi) = ame^{m\varphi}$,

$$\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2 = a^2e^{2m\varphi} + a^2m^2e^{2m\varphi} = a^2e^{2m\varphi}(1+m^2);$$

$$L = a\sqrt{1+m^2}\int_{-\infty}^0 e^{m\varphi}d\varphi = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\varphi}\,|_{-\infty}^0 = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}. \ ▶$$

277. $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

◀ Kriva je zatvorena, simetrična u odnosu na pravu $\rho\sin\varphi = 0$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $\rho'(\varphi) = -a\sin\varphi$; $\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$;

$$L = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\,|_0^{\pi} = 8a. \ ▶$$

278. $\rho = \frac{p}{1+\cos\varphi}$ $(|\varphi| \le \frac{\pi}{2})$.

◄ Primenom formule $\mathbf{3^0}$ imamo $\rho'(\varphi) = \frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$;

$$\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = \frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^4} = \frac{2p^2}{(1+\cos\varphi)^3} = \frac{p^2}{4\cos^6\frac{\varphi}{2}};$$

$$L = \frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = p\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$$

Poslednji integral računamo parcijalnim integraljenjem $\frac{dt}{\cos^2 t} = dv$; $v = \tan t$; $u = \frac{1}{\cos t}$; $du = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{\tan t}{\cos t}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t\sin t}{\cos^2 t}dt = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = \sqrt{2} - I + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t};$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(\tan\frac{3\pi}{8}\right)\right);$$

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}}{1 - \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}} = \frac{\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}} + \sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}} - \sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} + 1.$$

Dakle,

$$I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right); \ L = p\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right). \ ►$$

279. $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

◄ Kriva je zatvorena; ako φ raste od 0 do 3π ona polazi iz koordinatnog početka i vraća se u njega. Dakle,

$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2}d\varphi = a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1 + \cos 2\frac{\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{3\pi a}{2}. \ ►$$

280. $\rho = a\tanh\frac{\varphi}{2}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

◀ Očigledno,

$$\begin{aligned}\rho'(\varphi) &= \frac{a}{2}\frac{1}{\cosh^2\frac{\varphi}{2}},\ \rho^2(\varphi)+\rho'(\varphi)^2 = a^2\tanh^2\frac{\varphi}{2}+\frac{a^2}{4\cosh^4\frac{\varphi}{2}}\\ &= \frac{a^2}{\cosh^2\frac{\varphi}{2}}\left(\sinh^2\frac{\varphi}{2}+\frac{a^2}{4\cosh^2\frac{\varphi}{2}}\right)=\frac{a^2}{4\cosh^4\frac{\varphi}{2}}\cdot(\sinh^2\varphi+1)\\ &= \frac{a^2\cosh^2\varphi}{4\cosh^4\frac{\varphi}{2}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L &= \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cosh\varphi}{\cosh^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2\cosh^2\frac{\varphi}{2}-1}{\cosh^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi\\ &= 2\pi a - a\tanh\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi a - a\tanh\pi = a(2\pi-\tanh\pi).\end{aligned}$$ ▶

281. $\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$ $(1\le\rho\le3)$.

◀ U integralu $L=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'(\varphi)^2}d\varphi$ zamenimo promenljive prelaskom od φ na ρ:

$$L=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{1}{\varphi'^2(\rho)}\right)^2}\varphi'(\rho)d\rho=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{(\rho\varphi'(\rho))^2+1}d\rho.$$

U datom slučaju je

$$(\rho\varphi'(\rho))^2+1=\frac{\rho^2}{4}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2+1=\frac{\rho^2}{4}+\frac{1}{4\rho^2}+\frac{1}{2}=\left(\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2\rho}\right)^2,$$

odakle sleduje

$$L=\int_0^3\left(\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2\rho}\right)d\rho=\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{1}{2}\ln\rho\right)\Big|_1^3=2+\frac{1}{2}\ln 3.$$ ▶

282. $\varphi=\sqrt{\rho}$ $(0\le\rho\le5)$.

◀ Slično prethodnom primeru imamo,

$$L=\int_0^5\sqrt{(\rho\varphi'(\rho))^2+1}d\rho=\int_0^5\sqrt{\frac{\rho}{4}+1}d\rho=\frac{8}{3}\left(\frac{\rho}{4}+1\right)\Big|_0^5=\frac{19}{3}.$$ ▶

283. $\varphi = \int\limits_0^{\rho} \frac{\sinh x}{x} dx \ (0 \le \rho \le R)$.

◀ Kao u primeru 282, sleduje

$$\varphi'(\rho) = \frac{\sinh \rho}{\rho}, \quad (\rho\varphi'(\rho))^2 + 1 = 1 + \sinh^2 \rho = \cosh^2 \rho;$$

$$L = \int\limits_0^R \sqrt{(\rho\varphi'(\rho))^2 + 1}d\rho = \int\limits_0^R \cosh \rho d\rho = \sinh \rho \,\Big|_0^R = \sinh R. \ ▶$$

284. $\rho = 1 + \cos t$; $\varphi = t - \tan \frac{t}{2}$ $(0 \le t \le T < \pi)$.

◀ Očigledno je,

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 - \frac{1}{2\cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos t}{2\cos^2 \frac{t}{2}}; \ \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d\rho}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = -\sin t \frac{2\cos^2 \frac{t}{2}}{\cos t};$$

$$\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2 = (1 + \cos t)^2 + \frac{4\sin^2 t \cos^4 \frac{t}{2}}{\cos^2 t} = \frac{4\cos^4 \frac{t}{2}}{\cos^2 t},$$

slediuje

$$L = \int\limits_0^{T - \tan \frac{T}{2}} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2}d\varphi = \int\limits_0^T \sqrt{\rho^2 (\varphi(t)) + \rho' (\varphi(t))^2}\frac{d\varphi}{dt}dt =$$

$$= \int\limits_0^T \frac{2\cos^2 \frac{t}{2}}{\cos t} \frac{\cos t}{2\cos^2 \frac{t}{2}} dt = \int\limits_0^T dt = T. \ ▶$$

285. Dokazati da je dužina luka elipse $x = a\cos t$; $y = b\sin t$ jednaka dužini jednog talasa sinusoide $y = c\sin \frac{x}{b}$, gde je $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

◀ Označimo preko L_1 dužinu luka elipse, a preko L_2 dužinu jednog talasa sinusoide; tada je

$$L_1 = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}dt;$$

$$L_2 = \int\limits_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\cos^2 \frac{x}{b}}dx = \int\limits_0^{2\pi b} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 \frac{x}{b}}d\left(\frac{x}{b}\right)$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}dt \quad \left(\frac{x}{b} = t\right).$$

Na prvi pogled je $L_1 \neq L_2$. Međutim, analizirajmo funkcije:

$$F_1(t) = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, \quad F_2(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

Pošto je $F_j(2\pi - t) = F_j(t)$, $F_j(\pi - t) = F_j(t)$ $(j = 1, 2)$, to je

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt, \quad L_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

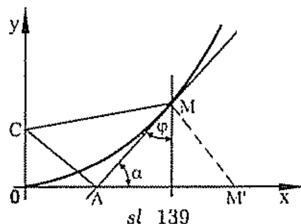
Smenom $\frac{\pi}{2} - t = z$, dobijamo

$$L_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 z + b^2 \sin^2 z} dz = L_2,$$

što je i trebalo dokazati. ►

286. Parabola $4ay = x^2$ kotrlja se po x osi. Dokazati da žiža parabole opisuje lančanicu.

◄ Žiža parabole se nalazi u tački $(0, a)$. Fiksirajmo na krivoj tačku $M(x, y)$ i označimo sa φ ugao između tangente na parabolu u tački M i prave, koja prolazi kroz M paralelno y osi.(**sl.139**).



sl 139

Zamišljajući da se parabola kotrlja po x osi imamo da tada tačka M prelazi u tačku M' na x osi. Pri tom je jasno da će žiža parabole imati koordinate $x = l - MA$; $y = CA$, gde je l dužina luka OM. S obzirom da je $y' = \frac{x}{2a} = \tan\alpha$, to je $\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha = \frac{2a}{x}$, odakle je

$$x = 2a\cot\varphi; \; y = \frac{x^2}{4a} = \frac{4a^2\cot^2\varphi}{4a} = a\cot^2\varphi.$$

Diferenciranjem dobijamo $dx = -\frac{2a d\varphi}{\sin^2\varphi}$, $dy = -\frac{2a\cot\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi$. Sada imamo

$$\begin{aligned} l &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = -2a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi} = \frac{a\cot\varphi}{\sin\varphi} - a\ln\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{a\cot\varphi}{\sin\varphi} + a\ln\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Jasno $y = CA = \frac{a}{\sin\varphi}$; $MA = \frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. Dakle, koordinate žiže parabole su date funkcijama parametra φ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a\cot\varphi}{\sin\varphi} + a\ln\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = a\ln\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right), \\ y &= \frac{a}{\sin\varphi}. \end{aligned}$$

Ostaje da eliminišemo parametar φ. Očigledno je

$$\cot\frac{\varphi}{2} = e^{\frac{x}{a}}, \quad \tan\frac{\varphi}{2} = e^{-\frac{x}{a}}, \quad \sin\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{2e^{-\frac{x}{a}}}{1+e^{-\frac{2x}{a}}};$$

$$y = \frac{a}{\sin\varphi} = a\frac{1+e^{-\frac{2x}{a}}}{2e^{-\frac{x}{a}}} = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} = a\cosh\frac{x}{a}.$$

Dobili smo jednačinu lančanice, čime je dokaz završen. ▶

287. Naći odnos površine ravne figure, ograničene petljom krive $y = \pm\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}$, i površine kruga, čiji je obim jednak dužini konture date linije.

◀ Nađimo najpre površinu, ograničenu petljom krive:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{x}dx - 2\int_0^{\frac{1}{3}} x^{\frac{3}{2}}dx \\ &= \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{135\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Izračunajmo sada dužinu konture linije:

$$L = 2\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx,$$

gde je $y'(x)$ izvod funkcije $y = \left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}$;

$$1 + \left(y'(x)\right)^2 = 1 + \frac{(1-9x)^2}{36x} = \frac{(1+9x)^2}{36x};$$

$$L = 2\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1+9x}{6\sqrt{x}}dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{1}{3}\left(2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Po uslovu zadatka, obim kružnice jednak je dužini petlje, tj. $2\pi r = \frac{4}{3\sqrt{3}}$, odakle sledi $r = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$; odnosno površina kruga je $S_2 = \pi r^2 = \frac{4}{27\pi}$. Sada je traženi odnos površina jednak:

$$S_1 : S_2 = \frac{8 \cdot 27\pi}{135\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}}.$$ ▶

4.7 Izračunavanje zapremine

1^0 Zapremina tela po nekom poprečnom preseku. Ako zapremina tela postoji i ako je $S = S(x)$, $a \leq x \leq b$ površina preseka tela sa ravni, koja je normalna na osu Ox u tački x, onda je

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2^0 Zapremina obrtnog tela. Zapremina tela koje se dobija rotacijom oko ose Ox, ravne figure: $a \leq x \leq b$; $0 \leq y \leq y(x)$, gde je $y(x)$ neprekidna i nenegativna funkcija, jednaka je

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

U opštem slučaju, zapremina prstena dobijenog rotacijom oko ose Ox, ravne figure ograničene pravama $x = a$, $x = b$, $a < b$, i graficima neprekidnih i nenegativnih funkcija $y_1(x)$, $y_2(x)$; $y_1(x) \leq y_2(x)$, jednaka je

$$S = \pi\int_a^b \left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right)dx.$$

3^0 Rešeni zadaci.

288. Naći zapreminu tavana, čija je osnova pravougaonik stranica a i b; gornja ivica tavana je c a visina h.

◀ Označimo sa $S(x)$ površinu preseka, normalnog na visinu h na odstojanju x od ivice c. Imamo,

$$S(x) = \frac{1}{h^2}\left(b(a-c)x^2 + hbcx\right).$$

Po formuli $\mathbf{1^0}$ dobijamo

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h S(x)dx = \frac{1}{h^2}\left(\frac{b(a-c)h^3}{3} + \frac{h^3bc}{2}\right) \\ &= h\left(\frac{ab}{3} + \frac{bc}{6}\right) = \frac{bh}{6}(c+2a). \ ▶ \end{aligned}$$

289. Naći zapreminu obeliska, čije su paralelne strane pravougaonici, redom sa stranicama $A, B; a, b$; i visinom h.

◀ Ozanačimo sa $S(x)$ površinu preska (pravougaonik) normalnog na visinu i udaljen od gornje osnove za x. Imamo

$$\begin{aligned} S(x) &= ab + \frac{(aB - 2ab + bA)\,x}{h} + \frac{(A-a)(B-b)}{h^2}x^2; \\ V &= \int_0^h S(x)dx = abh + \frac{h}{2}(aB - 2ab + bA) + \frac{h}{3}(A-a)(B-b) \\ &= \frac{h}{6}(aB + bA + 2AB + 2ab) = \frac{h}{6}(B(a+2A) + b(A+2a)). \ ▶ \end{aligned}$$

290. Naći zapreminu zarubljene kupe čije su osnove elipse sa poluosama $A, B; a, b$ a visina h.

◀ Uzmimo ravan normalnu na visinu konusa na rastojanju x od gornje osnove; u preseku se dobija elipsa sa poluosama $z_1(x) = a + \frac{A-a}{h}x$ i $z_2(x) = b + \frac{B-b}{h}x$. Površina te elipse, kao što je poznato, jednaka je

$$\begin{aligned} S(x) &= \pi\left(a + \frac{A-a}{h}x\right)\cdot\left(b + \frac{B-b}{h}x\right) \\ &= \pi\left(ab + \frac{aB - 2ab + bA}{h}x + \frac{(A-a)(B-b)}{h^2}x^2\right). \end{aligned}$$

Po formuli 1^0 imamo

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \left(ab + \frac{aB - 2ab + bA}{h} x + \frac{(A-a)(B-b)}{h^2} x^2 \right) dx \\ &= \pi h \left(ab + \frac{aB + bA}{2} - ab + \frac{AB}{3} - \frac{aB + bA}{3} + \frac{ab}{3} \right) \\ &= \frac{\pi h}{6} \left(B(a + 2A) + b(A + 2b) \right). \ ▶ \end{aligned}$$

291. Naći zapreminu obrtnog paraboloida, čija je osnova S, a visina H

◀ Obrtni paraboloid se dobija rotacijom parabole $y = ax^2$ oko ose Oy. Osnovu čini krug, površine S, po uslovu zadatka. Ako sa R označimo poluprečnik tog kruga, onda iz jednakosti $\frac{H}{a} = R^2$ dobijamo $\frac{\pi H}{a} = S$, tj. $a = \frac{\pi H}{S}$. Sada iz $y = \frac{\pi H}{S} x^2$ sledi $x^2 = \frac{Sy}{\pi H}$. Ako su x, y fiksirani, onda množeći levu i desnu stranu sa π, dobijamo površinu poprečnog preseka paraboloida kao funkciju od y (u preseku paraboloida sa ravni koja je normalna na Oy osu): $S(y) = \frac{Sy}{H}$. Sada se lako dobija tražena zapremina:

$$V = \frac{S}{H} \int_0^H y dy = \frac{SH}{2}. \ ▶$$

292. Neka je za telo koje ima zapreminu, površina $S = S(x)$ preseka tela sa ravni koja je normalna na Ox osu, data sa $S(x) = Ax^2 + Bx + C$ $(a \le x \le b)$, gde su A, B, C konstante. Dokazati, da je zapremina tog tela jednaka

$$V = \frac{H}{6} \left(S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2} \right) + S(b) \right),$$

gde je $H = b - a$ **(Simpsonova formula).**

◀ Po formuli 1^0 imamo

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \left(Ax^2 + Bx + C \right) dx = \frac{A}{3} \left(b^3 - a^3 \right) + \frac{B}{2} (a^2 - b^2) + C(b - a) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(2A(a^2 + ab + b^2) + 3B(a + b) + 6C \right) \\ &= \frac{H}{6} \left((Aa^2 + Ba + C) + (Ab^2 + B\, b + C) + 2Aab + 2B(a + b) + 4C \right. \\ &\quad \left. + Aa^2 + Ab^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{H}{6}\left(S(a)+S(b)+4\left(\frac{Aab}{2}+B\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)+C+\frac{A(a^2+b^2)}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{H}{6}\left(S(a)+S(b)+4\left(A\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+B\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)+C\right)\right)$$
$$= \frac{H}{6}\left(S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right),$$

što je i trebalo dokazati. ▶

293. Telo **T** predstavlja skup tačaka $M(x,y,z)$ gde je $0 \le z \le 1$ i $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, ako je z racionalan broj; tj. $-1 \le x \le 0, -1 \le y \le 0$, ako je z iracionalan broj. Dokazati, da zapremina tog tela ne postoji, iako je $\int\limits_0^1 S(z)dz = 1$.

◀ Pretpostavimo da zapremina tela postoji. Tada je ona jednaka gornjoj zapremini tela, tj. broju $\overline{V} = \inf\left\{\overline{V}_T\right\}$, gde je $\left\{\overline{V}_T\right\}$ skup zapremina svih poliedara opisanih oko tela T. Među tim poliedrima postoji najmanji, predstavljen unijom kocki $\{0 \le z \le 1; 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$ i $\{0 \le z \le 1; -1 \le x \le 0; -1 \le y \le 0\}$, odakle sledi da skup $\left\{\overline{V}_T\right\}$ ima infimum, očigledno jednak

$$\overline{V} = \inf\left\{\overline{V}_T\right\} = 2.$$

Dakle, ako zapremina tela postoji, ona je jednaka 2. S obzirom da je skup racionalnih brojeva z segmenta $[0,1]$ komplementaran skupu iracionalnih brojeva tog segmenta, to je jasno da zapremina tela ne može biti veća od zapremine kocke ivice 1, tj.

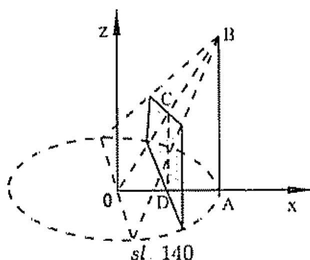
$$2 = V \le 1.$$

Dobili smo kontradikciju pretpostavljajući da zapremina tela postoji. ▶

Naći zapremine tela, ograničene sledećim površima:

294. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $z=\frac{c}{a}$; $z=0$.

◀ Telo je ograničeno delom cilindrične površi i delom ravni (**sl.140**). Analizirajmo presek tela sa ravni $x = x_0$. U preseku se dobija pravougaonik.



sl. 140

Iz sličnosti trouglova **OAB** i **ODC** se dobija $\frac{AB}{DC} = \frac{OA}{OD}$, tj. $DC = \frac{AB \cdot OD}{OA} = \frac{cx_0}{a}$. Površina $S(x)$ proizvoljnog preseka, normalnog na osu Ox, je $S(x) = \frac{2bcx}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, zato je

$$V = \frac{2bc}{a}\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{2bca}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}abc. \ ▶$$

295. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **(elipsoid).**

◀ Presek tela i ravni normalne na osu Ox je elipsa

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1,$$

čija je površina $S(x)$ očigledno jednaka: $S(x) = \pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})$. Sada je zapremina jednaka:

$$V = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc. \ ▶$$

296. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $z=\pm c$.

◀ Telo je ograničeno jednokrilnim hiperboloidom i delovima ravni $z = \pm c$. Zbog simetrije tela u odnosu na ravan xOy, dovoljno je izračunati zapreminu dela tela ($0 \le z \le c$) i onda je udvostručiti. Presek tela i ravni $z = c_1$ ($c_1 < c$) jeste elipsa

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c^2}}\right)^2}=1;$$

Odatle sledi da je površina poprečnog preseka funkcija od z, tj. $S(z) = \pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$, i onda je

$$V = 2\pi ab\int_a^c\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz = 2\pi ab\left(c+\frac{c}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi abc. \ ▶$$

297. $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

◀ Uzmimo $\frac{1}{8}$ dela tela (ona se nalazi u prvom oktantu). Presek tela

i ravni upravne na osu Oz je kvadrat, čija je površina $S(z) = a^2 - z^2$; zapremina je onda jednaka:

$$V = 8\int_0^a (a^2 - z^2)dz = 8a^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}a^3. \;\blacktriangleright$$

298. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = ax$.

◀ Telo je ograničeno delom površi cilindra $x^2 + y^2 = ax$ i dvema delovima sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Pošto je telo simetrično u odnosu na ravan xOy razmatraćemo slučaj $(0 \leq z \leq a)$. Presek tela i ravni normalne na osu Ox je krivolinijski trapez, čija je površina jednaka

$$S(x) = \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}dy = 2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}dy,$$

a tražena zapremina se onda nalazi po formuli

$$V = 4\int_0^a S(x)dx = 4\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}dy\right) dx \qquad (1)$$

Unutrašnji integral, tj. $S(x)$ se nalazi smenom $y = \sqrt{a^2 - x^2}\sin t, dy = \sqrt{a^2 - x^2}\cos t dt$, pa je

$$S(x) = \int_a^{\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}} (a^2 - x^2)\cos^2 t dt = \frac{a^2 - x^2}{2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right).$$

Zamenjujući $S(x)$ u (1) dobijamo

$$V = 2\int_0^a (a^2 - x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right) dx.$$

Smenom $x = a\tan^2\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$ dobijamo

$$V = 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \tan^4\varphi)\left(\varphi + \frac{\tan\varphi}{1 + \tan^2\varphi}\right)\tan\varphi \cdot d(\tan\varphi)$$

$$= 4a^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varphi\left(\frac{d(\tan^2\varphi)}{2}-\frac{d(\tan^6\varphi)}{6}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2\varphi-\tan^6\varphi)d\varphi\right)$$

$$= 4a^3\left(\varphi\left(\frac{\tan^2\varphi}{2}-\frac{\tan^6\varphi}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^6\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\varphi d\varphi\right)$$

$$+4a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2\varphi-\tan^6\varphi)d\varphi.$$

Sređivanjem sličnih članova u poslednjem izrazu imamo

$$\begin{aligned} V &= 4a^3\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\varphi d\varphi-\frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^6\varphi d\varphi\right) \\ &= 4a^3\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}(\tan\varphi-\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{5}{6}\left(\frac{\tan^5\varphi}{5}-\frac{\tan^3\varphi}{3}+\tan\varphi-\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= 4a^3\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}+\frac{5}{18}-\frac{5}{6}+\frac{5\pi}{24}\right) \\ &= 4a^3\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\right)=\frac{2a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right). \ ▶ \end{aligned}$$

299. $z^2 = b(a-x)$, $x^2+y^2 = ax$.

◀ Telo je ograničeno paraboličkim i kružnim cilindrom i simetrično je raspoređeno u odnosu na ravan xOy. Zato ćemo posmatrati deo tela za $0 \le z \le \sqrt{ab}$. Površina preseka tela sa ravni koja je normalna na osu Ox je

$$S(x) = 2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} zdy = 2\sqrt{b(a-x)}\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} dy = 2\sqrt{bx}\,(a-x).$$

Uzimajući u obzir simetriju imamo

$$V = 4\sqrt{b}\int_0^a \sqrt{x}(a-x)dx = 8\sqrt{b}a^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}. \ ▶$$

300. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{z^2}=1$ $(0<z<a)$.

◀ Presek tela i ravni normalne na z osu je elipsa sa poluosama a i z, sledi $S(z) = \pi a z$;

$$V = \pi a \int_0^a z dz = \frac{\pi a^3}{2}. \ ▶$$

301. $x + y + z^2 = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

◀ Telo se nalazi u prvom oktantu i ograničeno je koordinatnim ravnima i delom površi $z = \sqrt{1 - x - y}$. U preseku sa ravni normalne na osu Oz dobija se jednakokrako pravougli trougao čija kateta iznosi $1 - z^2$ jedinica; zato je $S(z) = \frac{(1-z^2)^2}{2}$.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a (1 - 2z^2 + z^4) dz = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}. \ ▶$$

302. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$.

◀ Stavljajući $z + \frac{x+y}{2} = t$, $|t| \leq a$, dobijamo u normalnom preseku ravnu figuru, ograničenu krivom (elipsom)

$$\frac{3x^2}{4(a^2 - t^2)} + \frac{2xy}{4(a^2 - t^2)} + \frac{3y^2}{4(a^2 - t^2)} = 1, \ |t| < a.$$

Na osnovu zadatka 227, gde je

$$A = \frac{3}{4(a^2 - t^2)}, \ B = \frac{1}{4(a^2 - t^2)}, \ C = \frac{1}{4(a^2 - t^2)}$$

imamo da je

$$S(t) = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}} = \pi\sqrt{2}\left(a^2 - t^2\right).$$

I tako je

$$V = \pi\sqrt{2} \int_{-a}^{a} (a^2 - t^2) dt = 2\pi\sqrt{2} \int_{-a}^{a} (a^2 - t^2) dt = \frac{4}{3}\pi\sqrt{2}a^3. \ ▶$$

Napomena. Metodom linearne algebre se jednačina date površi može svesti na kanonični oblik-elipsoid sa poluosama: $\sqrt{2a}$; $\sqrt{2a}$; $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

303. Dokazati da je zapremina tela koje se dobija rotacijom oko ose Oy ravne figure $a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq y(x)$, gde je $y(x)$ neprekidna jednoznačna funkcija, jednaka

$$V_y = 2\pi \int_a^b x y(x) dx.$$

◀ Neka je $\prod = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ proizvoljna podela segmenta $[a, b]$. Na svakom segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ razmotrimo dva pravougaonika čije su osnovice $\Delta\, x_i$ i visine redom

$$m_i = \min_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{y(x)\}\,;\; M_i = \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{y(x)\}\,.$$

Tako su dobijene dve stepenaste figure: jedna je upisana u krivolinijski trapez ograničen x osom, grafikom funkcije $y = y(x)$ i pravama $x = a$ i $x = b$, a druga je oko njega opisana. Rotacijom tako dobijene figure dobijaju se dva tela T_1 i T_2 koja redom imaju zapremine V_{T_1} i V_{T_2} i za njih važi:

$$\begin{aligned} V_{T_1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i(x_{i+1}^2 - x_i^2) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \,\Delta\, x_i, \\ V_{T_2} &= \sum_{i=0}^{i-1} 2\pi M_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \,\Delta\, x_i. \end{aligned}$$

Zbog integrabilnosti funkcije $\overline{y} = 2\pi x y(x)$ na $[a, b]$ imamo da je za svaku podelu $\prod$ sa dužinom segmenata $\Delta\, x_i < \delta$, $\overline{S}_n - \underline{S}_n < \frac{\varepsilon}{2}$, gde su $\overline{S}_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i x_{i+1} \,\Delta\, x_i$, $\underline{S}_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i x_i \,\Delta\, x_i$ redom gornja i donja Darbuova suma za funkciju $\overline{y}(x)$ na segmentu $[a, b]$ (ε je proizvoljan unapred zadat broj). Telo T čiju zapreminu izračunavamo sadrži telo T_1 i sadržano je u telu T_2. Očigledno je,

$$\begin{aligned} V_{T_1} &= \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i x_i \,\Delta\, x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i \,\Delta\, x_i^2 \\ V_{T_2} &= \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i x_{i+1} \,\Delta\, x_i - \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i \,\Delta\, x_i^2, \end{aligned}$$

Zato je $V_{T_1} - V_{T_2} = \overline{S}_n - \underline{S}_n - \gamma_n$, gde je $\gamma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi\,(M_i + m_i) \,\Delta\, x_i^2$. Pošto je $\Delta\, x_i < \delta$, to je $|\gamma_n| < 2\pi M \delta(b - a)$, gde je $M = \max\limits_{x\in[a,b]} \{y(x)|$; kako je $\overline{S}_n - \underline{S}_n < \frac{\varepsilon}{2}$ onda birajući $\delta < \frac{\varepsilon}{4\pi M(b-a)}$, dobijamo $V_{T_1} - V_{T_2} < \varepsilon$ kad god je $\Delta\, x_i < \delta$. Dakle, telo T dobijeno rotacijom oko y ose ravne figure ograničene pravama $x = a, x = b$, grafikom funkcije $y = y(x)$ i x osom nalazi se između dva tela koja imaju zapremine i čija se razlika može učiniti manjom od unapred zadatog pozitivnog broja ε. Pošto su limesi suma V_{T_1} i V_{T_2} kada

parametar podele teži nuli jednaki integralu $2\pi \int_a^b xy(x)dx$, to se i zapremina tela T može računati po formuli $V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx$. ►

Naći zapremine tela koje ograničavaju površi dobijene rotacijom sledećih krivih:

304. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0 \le x \le a)$ oko ose Ox.

◄ Zapreminu tela nalazimo po formuli

$$V_x = \pi \int_0^a y^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^{\frac{4}{3}}} \int_0^a x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{3}{7}\pi b^2 a^{-\frac{4}{3}} x^{\frac{7}{3}} \Big|_0^a = \frac{3}{7}\pi a b^2. \ ►$$

305. $y = 2x - x^2$, $y = 0$: a) oko ose O; b) oko Oy ose.

◄ a) Kriva seče osu Ox u tačkama $x = 0$ i $x = 2$; sledi zapremina tela je

$$V_x = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi;$$

b)

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}. \ ►$$

306. $y = \sin x$; $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$: a) oko ose Ox; b) oko ose Oy.

◄ a)

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2};$$

b)

$$V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi(x \cos x \Big|_0^\pi + \sin x \Big|_0^\pi) = 2\pi^2. \ ►$$

307. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$; $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$: a) oko ose Ox; b) oko ose Oy.

◄ Rešavanjem sistema dobijamo apscise presečnih tačaka krivih: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm a$. Uzimajući u obzir simetriju krivih u odnosu na osu Oy imamo

a)

$$V_x = 2\pi b^2 \int_0^a \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4}\right) dx = 2\pi ab^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}\pi ab^2;$$

b)

$$V_y = 2\pi b \int_0^a \left(\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2}\right) dx = 2\pi a^2 b \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi a^2 b}{6}. \ \blacktriangleright$$

308. $y = e^{-x}$; $y = 0$ $(0 \le x < +\infty)$: **a)** oko ose Ox; **b)** oko ose Oy.

◄ a)

$$V_x = \lim_{X \to +\infty} \pi \int_0^X e^{-2x} dx = \pi \lim_{X \to +\infty} \frac{e^{-2x}}{2} \Big|_X^0 = \frac{\pi}{2} \lim_{X \to +\infty} \left(1 - e^{-2X}\right) = \frac{\pi}{2};$$

b)

$$V_y = \lim_{X \to +\infty} 2\pi \int_0^X xe^{-x} dx = 2\pi \lim_{X \to +\infty} \left(xe^{-x} + e^{-x}\right) \Big|_X^0$$
$$= -2\pi \lim_{X \to +\infty} (Xe^{-X} - 1 - e^{-X}) = 2\pi. \ \blacktriangleright$$

309. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(0 < a \le b)$ oko ose Ox.

◄ Figura koja rotira oko ose Ox je kružnica sa centrom u tački $(0, b)$; jednačina dela kružnice iznad prave $y = b$ je $y_B = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, a jednačina dela kružnice ispod prave $y = b$ je $y_H = b - \sqrt{a^2 - x^2}$. Zato je zapremina jednaka:

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} \left(y_B^2 - y_H^2\right) dx = 8\pi ab \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8\pi a^2 b \int_0^{} \cos^2 t dt = 2\pi^2 a^2 b. \ \blacktriangleright$$

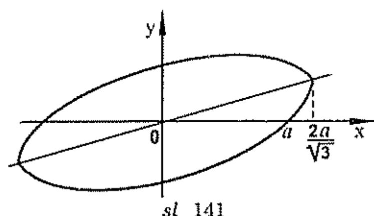
310. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ oko ose Ox.

◄ Rotaciona kriva $y = \frac{x}{2} \pm \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}x^2}$ je zatvorena, a prava $y = \frac{x}{2}$ je njena osa simetrije (**sl.141**), zato je

$$V_x = 2\pi \left(\int_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \left(\frac{x}{2} + \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}x^2}\right)^2 dx - \int_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \left(\frac{x}{2} - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}x^2}\right)^2 dx \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \left(a^2 - \frac{x^2}{2} + x\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}x^2}\right) dx - 2\pi \int_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \left(a^2 - \frac{x^2}{2} - x\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}x^2}\right) dx \\
&= 2\pi \left(\frac{2a^3}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} + \frac{4}{9}\left(a^2 - \frac{3}{4}x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{2a}{\sqrt{3}}}^{0} - \frac{2a^3}{\sqrt{3}}\right. \\
&\quad \left. + a^3 + \frac{x^3}{6}\Big|_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} + \frac{4}{9}\left(a^2 - \frac{3}{4}x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{2a}{\sqrt{3}}}^{a}\right)
\end{aligned}
$$

Posle sređivanja izraza dobijamo



sl 141

$$V_x = \frac{2\pi a^3}{3}\left(\frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{8\pi a^3}{3}. \ ▶$$

311. $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0 \leq x < +\infty)$ oko ose Ox.

◀ Imamo da je $\sin x \geq 0$ za $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$ pa je

$$V_x = \pi \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-2x} \sin x dx;$$

smenom $t = x - 2k\pi$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-4k\pi} \int_0^{\pi} e^{-2t} \sin t dt = \pi \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-4k\pi} \frac{e^{-2t}}{5} (\cos t + 2\sin t)\Big|_{\pi}^{0} \\
&= \frac{\pi}{5}\left(1 + e^{-2\pi}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-4k\pi} = \frac{\pi}{5}\frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})}. \ ▶
\end{aligned}
$$

Napomena: Po definiciji je $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

312. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$; $y = 0$:
a) oko ose Ox; b) oko ose Oy; c) oko prave $y = 2a$.

◀ a) Zapreminu računamo po formuli:

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt \\
&= 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 z dz = 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = 32\pi a^3 \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3.
\end{aligned}
$$

b) U ovom slučaju je

$$
\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_0^{2\pi a} xy(x)dx = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt \\
&= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}t - 2t\cos t + \frac{t}{2}\cos 2t - \frac{3}{2}\sin t + \sin 2t - \frac{\sin t \cos 2t}{2}\right) dt \\
&= 2\pi a^3 \frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 6\pi^3 a^3,
\end{aligned}
$$

jer je

$$
\int_0^{2\pi} \left(-2t\cos t + \frac{t}{2}\cos 2t - \frac{3}{2}\sin t + \sin 2t - \frac{\sin t \cos 2t}{2}\right) dt = 0.
$$

c) Prelazimo na novi koordinatni sistem po formulama: $y_1 = y - 2a$, $x_1 = x$. Tada je tražena zapremina jednaka

$$V = V_1 - V_2,$$

gde je V_1 zapremina kružnog cilindra visine $2\pi a$ i poluprečnikom kružnice $2a$, a

$$V_2 = \pi \int_0^{2\pi a} y_1^2(x) dx_1$$

Očigledno je,

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 2\pi a \pi 4a^2 = 8\pi^2 a^3; \\
V_2 &= \pi \int_0^{2\pi} \left(a^2(1-\cos t)^2 - 4a^2(1-\cos t) + 4a^2\right) a(1-\cos t)dt = \pi^2 a^3.
\end{aligned}
$$

Konačno imamo
$$V = 8\pi^2a^3 - \pi^2a^3 = 7\pi^2a^3. \blacktriangleright$$

313. $x = a\sin^3 t,\ y = b\cos^3 t\ (0 \le t \le 2\pi)$;

◀ a)

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b\cos^3 t)^2 d(a\sin^3 t) = 6\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7 t - \cos^9 t)dt \\ &= 6\pi ab^2\left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}\right) = \frac{32\pi ab^2}{105}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V_y &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 tb\cos^3 td(a\sin^3 t) = 12a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\cos^4 tdt \\ &= 12a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t - 2\sin^7 t + \sin^9 t)dt = 12\pi a^2b\left(\frac{4!!}{5!!} - 2\frac{6!!}{7!!} + \frac{8!!}{9!!}\right) \\ &= \frac{32\pi a^2 b}{105}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

314. Naći zapreminu tela koje se dobija rotacijom petlje krive $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$ a) oko ose Ox; b) oko ose Oy.

◀ a) Pošto je $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $x(2) = 0$; $y(2) = 0$ to $0 \le t \le 2$. Ako zatim t raste od 0 do 1, x raste od 0 do 1; ako t raste od 1 do 2, x opada od 1 do 0; sledi

$$\begin{aligned} V_x &= -\pi\int_1^2 y^2dx - \pi\int_0^1 y^2dx = -\pi\int_0^2 y^2dx \\ &= 2\pi\int_0^2(t-1)(16t^2 - 8t^4 + t^6)dt \\ &= 2\pi\int_0^2(t^7 - t^6 - 8t^5 + 8t^4 + 16t^3 - 16t^2)dt \\ &= 2\pi\left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^7}{7} - \frac{8}{6}t^6 + \frac{8}{5}t^5 + \frac{16}{4}t^4 - \frac{16}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = \frac{64}{35}\pi. \end{aligned}$$

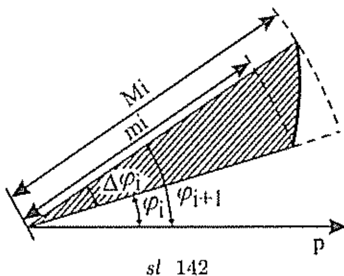
b) Na osnovu rečenog pod a) imamo

$$\begin{aligned} V_y &= -2\pi \int_1^2 xy dx - 2\pi \int_0^1 xy dx = -2\pi \int_0^2 (2t - t^2)(4t - t^3)2(1-t) dt \\ &= 4\pi \int_0^2 (t^6 - 3t^5 - 2t^4 + 2t^3 - 8t^2) dt \\ &= 4\pi \left(\frac{2^7}{7} - 2^5 - \frac{2^6}{5} + 3 \cdot 2^4 - \frac{2^6}{3} \right) = \frac{64\pi}{105}. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

315. Dokazati da je zapremina tela koje se dobija rotacijom figure $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$ (φ i ρ su polarne koordinate) oko polarne ose jedaka

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

◀ Neka je $\prod$ proizvoljna podela segmenta $[\alpha, \beta]$ na delove tačkama $\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$. Razmotrimo ravnu figuru, ograničenu polupravama $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ i delom krive $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_i \le \varphi \le \varphi_{i+1})$ **(sl.142)**.



sl 142

Neka je

$$M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]} \{\rho(\varphi)\}\ ;\ m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]} \{\rho(\varphi)\}.$$

Analizirajmo sada dva tela T_1 i T_2 dobijena rotacijom figure ograničene polupravama $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ i lukovima kružnica poluprečnika $\rho = M_i$, $\rho = m_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$. Očigledno, telo T čija se zapremina traži je sadržano u telu T_1 a sadrži u sebi telo T_2. Uzimajući u obzir da je zapremina loptinog isečka jednaka $\frac{2}{3}\pi R^2 h$, gde je h visina odsečka a R poluprečnik lopte, dobijamo formule za zapremine tela T_1 i T_2 :

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{3} \pi M_i^3 (\cos \varphi_i - \cos \varphi_{i+1}) = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin \frac{\Delta \varphi_i}{2};$$

$$V_{T_2} = \frac{4\pi}{3}\sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin\frac{\varphi_i+\varphi_{i+1}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi_i}{2}.$$

Za odabranu podelu $\prod$ je

$$\sin\frac{\Delta\varphi_i}{2} = \frac{\Delta\varphi_i}{2} + O^\star\left((\Delta\varphi_i)^3\right), \quad \sin\frac{\varphi_i+\varphi_{i+1}}{2} = \sin\overline{\varphi}_i,$$

gde je $\varphi_i < \overline{\varphi}_i < \varphi_{i+1}$. Očigledno je

$$V_{T_1} \geq \frac{2\pi}{3}\sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin\hat{\varphi}_i \,\Delta\varphi_i + \gamma_1 = \overline{S_n} + \gamma_1;$$

$$V_{T_2} \geq \frac{2\pi}{3}\sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin\check{\varphi}_i \,\Delta\varphi_i + \gamma_2 = \underline{S_n} + \gamma_2,$$

gde $\gamma_i \to 0$ kad $\Delta\varphi_i \to 0$ $(j = 1, 2)$; $\sin\hat{\varphi}_i = \max\limits_{\varphi\in[\varphi_i,\varphi_{i+1}]} \sin\varphi$; $\sin\check{\varphi}_i = \min\limits_{\varphi\in[\varphi_i,\varphi_{i+1}]} \sin\varphi$.

Lako se vidi da je $\overline{S}_n$ gornja a $\underline{S}_n$ donja Darbuova suma integrabilne funkcije $\frac{2\pi}{3}\rho^3(\varphi)\sin\varphi$ na segmentu $[\alpha, \beta]$ kao i da se za svaki unapred zadat pozitivan broj ε može odabrati podela $\prod$ tako da je $\overline{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon$, kad god je parametar podele manji od $\delta = \delta(\varepsilon)$. To dokazuje da telo T ima zapreminu. Iz nejednakosti

$$\underline{S}_n + \gamma_2 \leq V_{T_2} \leq V_T \leq V_{T_1} \leq \overline{S}_n + \gamma_1$$

sledi da se zapremina tela T može izračunavati po formuli

$$V_T = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi,$$

što znači da je dokaz tvrđenja završen. ►

316. $\rho = a(1+\cos\varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$: **a)** oko polarne ose; **b)** oko prave $\rho\cos\varphi = -\frac{a}{4}$.

◄ a) Polarna osa deli ravnu figuru $\rho = a(1+\cos\varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ na dva jednaka dela, zato se integraljenje vrši za $0 \leq \varphi \leq \pi$, tj.

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}\int_\pi^0 (1+\cos\varphi)^3 d(\cos\varphi)$$

$$= \frac{\pi a^3}{6}(1+\cos\varphi)^4\Big|_\pi^0 = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

b) Prelaskom na novi koordinatni sistem po formulama $x_1 = y$, $y_1 = -x - \frac{a}{4}$, i uzimajući u obzir simetriju u odnosu na osu O_1y_1 dobijamo $V_{x_1} = 2\pi \int\limits_0^{\frac{3\sqrt{3}a}{4}} y_1^2 dx_1$ (koristili smo da pri rašćenju φ od 0 do $\frac{\pi}{3}$, x_1 raste od 0 do $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$, a pri rašćenju φ od $\frac{\pi}{2}$ do π, x_1 opada od $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$ do 0). Uzimajući parametarske jednačine krive (φ je parametar) imamo

$$V_{x_1} = 2\pi a^3 \int\limits_0^{\pi} \left((1+\cos\varphi)\cos\varphi + \frac{1}{4}\right)^2 (\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 1)d\varphi.$$

Koristeći da je $\int\limits_0^{\pi} \cos^{2k+1} t dt = 0$, $(k \in \mathbb{N})$ sledi

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= 2\pi a^3 \int\limits_0^{\pi} (4\cos^4\varphi + 2\cos^6\varphi - \cos^2\varphi)d\varphi \\ &= 4\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^4\varphi + 2\cos^6\varphi - \cos^2\varphi)d\varphi \\ &= 2\pi a^3 \left(\frac{4\cdot 3!!}{4!!} + \frac{2\cdot 5!!}{6!!} - \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

Napominjemo čitaocu da parametarske jednačine krive glase:

$x_1 = x_1(\varphi) = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, $y_1 = y_1(\varphi) = -\left(\frac{a}{4} + a(1+\cos\varphi)\cos\varphi\right)$. ►

317. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$: **a)** oko ose Ox; **b)** oko ose Oy; **c)** oko prave $y = x$.

◄ a) Prelaskom na polarne koordinate ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) data kriva ima jednačinu $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (**Bernulijeva lemniskata**). Uzimajući u obzir simetričnost date ravne figure u odnosu na obe koordinatne ose i primenom formule iz zadatka 315 imamo

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{4}{3}\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^3 \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} (2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}} d(\cos\varphi) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int\limits_1^{\sqrt{2}} (z^2-1)^{\frac{3}{2}} dz \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{z}{4}\left(z^2-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{8}z\sqrt{z^2-1}+\frac{3}{8}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)=\frac{\pi a^3}{4}\left(\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{2}{3}\right).$$

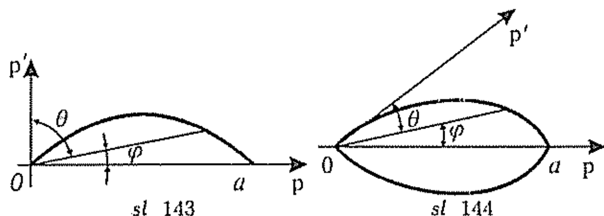
b) Uzimajući polupravu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ za polarnu osu sistema ρ', θ; **(sl.143)** onda je $\rho'(\theta) = \rho(\varphi)$; $\theta = -\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \varphi - \frac{\pi}{2}$ i onda po formuli iz zadatka 315 (uzimajući u obzir simetriju figure i to da je $\sin\theta < 0$), nalazimo

$$V_y = \frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\left(\rho'(\theta)\right)^3|\sin\theta|d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\left|\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right|d\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}|\cos\varphi|\,d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}d\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^1\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}dz = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

c) Ako uzmemo polupravu $\varphi = \frac{\pi}{4}$ za polarnu osu sistema ρ', θ; onda je $\rho'(\theta) = \rho(\varphi)$; $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$, i slično kao u prethodnom primeru uzimajući u obzir simetriju, **(sl.144)**.



sl 143 sl 144

i to da je $\sin\theta < 0$, dobijamo

$$V = \frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\rho'(\theta)\right)^3|\sin\theta|d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\left|\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\varphi.$$

Smenom $\varphi - \frac{\pi}{4} = -t$, dobijamo

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\right)^{\frac{3}{2}}|\sin(-t)|dt = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^{\frac{3}{2}}\sin t\,dt$$

$$= \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} t \sin^{\frac{5}{2}} t d(\sin t) = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}\int_0^1 z^{\frac{5}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{4}} dz.$$

Posle smene $\frac{1}{z^2} - 1 = u^4$ nalazimo da je $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^3 I$, gde je

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u^4 du}{(1+u^4)^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u^6 du}{(1+u^4)^3}$$

(prema rešenju primera 258). Parcijalnom integracijom nalazimo da je

$$I = -\frac{1}{8}\frac{u^3}{(1+u^4)^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^4)^2} = \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^4)^2}.$$

Uzimajući u obzir da je $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^4)^2} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$ (primer 258) konačno imamo

$$I = \frac{3\pi}{64\sqrt{2}}, \quad V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^3 \cdot I = \frac{\pi^2 a^3}{4}. \quad ▶$$

318. Naći zapreminu tela koje se dobija rotacijom Arhimedove spirale $\rho = a\varphi$; $a > 0; 0 \le \varphi \le \pi$ oko polarne ose.

◀

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} \varphi^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \left(\varphi^3 \cos\varphi\,\Big|_{\pi}^{0} + 3\int_0^{\pi} \varphi^2 \cos\varphi d\varphi\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3 \left(\pi^3 + 3\left(\varphi^2 \sin\varphi\,\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \varphi \sin\varphi d\varphi\right)\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3 \left(\pi^3 - 6\left(\varphi \cos\varphi\,\Big|_{\pi}^{0} + \int_0^{\pi} \cos\varphi d\varphi\right)\right) = \frac{2}{3}\pi a^3(\pi^3 - 6\pi) \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 a^3(\pi^2 - 6). \end{aligned}$$

Primenjena je formula iz zadatka 315. ▶

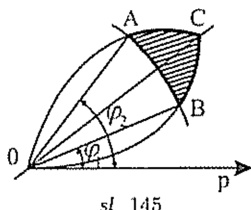
319. Naći zapreminu tela koje se dobija rotacijom ravne figure ograničene linijama $\varphi = \pi\rho^3$, $\varphi = \pi$, oko polarne ose.

◀ Prema navedenoj formuli je

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} \rho^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3}. \ ▶$$

320. Izračunati zapreminu tela koje se dobija rotacijom figure $a \le \rho \le a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ oko polarne ose.

◀ Nađimo najpre vrednosti φ za koje se lemniskata $\rho = a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ i kružnica $\rho = a$ seku (sl.145) .



sl. 145

Na slici je dat samo jedan deo figure koji je simetričan u odnosu na polupravu $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Za nalaženje navedenih vrednosti φ treba rešiti jednačinu $a = a\sqrt{2\sin 2\varphi}$; njena rešenja su $\varphi_1 = \frac{\pi}{12}; \varphi_2 = \frac{5\pi}{12}$. Jasno je da treba naći dvostruku zapreminu tela koje se dobija rotacijom figure ACB oko polarne ose.Tražena zapremina jednaka je dvostrukoj razlici zapremina tela koja se redom dobijaju rotacijom figure $OACB$ i OAB oko polarne ose. Označimo njihove zapremine respektivno slovima V_1 i V_2. Dakle, $V = 2(V_1 - V_2)$, gde je

$$V_1 = \frac{2\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (2\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi;$$

$$V_2 = \frac{2\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}.$$

U integralu za nalaženje zapremine V_1, uvođenjem smene $\sin\varphi = z$, i posle primenom parcijalnog integraljenja sledi

$$V_1 = \frac{2\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (2\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi = \frac{16\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sin^{\frac{5}{2}}\varphi \cos^{\frac{1}{2}}\varphi d(\sin\varphi)$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} z^{\frac{5}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{4}}dz = \frac{32\pi a^3}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \frac{u^4du}{(1+u^4)^3}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{u}{(1+u^4)^2}\Big|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} + \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{(1+u^4)^2}\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^3}-\frac{1}{(\sqrt{3}+1)^3}\right) - \frac{u}{4(1+u^4)}\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}\right.$$

$$\left. + \arctan\frac{u^2-1}{u\sqrt{2}}\Big|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} + \frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{u^2-u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1}\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^3}-\frac{1}{(\sqrt{3}+1)^3}-\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8\sqrt{2}}(\arctan 1-\arctan(-1)) + \frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{2}{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{3\pi}{16\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}+\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Konačno imamo

$$V = 2\,(V_1-V_2) = \frac{2\pi^2a^3}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi^2a^3}{2\sqrt{2}}.\ \blacktriangleright$$

4.8 Izračunavanje površine obrtnog tela

Površina površi koja se dobija rotacijom glatke krive AB oko ose Ox, jednaka je $P = 2\pi\int\limits_A^B |y|dl$, gde je dl diferencijal luka.

1^0 Rešeni zadaci.

Naći površinu površi, koja se dobija rotacijom sledećih krivih:

321. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(0 \le x \le a)$, oko ose Ox.

◀ Pošto je

$$dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = \sqrt{1+\frac{9x}{4a}}dx,$$

to je

$$P = 2\pi \int\limits_0^a y(x)\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\int\limits_0^a x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}dx.$$

Integral predstavimo u obliku zbira dva integrala, od kojih se svaki lako računa. Imamo,

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\int\limits_0^a x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}dx \\ &= \frac{3\pi}{a}\int\limits_0^a x\sqrt{\left(x+\frac{2a}{9}\right)^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}d\left(x+\frac{2a}{9}\right). \end{aligned}$$

Uvedeći smenu $x+\frac{2a}{9}=t$, dobijamo

$$\begin{aligned} P &= \frac{3\pi}{a}\int\limits_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}}\left(t-\frac{2a}{9}\right)\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}dt \\ &= \frac{3\pi}{a}\int\limits_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}} t\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}dt - \frac{2\pi}{3}\int\limits_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}}\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}dt \\ &= \frac{\pi}{a}\left(t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}} \\ &\quad -\frac{\pi}{3}\left(t\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}-\left(\frac{2a}{9}\right)^2\ln\left(t+\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}\right)\right)\Bigg|_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}} \\ &= \frac{13\sqrt{13}\pi a^2}{27}-\frac{\pi}{3}\left(\frac{11\sqrt{13}a^2}{27}-\frac{4a^2}{81}\ln\frac{\frac{11a}{9}+\frac{a\sqrt{13}}{3}}{\frac{2a}{9}}\right) \\ &= \frac{\pi a^2}{27}\left(13\sqrt{13}-\frac{11\sqrt{13}}{13}+\frac{4}{9}\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right) \\ &= \frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right). \end{aligned}$$

Koristeći jednakost $\frac{11+3\sqrt{13}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2$ konačno dobijamo:

$$P = \frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13} + 2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right). \;\blacktriangleright$$

Napomena. Površina obrtne površi se mogla izračunati i pomoću nesvojstvenog integrala uvođenjem smene $\frac{1}{x} + \frac{9}{4a} = t^2$.

322. $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}$ $(|x| \le b)$ oko ose Ox.

◀ Očigledno je

$$\begin{aligned}
dl &= \sqrt{1 + \left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}dx;\\
P &= 2\pi\int_{-b}^{b} a\cos\frac{\pi x}{2b}\sqrt{1 + \left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}dx\\
&= \frac{16b^2}{\pi}\int_0^b\sqrt{1 + \left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}d\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)\\
&= \frac{8b^2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}\right)\\
&\quad + \frac{8b^2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b} + \sqrt{1 + \left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}\right)\Bigg|_0^b\\
&= 2a\sqrt{\pi^2a^2 + 4b^2} + \frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a + \sqrt{\pi^2a^2 + 4b^2}}{2b}. \;\blacktriangleright
\end{aligned}$$

323. $y = \tan x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$; oko ose Ox.

◀ Prema već poznatoj formuli je:

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}}dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\cdot\sqrt{(1+\tan^2 x)^2 + 1}}{\cos^2 x(1+\tan^2 x)}dx\\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{(1+\tan^2 x)^2+1}}{1+\tan^2 x}d(1+\tan^2 x) = \pi\int_1^2\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}dz\\
&= \pi\int_1^2\frac{(1+z^2)dz}{z\sqrt{1+z^2}} = \pi\left(\int_1^2\frac{dz}{z^2\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} + \int_1^2\frac{zdz}{\sqrt{1+z^2}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \pi\left(\int_0^1 \frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} + \sqrt{1+z^2}\,\Big|_1^2\right) = \pi\left(\ln\left(\frac{1}{z}+\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}\right)\Big|_2^1 + \sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$$

$$= \pi\left(\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) + \ln\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right). \ \blacktriangleright$$

324. $y^2 = 2px, 0 \le x \le x_0$: a) oko ose Ox; b) oko ose Oy.

◀ a) Diferenciranjem imamo $2yy' = 2p$, odakle je $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$;

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^{x_0}\sqrt{p+2x}dx \\ &= 2\pi\sqrt{p}\int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+2x_0}} z^2dz = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}z^3\Big|_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+2x_0}} = \\ &= \frac{2\pi}{3}\left((p+2x_0)\sqrt{p^2+2px_0}-p^2\right). \end{aligned}$$

b) Uzimajući u obzir simetriju date krive u odnosu na osu Ox imamo

$$\begin{aligned} P &= 4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}} x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}dy = \frac{2\pi}{p}\int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy \\ &= \frac{2\pi}{p^2}\int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2\sqrt{p^2+y^2}dy \\ &= \frac{2\pi}{p^2}\left(\frac{y\left(p^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{p^2}{8}\left(y\sqrt{p^2+y^2}+p^2\ln\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)\right)\right)\Big|_0^{\sqrt{2px_0}}. \end{aligned}$$

Zamenjivanjem gornje i donje granice i sređivanjem izraza dobijenog primenom Njutn-Lajbnicove formule imamo:

$$P = \frac{\pi}{4}\left((p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)} - p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right).$$

Napomena: Integral $\int y^2\sqrt{p^2+y^2}dy$ se izračunava parcijalnim integraljenjem: $u=y$; $dv = y\sqrt{p^2+y^2}dy$. ▶

325. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b \le a)$: a) oko ose Ox; b) oko ose Oy.

◀ a) Uzimajući parametarske jednačine elipse: $x = a\cos t$; $y = b\sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$, imamo

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt.$$

S obzirom na simetričnost krive u odnosu na osu Oy sledi

$$\begin{aligned} P &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)dl(t) = 4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}dt \\ &= 4\pi b\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}d(\cos t) = 4\pi abe\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - z^2}dz, \end{aligned}$$

gde je $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ekscentricitet elipse. Stavljajući u poslednjem integralu $z = \frac{\sin u}{\varepsilon}$, dobijamo

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\int_0^{\arcsin\varepsilon} \cos^2 u du = \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\cdot\left(\arcsin\varepsilon + \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}\right) \\ &= \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\left(\arcsin\varepsilon + \varepsilon\frac{b}{a}\right) = 2\pi b^2 + 2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

b) Slično prethodnome dobijamo

$$\begin{aligned} P &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)dl(t) = 4\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}d(\sin t) \\ &= 4\pi a\int_0^1 \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)z^2}dz = 4\pi a^2\varepsilon\int_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + z^2}dz \\ &= 4\pi a^2\varepsilon\int_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{a^2\varepsilon^2} + z^2}dz \\ &= 2\pi a^2\varepsilon\left(z\sqrt{\frac{b^2}{a^2\varepsilon^2} + z^2} + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2}\ln\left(z + \sqrt{\frac{b^2}{a^2\varepsilon^2} + z^2}\right)\right)\Big|_0^1 \\ &= 2\pi a^2\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2\varepsilon^2} + 1} + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2}\ln\frac{1 + \sqrt{\frac{b^2}{a^2\varepsilon^2} + 1}}{\frac{b}{a\varepsilon}}\right) \end{aligned}$$

$$= 2\pi a^2\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{b^2}{a^2\varepsilon^2}\ln\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right) = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left(\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right). \blacktriangleright$$

326. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b\geq a)$ oko ose Ox.

◀ Data kriva (**kružnica**) je simetrična u odnosu na pravu $y=b$; jednačina gornjeg dela kružnice je $y_B=b+\sqrt{a^2-x^2}$, a jednačina donjeg dela je $y_H=b-\sqrt{a^2-x^2}$. Površina obrtne površi se onda dobija kao $P=P_1+P_2$, gde je

$$P_1 = 2\pi\int_{-a}^{a} y_B\sqrt{1+\left(y_B'(x)\right)^2}dx,\ P_2 = 2\pi\int_{-a}^{a} y_H\sqrt{1+\left(y_H'(x)\right)^2}dx.$$

Očigledno je

$$P = 4\pi b\int_{-a}^{a} dl(x),$$

gde je

$$dl(x) = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx = \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8\pi ab\int_0^a dz = 4\pi^2 ab.$$

Napomena: Mogli smo uzeti $dl=ad\varphi$; $0\leq\varphi\leq\pi$. ▶

327. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; oko ose Ox.

◀ Parametarske jednačine astroide imaju oblik: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leq t\leq 2\pi)$; onda je $dl=3a|\sin t\cos t|dt$. Uzimajući u obzir simetričnost krive u odnosu na obe koordinatne ose, imamo

$$\begin{aligned} P &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)dl(t) = 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t d(\sin t) \\ &= \frac{12}{5}\pi a^2\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

328. $y=a\cosh\frac{x}{a}$, $|x|\leq b$: a) oko ose Ox; b) oko ose Oy.

◀ a) Očigledno je

$$P_x = 2\pi a\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\cosh\frac{x}{a}dx = 4\pi a\int_0^b\cosh^2\frac{x}{a}dx$$

$$= 2\pi a \int_0^b \left(1 + \cosh\frac{2x}{a}\right) dx = 2\pi a\left(b + \frac{a}{2}\sinh\frac{2b}{a}\right)$$
$$= \pi a\left(2b + a\sinh\frac{2b}{a}\right).$$

b) Iz jednačine $\frac{2y}{a} = e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}$, sledi $x = a\ln\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}$; $a \le y \le \cosh\frac{b}{a}$; $x'(y) = \frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}}$; $dl = \sqrt{1+(x'(y))^2}dy = \frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}}$;

$$\begin{aligned}
P_y &= 2\pi a \int_a^{a\cosh\frac{b}{a}} \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}} \ln\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a} dy \\
&= 2\pi a\left(\sqrt{y^2-a^2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\Big|_a^{a\cosh\frac{b}{a}} - \int_a^{\cosh\frac{b}{a}} dy\right) \\
&= 2\pi a\left(a\sinh\frac{b}{a}\cdot\ln\frac{a\cosh\frac{b}{a} + a\sinh\frac{b}{a}}{a} - a\cosh\frac{b}{a} + a\right) \\
&= 2\pi a\left(a + b\sinh\frac{b}{a} - a\cosh\frac{b}{a}\right). \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

329. $\pm x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$, oko ose Ox.

◀ Iz jednačine krive se vidi da je dovoljno naći površinu tela koje se dobija rotacijom jedne grane simetrične krive u odnosu na osu Oy i dobijeni rezultat udvostručiti. Zatim $x \to \infty$ kad $y \to 0$, i $x \to a$ kad $y \to a$, promenljiva integraljenja je y. S obzirom da $x \in]0, +\infty[$ onda imamo da negativnom priraštaju promenljive x odgovara pozitivan priraštaj promenljive y, tj.

$$dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = -\sqrt{1+(x'(y))^2}dy = -\frac{ady}{y}.$$

Dakle,

$$P = -4\pi a\int_a^0 y\sqrt{1+(x'(y))^2}dy = 4\pi a\int_0^a dy = 4\pi a^2. \ \blacktriangleright$$

330. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t), 0 \le t \le 2\pi$: a) oko ose Ox; b) oko ose Oy; c) oko prave $y = 2a$.

◀ a)

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt,\ y = 2a\sin^2\frac{t}{2};$$

$$P_x = 2\pi\int_0^{2\pi} y(t)dl(t) = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 z dz$$

$$= 32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 z dz = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

b) Diferencilal luka ostaje isti, samo se u formuli za površinu $y(t)$ zameni sa $x(t)$:

$$P_y = 2\pi\int_0^{2\pi} x(t)dl(t) = 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{\pi}(2z-\sin 2z)\sin z dz$$

$$= 8\pi a^2\left(2\left(z\cos z\,|_{\pi}^{0} + \int_0^{\pi}\cos z dz\right) - 2\int_0^{\pi}\sin^2 z d(\sin z)\right) = 16\pi^2 a^2.$$

c) Prelaskom na nove koordinate $x_1 = x$, $y_1 = y - 2a$ i uzimajući u obzir da je kriva simetrična u odnosu na pravu $x_1 = a\pi$, a takođe i to da je $y_1 \le 0$, imamo

$$P = 4\pi\int_0^{\pi}|y_1|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = 8\pi a^2\int_0^{\pi}|-\cos t - 1|\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = 32\pi a^2\int_{\pi}^{0}\cos^2\frac{t}{2}d\left(\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^2\cos^2\frac{t}{2}\,|_{\pi}^{0} = \frac{32\pi a^2}{3}.$$ ▶

331. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; oko prave $y = x$.

◀ Prelaskom na novi koordinatni sistem x_1, y_1 po formulama

$$x = x_1\cos\frac{\pi}{4} - y_1\sin\frac{\pi}{4}$$
$$y = x_1\sin\frac{\pi}{4} + y_1\cos\frac{\pi}{4}$$

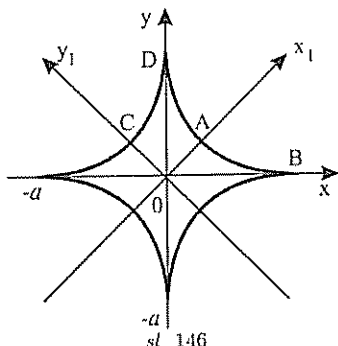
odakle sledi

$$x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \; y_1 = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

Treba dakle naći površinu figure dobijene rotacijom krive

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sin^3 t + \cos^3 t\right), \; y_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sin^3 t - \cos^3 t\right)$$

oko ose Ox_1 (**sl.146**).



sl 146

Imamo $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = 3a|\sin t \cos t|dt$; Zatim je tražena površina jednaka dvostrukoj površini tela koje se dobija rotacijom delova AB i CD date krive oko ose Ox_1 :

$$P = 4\pi\left(\int\limits_A^B |y_1|dl + \int\limits_C^D y_1 dl\right)$$

Primetimo da je $y_1 \leq 0$, kad $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Vodeći računa o znaku parametra t dobijamo

$$\begin{aligned}
P &= \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3 t - \sin^3 t)\sin t \cos t dt - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin^3 t - \cos^3 t)\sin t \cos t dt\right) \\
&= 6\sqrt{2}\pi a^2\left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0}(\cos^4 t d(\cos t) + \sin^4 t d(\sin t)) - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin^4 t d(\sin t) + \cos^4 t d(\cos t))\right) \\
&= \frac{6\sqrt{2}\pi a^2}{5}\left((\cos^5 t + \sin^5 t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} + (\cos^5 t + \sin^5 t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{6\sqrt{2}\pi a^2}{5}\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi a^2}{5}\left(4\sqrt{2} - 1\right). \; \blacktriangleright
\end{aligned}$$

332. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ oko polarne ose.

◀ Pošto je

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi \ (0 \le \varphi \le \pi); \\ y &= a(1+\cos\varphi)\sin\varphi = 4a\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}, \text{ to je} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\int_0^\pi y(\varphi)dl(\varphi) = 16\pi a^2\int_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi \\ &= 32\pi a^2\int_\pi^0 \cos^4\frac{\varphi}{2}d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_\pi^0 = \frac{32}{5}\pi a^2. \ ▶ \end{aligned}$$

333. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$: **a)** oko polarne ose; **b)** oko ose $\varphi = \frac{\pi}{2}$; **c)** oko ose $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

◀ a) Očigledno je

$P = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi.$

S obzirom da je

$$\begin{aligned} \rho\sin\varphi &= a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi; \ \rho'(\varphi) = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}; \\ \rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2 &= \frac{a^2}{\cos 2\varphi}, \end{aligned}$$

dobijamo

$P = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi = 4\pi a^2\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 = 2\pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right).$

b) Slično primeru pod a) imamo

$$P = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi d\varphi = 2\sqrt{2}\pi a^2.$$

c) Isto, kao kod rešavanja primera 317)c) uzmimo polupravu $\varphi = \frac{\pi}{4}$ za polarnu osu sistema $\rho_1(\theta), \theta$; tada je $\rho_1(\theta) = \rho(\varphi)$, $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$; $P = P_1 + P_2$,

polarnu osu sistema $\rho_1(\theta), \theta$; tada je $\rho_1(\theta) = \rho(\varphi)$, $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$; $P = P_1 + P_2$, gde je

$$P_1 = 4\pi \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=-\frac{\pi}{4}} \rho_1(\theta)|\sin\theta|\sqrt{\rho_1^2(\theta) + (\rho_1'(\theta))^2}d\theta,$$

$$P_2 = 4\pi \int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=0} \rho_1(\theta)|\sin\theta|\sqrt{\rho_1^2(\theta) + (\rho_1'(\theta))^2}d\theta$$

Koristeći simetriju krive i to da je u koordinatnom sistemu $\rho_1, \theta : \sin\theta < 0$, ako je $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. Prelaskom na $\rho(\varphi)$ i φ, dobijamo

$$\begin{aligned} P_1 &= 4\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sqrt{\cos 2\varphi}\left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \\ &= 4\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| d\varphi = 4\pi a^2 \int_{0}^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi \\ &= 4\pi a^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = 2\pi a^2\sqrt{2}; \\ P_2 &= 4\pi a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| d\varphi = 4\pi a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi \\ &= 4\pi a^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 4\pi a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Konačno dobijamo

$$P = 2\pi a^2\sqrt{2} + 2\pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right) = 4\pi a^2. \ \blacktriangleright$$

334. Ravna figura ograničena parabolom $ay = a^2 - x^2$ i pravom $y = 0$, rotira oko ose Ox. Naći odnos površina rotacione površi i sfere čija je zapremina jednaka zapremini rotacionog tela.

◀ Najpre nalazimo zapreminu rotacionog tela:

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \frac{\pi}{a^2} \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)^2 dx = \frac{16}{15}\pi a^3.$$

Iz jednakosti $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16}{15}\pi a^3$; nalazimo da je $R = a\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$. Parametarske jednačine polukružnice poluprečnika R onda glase: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$: $0 \le \varphi \le \pi$, a diferencijal luka je $dl = Rd\varphi$. Zato je površina sfere:

$$P = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Izračunajmo sada površinu rotacione površi:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{a^2 - x^2}{a}\sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2}} = \frac{8\pi}{a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2 dx} \\
&= 8\pi \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2 dx} - \frac{8\pi}{a^2}\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2 dx} = I_1 - I_2 \\
I_1 &= 4\pi \left(x\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} + \frac{a^2}{4}\ln\left(x + \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2 dx}\right)\right) \Big|_0^a \\
&= 2\pi a^2 \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right). \\
I_2 &= \frac{8\pi}{a^2}\left(\frac{x}{4}\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{32}\left(x\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{4}\ln\left(x + \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}\right)\right)\right) \Big|_0^a \\
&= \frac{\pi a^2}{8}\left(9\sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right).
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi a^2 \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right) - \frac{\pi a^2}{8}\left(9\sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right) \\
&= \frac{\pi a^2}{16}\left(14\sqrt{5} + 17\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right).
\end{aligned}$$

tj. odnos površina je

$$\frac{P_1}{P} = \frac{14\sqrt{5} + 17\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)}{64\sqrt[3]{\frac{16}{25}}} = \frac{5\left(14\sqrt{5} + 17\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right)}{128\sqrt[3]{10}}. \quad \blacktriangleright$$

335. Figura ograničena parabolom $y^2 = 2px$ i pravom $x = \frac{p}{2}$, rotira oko prave $y = p$. Naći zapreminu i površinu rotacionog tela.

◀ Prelaskom na novi sistem po formulama $x_1 = x$, $y_1 = y - p$; tražena zapremina jednaka je

$$V = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left(-\sqrt{2px} - p\right)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\sqrt{2px} - p\right)^2 dx$$
$$= 4\sqrt{2}\pi p^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{x} dx = \frac{8}{3}\pi\sqrt{2}p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{4}{3}\pi p^3.$$

Uzimajući u obzir, kao i kod nalaženja zapremine, dvoznačnost krive, imamo

$$P = 2\pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left|-\sqrt{2px} - p\right| \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx + 2\pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left|\sqrt{2px} - p\right| \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{p}{2}} 2p\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2\sqrt{2}\pi p \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{p + 2x}}{\sqrt{x}} dx$$
$$= 4\pi p \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{p + 2x} d\left(\sqrt{2x}\right) = 4\pi p \int_0^{\sqrt{p}} \sqrt{p + t^2} dt$$
$$= 2\pi p \left(t\sqrt{p + t^2} + p\ln\left(t + \sqrt{p + t^2}\right)\right) \Big|_0^{\sqrt{p}}$$
$$= 2\pi p^2 \left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$$

Za izračunavanje površine kompletne površi dobijenom rezultatu treba dodati površinu kruga poluprečnika $2p$, tj. broj $4\pi p^2$:

$$P_{kompl} = 2\pi p^2 \left(\left(2 + \sqrt{2}\right) + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right). \ ▶$$

4.9 Opšta shema primene određenog integrala

1^0 Ako svakom razmaku $[\alpha, \beta]$ koji je sadržan u datom segmentu $[a, b]$, odgovara vrednost određena fizičkom ili geometrijskom veličinom P, onda se P naziva funkcijom razmaka $[\alpha, \beta]$ i označava se sa $P([\alpha, \beta])$ (na primer ako je f neprekidna i nenegativna funkcija na $[a, b]$, onda svakom $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ odgovara veličina $F([\alpha, \beta])$površine krivolinijskog trapeza, ograničenog krivom $y = f(x)$, pravama $x = \alpha$ i $x = \beta$ i x osom.

Funkcija razmaka $P([\alpha,\beta])$ je aditivna, ako je za $\alpha < \gamma < \beta$ ispunjeno:

$$P([\alpha,\beta]) = P([\alpha,\gamma]) + P([\gamma,\beta]).$$

Pomenuta veličina $F([\alpha,\beta])$ površine krivolinijskog trapeza je primer aditivne funkcije razmaka.

Neka je $P([\alpha,\beta])$ aditivna funkcija razmaka i neka je na fiksiranom segmentu $[a,b]$ definisana neprekidna funkcija $p(x)$, takva da je

$$P([x,x+\Delta x]) = p(x)\Delta x + \rho([x,x+\Delta x]),$$

gde je za funkciju $\rho([x,x+\Delta x])$ ispunjeno

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\rho([x,x+\Delta x])}{\Delta x} = 0, \text{ tj.}$$

$$\left(\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : 0 < \Delta x < \delta \Rightarrow \left|\frac{\rho([x,x+\Delta x])}{\Delta x}\right| < \varepsilon\right).$$

Tada je

$$P([a,b]) = \int_a^b p(x)dx \qquad (1)$$

Dakle, ako je sa tačnošću do beskonačno male višeg reda u poređenju sa Δx, ustanovljena približna jednakost

$$P([x,x+\Delta x]) \approx p(x)\Delta x,$$

onda se veličina $P([a,b])$ nalazi po formuli (1). U tome se i sastoji **opšta shema primene određenog integrala.**

2^0 Neka je $\{M_j\}$ sistem materijalnih tačaka sa masama m_j respektivno $(j = 1,2,\ldots,n)$, koje pripadaju istoj ravni i neka su y_j redom ordinate tačaka M_j. Veličina

$$M_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j$$

se naziva **statičkim momentom** tog sistema tačaka u odnosu na Ox osu, a veličina

$$I_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j^2$$

se zove **moment inercije** tog sistema u odnosu na osu Ox.

Pretpostavimo da je duž proizvoljne glatke krive $y = f(x)$ ravnomerno

raspoređena masa sa linearnom gustinom $\mu \equiv 1$. Tada se **statičkim momentom** luka krive (za $a \leq x \leq b$) u odnosu na koordinatne ose nazivaju veličine

$$M_x = \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx \text{ i } M_y = \int_a^b x\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

a **momentima inercije** luka krive u odnosu na koordinatne ose veličine

$$I_x = \int_a^b y^2(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx \text{ i } I_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

Koordinate težišta homogene krive $y = f(x)$ (sa ravnomerno raspoređenom masom, linearne gustine $\mu \equiv 1$) izračunavaju se po formulama

$$\xi = \frac{M_y}{L},\ \eta = \frac{M_x}{L},$$

gde je L dužina krive $y = f(x)$; $(a \leq x \leq b)$.

Pretpostavimo da osa Ox ne seče krivu. Množeći levu i desnu stranu jednakosti $|\eta|L = |M_x|$ sa 2π dobija se **prva Guldinova teorema** o površini obrtne površi.

Ako je razmatrani luk simetričan u odnosu na neku pravu, onda se težište luka nalazi na toj pravoj.

3^0 **Statičkim momentima** homogenog krivolinijskog trapeza $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $a \leq x \leq b$ (sa ravnomerno raspoređenom masom, površinske gustine $\mu(x, y) \equiv 1$) u odnosu na koordinatne ose nazivaju se veličine

$$M_x = \frac{sgn f(x)}{2}\int_a^b f^2(x)dx \text{ i } M_y = sgn f(x)\int_a^b xf(x)dx,$$

a **momentima inercije** tog trapeza u odnosu na koordinatne ose veličine

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^2(x)|f(x)|dx \text{ i } I_y = \int_a^b x^2|f(x)|dx,$$

pod uslovom da kriva ne seče osu Ox.

Koordinate težišta homogenog krivolinijskog trapeza izračunavaju se po formulama:

$$\xi = \frac{M_y}{S},\ \eta = \frac{M_x}{S},$$

gde je S površina trapeza.

Pretpostavimo da osa Ox ne seče krivolinijski trapez. Množeći levi i desni deo jednakosti

$$|\eta|S = |M_x|$$

sa 2π, dobija se **druga Guldinova teorema** o zapremini obrtnog tela.

Ako ravna figura ima osu simetrije onda se težište nalazi na toj osi.

4^0 **Rešeni zadaci.**

336. Naći statički moment i moment inercije luka polukružnice poluprečnika a u odnosu na prečnik koji prolazi kroz krajeve tog luka.

◀ Neka je dl luk kružnice koji odgovara centralnom uglu $d\varphi$; tada je $dl = a d\varphi$. Pod rastojanjem luka dl od prečnika podrazumeva se veličina

$$r^{\star} = \sup \{r_D\},$$

gde je $\{r_D\}$ skup rastojanja svih tačaka luka dl od prečnika. Sa tačnošću do beskonačno male istog reda kao $d\varphi$, imamo

$$r^{\star} = r_D(\varphi) = a\sin\varphi, \ \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 + d\varphi, \ 0 < \varphi_0 < \pi.$$

Statički moment i moment inercije elementa dl (sa tačnošću do beskonačno male višeg reda nego $d\varphi$) su respektivno jednaki

$$dM_D = a^2 \sin\varphi d\varphi, \ \text{i} \ dI_D = a^3 \sin^2\varphi d\varphi.$$

Sada prema opštoj shemi primene određenog integrala imamo

$$M_D = a^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 2a^2; \ I_D = a^3 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{2}. \ ▶$$

337. Naći statički moment luka parabole $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le \frac{p}{2})$ u odnosu na pravu $x = \frac{p}{2}$.

◀ Neka je x apscisa tačke $M(x, y)$ koja pripada luku dl; tada je (sa tačnošću do beskonačno male višeg reda nego dx)

$$dM_{\frac{p}{2}} = \left(\frac{p}{2} - x\right) dl = \left(\frac{p}{2} - x\right) \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

Primenjujući opštu shemu kao u prethodnom zadatku dobijamo

$$M_{\frac{p}{2}} = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2} - x\right) \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}dx$$

$$= \int_0^{\frac{p}{2}} \left(p - \left(\sqrt{2x}\right)^2\right) \sqrt{p + \left(\sqrt{2x}\right)^2} d\left(\sqrt{2x}\right)$$

$$= \int_0^{\sqrt{2p}} (p - z^2)\sqrt{p + z^2} dz$$

$$= \left(\frac{z}{4}\sqrt{p + z^2}\left(\frac{5p}{2} - (p + z^2)\right) + \frac{5}{8}p^2 \ln\left(z + \sqrt{p + z^2}\right)\right)\Big|_0^{\sqrt{p}}$$

$$= \frac{p^2}{8}\left(\sqrt{2} + 5\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$$

Korišćen je rezultat zadatka 324,b). ►

338. Naći statički moment i moment inercije homogene trougaone ploče osnovice b i visine h koja odgovara osnovici.

◄ Segment sa krajevima na kracima trougla, paralelno osnovici na rastojanju x $(0 < x < h)$ od nje, ima dužinu $d = b\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Posmatrajmo sada horizontalnu ravnu traku širine dx, paralelno osnovici trougla, uzimajući je približno za pravougaonik sa stranicama dužina d i dx. Sa tačnošću do beskonačno male višeg reda nego dx, dobijamo da je njena površina jednaka $b\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx$, a njen statički moment i moment inercije u odnosu na osnovicu trougla su redom jednaki

$$dM = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx \text{ i } dI = bx^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx.$$

Prema opštoj shemi primene određenog integrala, dobijamo

$$M = b\int_0^h x\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx = \frac{bh^2}{6},$$

$$I = b\int_0^h x^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx = \frac{bh^3}{12}. \quad ►$$

339. Naći momente inercije I_x i I_y u odnosu na ose Ox i Oy paraboličkog segmenta, ograničenog krivama $ay = 2ax - x^2 (a > 0)$ i $y = 0$. Koliki su poluprečnici inercija r_x i r_y tj. veličine definisane jednakostima: $I_x = Sr_x^2$, $I_y = Sr_y^2$, gde je S površina segmenta?

◄ Prema formuli $\mathbf{3^0}$ imamo

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^{2a} y^3 dx = \frac{1}{3a^3}\int_0^{2a} \left(2ax - x^2\right)^3 dx = \frac{32a^4}{105};$$

$$I_y = \int_0^{2a} x^2 y dx = \int_0^{2a} x^2 \left(2x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{8}{5}a^4.$$

Pošto je

$$S = \int_0^{2a} \left(2x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{4}{3}a^2, \text{ to je}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} = 2a\sqrt{\frac{2}{35}}; \; r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} = a\sqrt{\frac{6}{5}}. \; ▶$$

340. Naći momente inercije homogene eliptičke ploče sa poluosama a i b u odnosu na njene glavne ose.

◀ Glavne ose ploče su koordinatne ose. Zapišimo parametarske jednačine elipse u obliku:

$$x = a\sin t;$$
$$y = b\cos t;$$

gde $t \in [0, 2\pi]$; onda pri promeni parametra t od 0 do $\frac{\pi}{2}$ sledi da x raste od 0 do a. Zbog simetričnosti ploče u odnosu na obe ose, dovoljno je naći momente inercije četvrtine ploče i rezultat učetvorostručiti. Dakle,

$$I_x = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^3(t)dx(t) = \frac{4}{3}ab^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 tdt = \frac{\pi ab^3}{4};$$

$$I_y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)y(t)dx(t) = a^3 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt = \frac{\pi a^3 b}{4}. \; ▶$$

341. Odrediti statički moment i moment inercije homogenog kružnog konusa poluprečnika osnove r i visine h u odnosu na ravan osnove toga konusa.

◀ Normalni presek ravni paralelno osnovi konusa na rastojanju x $(0 < x < h)$ od osnove je krug, čiji se poluprečnik y nalazi iz očigledne jednakosti

$$\frac{y}{r} = 1 - \frac{x}{h}.$$

Telo ograničeno konusnom površi i dvema ravnima paralelno osnovi konusa na rastojanju x i $x+dx$ od osnove uzimamo približno za cilindar, poluprečnika

osnove y; njegova zapremina (sa tačnošću do beskonačno male višeg reda nego dx) jednaka je

$$\pi r^2 \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx,$$

a statički moment i moment inercije su redom jednaki

$$dM = \pi r^2 x \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx, \; dI = \pi r^2 x^2 \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx.$$

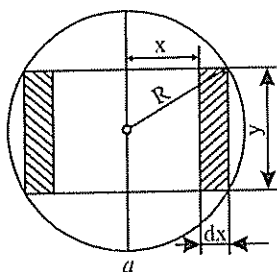
Integraleći po x u granicama od 0 do h, dobijamo

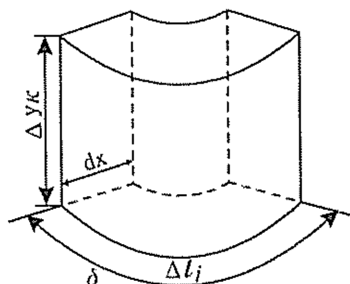
$$M = \pi r^2 \int_0^h x \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^2}{12};$$

$$I = \pi r^2 \int_0^h x^2 \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^3}{30}. \; \blacktriangleright$$

342. Naći moment inercije homogene sfere poluprečnika R i mase M u odnosu na njen prečnik.

◀ Razmotrimo prav kružni cilindar debljine dx i visine y koji je upisan u sferu. Prečnik sfere je osa simetrije cilindra. Neka je unutrašnji poluprečnik cilindra x (**sl.147,a**).





sl 147

Izračunajmo približno moment inercije cilindra u odnosu na prečnik sfere. U tom cilju izrežimo cilindar meridijanskim ravnima i ravnima paralelnim osnovama cilindra na elementarne delove čije su dimenzije $dx, \Delta\, y_k, \Delta\, l_i$ (**sl.147,b**). Smatrajući takav deo paralelopipedom zapremine $dx \cdot \Delta\, y_k\, \Delta\, l_i$, izračunajmo približno njegov moment inercije u odnosu na prečnik sfere; dobijamo da je on jednak $x^2 dx\, \Delta\, y_k\, \Delta\, l_i$. Sumirajući po svim i, a zatim po svim k, dobijamo da je približno (sa tačnošću do dx^2) vrednost dI momenta inercije cilindra u odnosu na prečnik sfere jednaka $2\pi x^3 y dx$ ($\sum \Delta\, l_i =$

$2\pi(x+dx) \approx 2\pi x$). Na osnovu opšte sheme primene određenog integrala, nalazimo (uzimamo u obzir da je $y \approx 2\sqrt{R^2-x^2}$)

$$\begin{aligned} I &= 4\pi \int_0^R x^3\sqrt{R^2-x^2}dx = 4\pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\varphi d\varphi \\ &= 4\pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\varphi - \sin^5\varphi\right) d\varphi = \frac{8\pi R^5}{15} = \frac{2}{5}MR^2, \end{aligned}$$

gde je M masa sfere. ▶

343. Odrediti koordinate težišta kružnog luka $x = a\cos\varphi$; $y = a\sin\varphi$ ($|\varphi| \le \alpha \le \pi$).

◀ Luk je simetričan u odnosu na osu Ox i zato se težište $C(\xi,\eta)$ nalazi na toj osi. Nađimo dužinu krive i njen statički moment u odnosu na osu Oy:

$$L = a\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = 2\pi\alpha;\ M_y = a^2\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi = 2a^2\sin\alpha.$$

$$\text{Sada je } \xi = \frac{M_y}{L} = a\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Dakle, $C(\xi,\eta) = C\left(a\frac{\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$. ▶

344. Naći koordinate težišta oblasti ograničene parabolama $ax = y^2$; $ay = x^2 (a > 0)$.

◀ Težište se očigledno nalazi na pravoj $y = x$ ($x > 0$). Zato imamo

$$M_y = \int_0^a x\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{3a^3}{20};\ S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{a^2}{3},$$

$$\text{odakle sledi } \xi = \frac{M_y}{S} = \frac{9a}{20},\ \eta = \frac{9a}{20}. \ ▶$$

345. Odrediti koordinate težišta oblasti

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\ (0 \le x \le a, 0 \le y \le b).$$

◀ Parametarske jednačine četvrtine elipse su

$$\begin{aligned} x &= a\sin t \\ y &= b\cos t, \end{aligned}$$

gde $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Tada je

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(t)dx(t) = \frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \frac{ab^2}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{ab^2}{3}; \\ M_y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y(t)dx(t) = a^2 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t dt = \frac{a^2 b}{3}. \end{aligned}$$

Pošto je

$$S = \frac{\pi ab}{4}, \text{ to je}$$

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{4a}{3\pi}, \ \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{4b}{3\pi}. \ \blacktriangleright$$

346. Odrediti težište homogene polusfere poluprečnika a.

◀ Osa Oz je osa simetrije polusfere $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$ i zato se njeno težište nalazi na toj osi. Uzimajući sferni pojas čija se donja osnova nalazi na rastojanju z $(0 < z < a)$ od ravni xOy sa visinom dz, za cilindar, možemo približno naći statički moment elementarnog sfernog pojasa u odnosu na ravan xOy : $dM = \pi\left(a^2 - z^2\right) zdz$, odakle sledi

$$M = \pi\int_0^a z(a^2 - z^2)dz = \frac{\pi a^4}{4}.$$

S obzirom da je zapremina polusfere $\frac{2}{3}\pi a^3$, to za koordinatu ζ težišta $C(\xi, \eta, \zeta)$ imamo:

$$\zeta = \frac{3M}{2\pi a^3} = \frac{3\pi a^4}{8\pi a^3} = \frac{3}{8}a.$$

Dakle, $C(\xi, \eta, \zeta) = C(0, 0, \frac{3}{8}a)$. ▶

347. Odrediti koordinate težišta $C(\varphi_0, \rho_0)$ luka OP logaritamske spirale $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ od tačke $O(-\infty, 0)$ do tačke $P(\varphi, \rho)$. Koju krivu opisuje tačka C pri kretanju tačke P?

◀ Nađimo statičke momente krive u odnosu na ose Ox i Oy : parametarske jednačine krive su

$$\begin{aligned} x &= ae^{m\varphi}\cos\varphi; \\ y &= ae^{m\varphi}\sin\varphi. \end{aligned}$$

Očigledno je

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi = a\sqrt{1+m^2}e^{m\varphi}d\varphi; \\ M_x &= a^2\sqrt{1+m^2}\int\limits_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\theta}\sin\theta d\theta; \\ M_y &= a^2\sqrt{1+m^2}\int\limits_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\theta}\cos\theta d\theta. \end{aligned}$$

Množenjem M_x sa imaginarnom jedinicom i a zatim sabiranjem sa M_y, dobijamo

$$\begin{aligned} M_y + iM_x &= a^2\sqrt{1+m^2}\int\limits_{-\infty} \varphi e^{(2m+i)\theta} d\theta \\ &= \frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{4m^2+1}e^{2m\varphi}\left((2m\cos\varphi+\sin\varphi)+i(2m\sin\varphi-\cos\varphi)\right), \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{4m^2+1}e^{2m\varphi}(2m\sin\varphi-\cos\varphi), \\ M_y &= \frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{4m^2+1}e^{2m\varphi}(2m\cos\varphi+\sin\varphi). \end{aligned}$$

Nađimo dužinu L luka krive:

$$L = \int\limits_{-\infty} \varphi a\sqrt{1+m^2}e^{m\theta}d\theta = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\varphi}.$$

Sada lako nalazimo koordinate težišta:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{M_y}{L} = \frac{ame^{m\varphi}(2m\cos\varphi+\sin\varphi)}{4m^2+1}; \\ \eta &= \frac{M_x}{L} = \frac{ame^{m\varphi}(2m\sin\varphi-\cos\varphi)}{4m^2+1}. \end{aligned}$$

Očigledno je

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \frac{m\rho}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{mae^{m\varphi}}{\sqrt{4m^2+1}}; \\ \tan\varphi_0 &= \frac{\eta}{\xi} = \frac{2m\sin\varphi-\cos\varphi}{2m\cos\varphi+\sin\varphi} = \frac{\sqrt{4m^2+1}\sin\left(\varphi-\arctan\frac{1}{2m}\right)}{\sqrt{4m^2+1}\cos\left(\varphi-\arctan\frac{1}{2m}\right)} \\ &= \tan\left(\varphi-\arctan\frac{1}{2m}\right). \end{aligned}$$

Sa tačnašću do konstantnog sabirka možemo pisati:

$$\varphi_0 = \varphi - \alpha, \text{ gde je}$$

$$\alpha = \arctan \frac{1}{2m}.$$

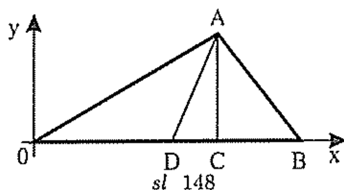
Zapisujući ρ_0 u obliku

$$\rho_0 = \frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}} e^{m(\varphi_0+\alpha)}, \tag{1}$$

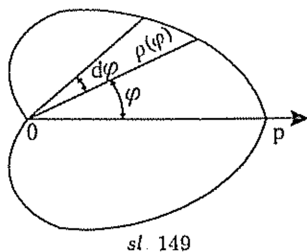
zaključujemo da pri kretanju tačke P, tačka C opisuje logaritamsku spiralu (1). ▶

348. Dokazati da se težište homogene trougaone ploče nalazi u preseku težišnih linija trougla.

◀ Neka je h visina trougla i b odgovarajuća osnovica. Uzmimo koordinatni sistem kao na (sl.148).



sl 148



sl. 149

Statički moment trougaone ploče u odnosu na osu Ox izračunavamo kao u zadatku 338; tj. $M_x = \frac{bh^2}{6}$. Zato je $S_{\Delta OAB} = \frac{bh}{2}$, odnosno, koordinata η težišta je $\eta = \frac{M_x}{S_{\Delta OAB}} = \frac{h}{3}$. Ako je visina trougla od koordinatnog početka udaljena za c, onda su jednačine pravih OA i AB redom date sa:

$$y_1(x) = \frac{hx}{c}, \; y_2(x) = \frac{h(b-x)}{b-c}.$$

Zatim je zapremina tela dobijenog rotacijom trougla oko ose Oy data sa

$$V = V_1 + V_2$$

gde je

$$V_1 = 2\pi \int_0^c xy_1(x)dx = \frac{2\pi h}{c} \int_0^c x^2 dx = \frac{2\pi hc^2}{3};$$

$$V_2 = 2\pi \int_c^b xy_2(x)dx = \frac{2\pi h}{b-c} \int_c^b x(b-x)dx = \frac{2\pi h}{3}\left(\frac{b(b+c)}{2} - c^2\right).$$

Sabiranjem sledi da je $V = \frac{\pi h}{3} b(b+c)$. Označavajući kao i obično apscisu težišta sa ξ i primenjujući **drugu Guldinovu teoremu** nalazimo da je

$$\frac{\pi h}{3} b(b+c) = \pi b h \xi,$$

odakle je

$$\xi = \frac{b+c}{3}.$$

Ostaje da se dokaže da težište pripada težišnoj liniji. Jednačina prave AD ima oblik:

$$y = h\left(1 - \frac{2(x-c)}{b-2c}\right).$$

Zamenjvanjem u dobijenoj jednačini $x = \xi$, dobijamo $y(\xi) = \eta = \frac{h}{3}$. Pošto položaj težišta ne zavisi od izbora koordinatnog početka, zaključujemo da se težište nalazi u preseku težišnih linija (medijana). Zadatak je rešen. ▶

349. Naći koordinate težišta oblasti, ograničene krivom $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

◀ Oblast je simetrična u odnosu na polarnu osu i zato se njeno težište nalazi na toj osi. Razmotrimo krivolinijski isečak sa uglom $d\varphi$ pri vrhu, obrazovan polupravama φ, $\varphi + d\varphi$, (**sl.149**) i lukom krive. Uzimajući ga za kružni isečak sa stranama $\rho(\varphi)$ i uglom pri vrhu $d\varphi$, možemo približno izračunati njegovu površinu: $dS = \frac{\rho^2(\varphi)}{2} d\varphi$. Prema zadatku 348. imamo da se težište krivolinijskog isečka nalazi na rastojanju $\frac{2}{3}\rho(\varphi)$ od pola, i zato je statički moment isečka u odnosu na pravu $\rho\cos\varphi = 0$ približno jednak (sa tačnošću do beskonačno male višeg reda nego $d\varphi$)

$$dM = \frac{\rho^2(\varphi)}{2} \cdot \frac{2}{3}\rho(\varphi)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi = \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi d\varphi,$$

odakle sledi da je

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi\right)d\varphi \\ &= \frac{4}{3}a^3\int_0^{2\pi}(3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)d\varphi = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{16}\right) = \frac{5}{4}\pi a^3. \end{aligned}$$

Pošto je površina oblasti $S = \frac{3\pi a^2}{2}$, to je $\xi = \frac{M}{S} = \frac{5}{6}a$. Označavajući koordinate težišta sa ρ_0 i φ_0, dobijamo $\varphi_0 = 0$, $\rho_0 = \frac{5}{6}a$. ▶

Napomena. Koordinate težišta možemo naći koristeći Guldinovu teoremu. Zaista, u zadatku 316.b) je dokazano da je zapremina tela dobijenog rotacijom date krive oko prave $\rho\cos\varphi = -\frac{a}{4}$, jednaka $\frac{13}{4}\pi^2 a^3$. Prema drugoj Guldinovoj teoremi je $V = 2\pi\eta S$, gde je $S = \frac{3\pi a^2}{12}$, odakle sledi $\eta = \frac{13a}{12}$. Dakle,

$$\rho_0 = \frac{13}{12}a - \frac{a}{4} = \frac{5}{6}a, \ \varphi_0 = 0.$$

350. Odrediti koordinate težišta oblasti ograničene prvim lukom cikloide

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

ako $t \in [0, 2\pi]$ i osom Ox.

◀ Očigledno je

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi a} y^2 dx = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3 dt = \frac{5\pi a^3}{2}; \\ M_y &= \int_0^{2\pi a} xy dx = a^3 \int_0^{2\pi}(t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

Pošto je $S = 3\pi a^2$ (zadatak 234) to za koordinate težišta $C(\xi, \eta)$ imamo

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \pi a, \ \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{5}{6}a. \ ▶$$

351. Odrediti koordinate težišta tela koje se dobija rotacijom figure ograničene krivama $y^2 = 2px$ i $y = 0$ $(0 \le x \le a)$ oko ose Ox.

◀ Težište tela se nalazi na osi Ox. Uzimajući ortogonalni presek tela ravnima na rastojanju x i $x + dx$ dobija se elementarno telo cilindar koji za osnovu ima krug poluprečnika $y = \sqrt{2px}$ i visinu dx. Zapremina elementarnog tela dV približno je jednaka $dV = 2\pi px dx$, a njegov statički moment dM u odnosu na ravan $x = 0$ približno je jednak $dM = 2\pi px^2 dx$. Sada je

$$\begin{aligned} M &= 2\pi p\int_0^a x^2 dx = \frac{2}{3}\pi p a^3; \\ V &= 2\pi p\int_0^a x dx = \pi p a^2 \end{aligned}$$

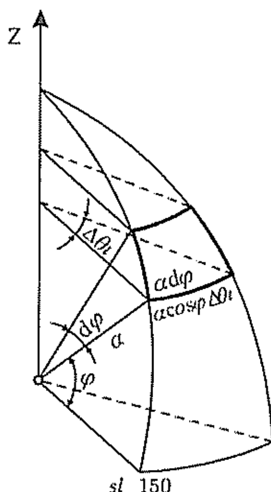
i koordinata ξ njegovog težišta $C(\xi,\eta)$:

$$\xi = \frac{M}{V} = \frac{2}{3}a.$$

Pošto je $\eta = 0$, to je $C(\xi,\eta) = C(\frac{2}{3}a, 0)$. ▶

352. Naći koordinate težišta polusfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geq 0)$.

◀ Težište se nalazi na osi Oz. Na (sl.150)



sl. 150

prikazano je elementarno telo površine $a^2 \cos\varphi d\varphi \, \Delta \, \theta_i$; statičkog momenta $a^3 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \, \Delta \, \theta_i$ u odnosu na ravan xOy (sa tačnošću do $O^{\star}(d\varphi^2)$). Sumiranjem po svim i dobijamo približno statički moment dM sferne trake u odnosu na ravan xOy, koji je jednak $2\pi a^3 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi$. Prema opštoj shemi primene određenog integrala imamo

$$M = 2\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = \pi a^3.$$

Površina površi polusfere jednaka je $2\pi a^2$, sledi, koordinata ζ težišta C jednaka je $\zeta = \frac{M}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}$. Dakle, $C(\xi,\eta,\zeta) = C(0,0,\frac{a}{2})$. ▶

4.10 Zadaci iz mehanike i fizike

Pomoću određenog integrala rešiti sledeće zadatke:

353. Odrediti masu osovine dužine $l = 10cm$, ako se njena linearna

gustina menja po zakonu $\mu = 6 + 0,3x kg/m$, gde je x rastojanje od jednog kraja osovine.

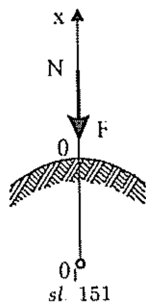
◀ Izračunajmo element mase $m([x, x+dx])$ osovine dužine dx sa tačnošću do beskonačno male višeg reda, nego dx; imamo $m([x, x+dx]) = \mu(x)\,dx$, odakle je

$$m = \int_0^l \mu(x)\,dx = \int_0^l (6 + 0,3x)\,dx = 6l + \frac{0,3}{2}l^2 = \frac{l}{2}(12 + 0,3l).$$

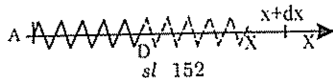
Zamenjujući l svojom vrednošću i uzimajući u obzir jedinice za l i μ, nalazimo da je $m = 75kg$. ▶

354. Koliki rad treba da izvrši telo mase m da bi palo sa površine zemlje poluprečnika R, na visinu h? Čemu je jednak rad ako se telo beskonačno udaljava od zemlje?

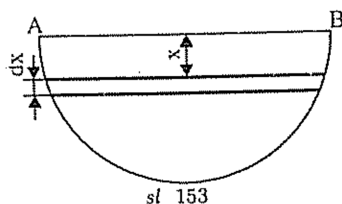
◀ Na telo mase m dejstvuje sila zemljine teže, obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja tela od centra Zemlje i usmerena ka centru Zemlje: $O_1\mathbf{F} = \frac{c\mathbf{e}(N,O_1)}{(R+x)^2}$ (**sl.151**).



sl. 151



sl 152



sl 153

Ovde je c konstanta, određena iz uslova, da je na površini Zemlje ($x = 0$) sila $\mathbf{F}$ jednaka sili teže tj. $F = mg = \frac{c}{R^2}$, odakle je $c = mgR^2$, R je poluprečnik Zemlje; $\mathbf{e}(N, O_1)$ –jedinični vektor, usmeren iz tačke N ka centru Zemlje O_1.

Elementarni rad centralne sile određen je formulom $dA = F_x dx$, gde je F_x projekcija sile $\mathbf{F}$ na smer Ox, dx elementarni premeštaj.

Za izražavanje potpunog rada imamo

$$A = -mgR^2 \int_0^h \frac{dx}{(R+x)^2} = mgR^2 \left.\frac{1}{R+x}\right|_0^h = -\frac{mgRh}{R+h}.$$

Ovde " – " označava da je projekcija sile $\mathbf{F}$ na smer Ox negativna. Traženi rad jednak je $|A|$.

Prelaskom na graničnu vrednost kad $h \to +\infty$, nalazimo da je $A_\infty = -mgR$, $|A| = mgR$. ▶

355. Koliki rad treba da izvrši sila da bi rastegla elastičnu oprugu za $0,1m$, ako sila od $1N$ rastegne tu oprugu za $0,01$?

◀ Reakcija $\mathbf{F}$ elastične opruge, čiji je jedan kraj pričvršćen, izražava se prema Hukovom zakonu formulom $\mathbf{F} = cx$, gde je c–koeficijent izdržljivosti opruge, x–deformacija (**sl.152**). Konstantu c nalazimo iz uslova $1N = c \cdot 0,01m$, tj. $c = \frac{1}{0,01} \cdot \frac{N}{m} = 100\frac{N}{m}$.

Elementarni rad elastične sile (reakcije opruge), sa tačnošću do beskonačno male višeg reda, nego dx, dat je izrazom

$$A([x, x + dx]) = -cxdx,$$

gde je dx elementarni premeštaj, usmeren u stranu suprotnoj sili $\mathbf{F}$.

Potpun rad nalazimo integrisanjem u razmaku od 0 do 0,1 : $A = -c\int_0^{0,1} xdx = -10\,0 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,1} = -5\,0 \cdot x^2\Big|_0^{0,1} = -50 \cdot 0,01 = -0,5J$. Izračunali smo rad elastične sile. On je negativan. Rad je $|A| = 0,5J$. ▶

356. Cilindar prečnika $0,2m$ i visine $0,8m$ napunjen je parom pod pritiskom $10N/m^2$. Koji rad treba da se izvrši da bi se zapremina pare smanjila dva puta, a da temperatura pare ostaje nepromenjena?

◀ Za izometričke procese važi Boj-Mariotov zakon

$$P = \frac{C}{V}$$

(P–pritisak; V–zapremina gasa; C–konstanta). Označavajući sa V_0 zapreminu cilindra, nađimo konstantu C :

$$C = P_0V_0 = 10N/m^2 \cdot \pi \cdot 0,8m \cdot 0,01m^2 = 10\pi \cdot 0,8 \cdot 0,01J.$$

Elementarni rad dA sile pritiska P pri smanjenju visine cilindra za veličinu dh izražava se formulom

$$dA = -\frac{\pi d^2}{4}Pdh,$$

gde je $d = 0,2m$–prečnik cilindra. Pošto je zapremina za koju je umanjena zapremina pare jednaka,

$$dV = \frac{\pi d^2}{4}dh,$$

to je $dh = \frac{4dV}{\pi d^2}$. Celokupan rad potrošen na dvostruko smanjenje zapremine,

izražava se integralom

$$A = \int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}} dA = -\int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}} PdV = C\int_{\frac{V_0}{2}}^{V_0} \frac{dV}{V} = C\ln 2 \approx 0,08\cdot 3,1416\cdot 0,6931J = 0,1741J.$$

357. Odrediti silu pritiska vode na vertikalnu stenu, koja ima oblik polukruga poluprečnika a, čiji se dijametar nalazi na površini vode.

◀ Označimo sa $l(x)$ dužinu horizontalne prave, povučene na stenu na rastojanju x od AB (sl.**153**). Uzimajući traku, između horizontalnih pravih, koje su od AB udaljene za x i $x+dx$ za pravugaonik sa osnovicom $l(x)$ i visinom dx, možemo približno (sa tačnošću do beskonačno male višeg reda, nego dx) izračunati pritisak $P([x,x+dx])$, koji prouzrokuje ta ravan. Primenom pravila hidrostatike, saglasno kome je pritisak duž ravni, jednak proizvodu površine i dubine zaronjavanja:

$$P([x,x+dx]) = xl(x)\,dx.$$

Kako je $l(x) = 2\sqrt{a^2-x^2}$, to sa tačnošću do beskonačno male višeg reda, nego što je dx, imamo

$$P([x,x+dx]) = 2x\sqrt{a^2-x^2}dx,$$

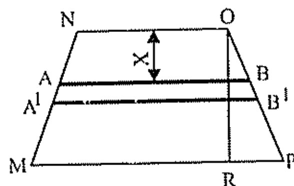
odakle je ceo pritisak P jednak

$$P = 2\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{2}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{2}{3}a^3$$

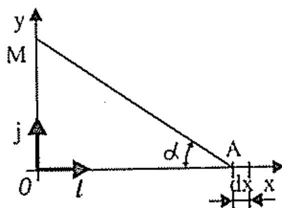
(prema opštoj shemi primene određenog integrala). ▶

358. Odrediti silu pritiska vode na vertikalnu stenu, koja ima oblik trapeza, čije su osnovice: donja $a=10$; gornja $b=6$ i visina trapeza $h=5$, ako je nivo potopljenja donje osnovice $c=20$.

◀ Neka je $l(x)$ dužina segmenta AB, paralelnog osnovicama trapeza $MNOP$, i prolazeći na rastojanju x od gornje osnovice (sl.**154**).



sl 154



sl 155

Očigledno,

$$l(x) = b + (a-b)\frac{x}{h}.$$

Uzmimo elementarnu traku $A'ABB'$ širine dx i ponavljanjem rasuđivanja iz prethodnog primera, dobijamo da je pritisak te trake, jednak (sa tačnošću do beskonačno male višeg reda, nego dx)

$$P([x, x+dx]) = \left(b + (a-b)\frac{x}{h}\right)(c-h+x)\,dx.$$

Prema opštoj shemi primene određenog integrala, imamo

$$\begin{aligned} P &= \int_0^b \left(b(c-h) + \left(b + \frac{(a-b)(c-h)}{h}\right)x + \frac{a-b}{h}x^2\right)dx \\ &= bh(c-h) + \frac{h^2}{2}\left(b + \frac{(a-b)(c-h)}{h}\right) + \frac{h^3}{3}(a-b). \end{aligned}$$

Zamenjujući brojne vrednosti za a, b, c i h, nalazimo

$$P = \left(450 + 225 + 33\frac{1}{3}\right)T = 708\frac{1}{3}T. \ \blacktriangleright$$

359. Brzina tačke se menja po zakonu $v = v_0 + at$. Koliki put pređe ta tačka za vremenski razmak $[0, T]$?

◀ Pošto je $v = \frac{ds}{dt}$, to dobijamo diferencijalnu jednačinu $\frac{ds}{dt} = v_0 + at$, čije je rešenje

$$s = \int_0^T (v_0 + at)\,dt = v_0T + \frac{aT^2}{2}. \ \blacktriangleright$$

360. Homogena kugla poluprečnika R i gustine μ obrće se oko svog prečnika ugaonom brzinom ω. Ofrediti kinetičku energiju kugle.

◀ Po definiciji je kinetička energija čestice, koja se okreće oko ose, jednaka $dT = \frac{1}{2}dmv^2$, gde je v linearna brzina čestice dm. Pošto je $v = \omega r$, gde je ω ugaona brzina tela; r rastojanje čestice dm od ose rotacije, to je

$$dT = \frac{1}{2}dm\omega^2r^2.$$

Vidimo da se rešenje zadatka svodi na rešenje zadatka 342 sa razlikom da se pred integralom javlja činilac $\frac{\mu\omega^2}{2}$. Dakle, $T = \frac{4\pi\mu\omega^2R^5}{15}$. ▶

361. Kojom silom privlači materijalna beskonačna prava konstantne

linearne gustine μ_0 materijalnu tačku mase m, koja je od date prave udaljena za a?

◀ Izaberimo koordinatni sistem tako da se materijalna tačka M nalazi na osi Oy na rastojanju a od koordinatnog početka (**sl.155**). Uzmimo na osi Ox u tački A sa apscisom x element dx; taj element dejstvuje na tačku M silom $d\mathbf{F}$, jednakom

$$d\mathbf{F} = \frac{\gamma m \mu_0 dx}{a^2 + x^2} \mathbf{e}(M, A),$$

gde je $\mathbf{e}(M, A)$ jedinični vektor, usmeren iz tačke M u tačku A; γ je gravitaciona konstanta.

Komponente vektora $d\mathbf{F} = (dF_x, dF_y)$ su očigledno jednake

$$\begin{aligned} dF_x &= \frac{\gamma m \mu_0 dx}{a^2 + x^2} \cos\alpha = \frac{x\gamma m \mu_0 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ dF_y &= \frac{\gamma m \mu_0 dx}{a^2 + x^2} \sin\alpha = -\frac{a\gamma m \mu_0 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Da bismo dobili ukupnu silu privlačenja tačke M celom materijalnom pravom, neophodno je integraliti dobijene izraze duž cele prave:

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} \int_{-\infty}^{+\infty} dF_x + \mathbf{j} \int_{-\infty}^{+\infty} dF_y$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}$ su ortovi. Pošto je

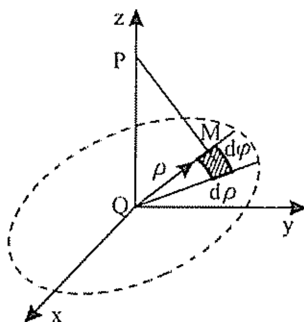
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dF_x &= \gamma m \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \gamma m \mu_0 \left. \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dF_y &= -a\gamma m \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a\gamma m \mu_0}{a^2} \left. \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2\gamma m \mu_0}{a}, \end{aligned}$$

to je $\mathbf{F} = -\frac{2\gamma m \mu_0}{a} \mathbf{j}$. ▶

362. Odrediti, kojom silom privlači kružna ploča poluprečnika a i konstantne površinske gustine μ_0 materijalnu tačku P mase m, koja se nalazi na normali na ravan ploče, i prolazi kroz njen centar Q na rastojanju $PQ = b$.

◀ Izaberimo koordinatni sistem $Qxyz$ tako da se ravan xOy poklapa sa

ravni ploče, koordinatni početak O sa tačkom Q, a osu Oz izaberimo tako da segment QP bude segment na Oz osi dužine b (sl.**156**).



sl 156

Uzmimo element ploče sa dimenzijama $\rho d\varphi$ i $d\varphi$; sila $d\mathbf{F}$ kojom taj element privlači materijalnu tačku, jednaka je (sa tačnošću do beskonačno male višeg reda, nego $d\varphi$ i $d\rho$)

$$d\mathbf{F} = \frac{m\gamma\mu_0 \rho d\rho d\varphi}{b^2+\rho^2} \mathrm{e}\,(P, M)\,,$$

gde je $\mathrm{e}\,(P, M)$ jedinični vektor, usmeren iz tačke P u tačku M, γ je gravitaciona konstanta.

Predstavimo $d\mathbf{F}$ u obliku

$$d\mathbf{F} = \mathbf{i}dF_x + \mathbf{j}dF_y + \mathbf{k}dF_z,$$

gde su $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortovi osa; dF_x, dF_y, dF_z projekcija sile $d\mathbf{F}$ na odgovarajuću osu.

Da bismo izračunali ukupnu silu, neophodno je integrisati izraz $d\mathbf{F}$ uzastopno, po φ (od 0 do 2π) i po ρ (od 0 do a). No

$$\int_0^{2\pi} dF_x = 0, \quad \int_0^{2\pi} dF_y = 0,$$

jer za svaki element ploče postoji simetričan u odnosu na početak element; ako označimo sa $dF_x^{(1)}$ i $dF_x^{(2)}$ projekcije na osu Ox sila $d\mathbf{F}^{(1)}$ i $d\mathbf{F}^{(2)}$, kojima ti elementi privlače tačku P, to je očigledno, $dF_x^{(1)} + dF_x^{(2)} = 0$. Analogno je $dF_y^{(1)} + dF_y^{(2)} = 0$. Na taj način je

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\int_0^a \left\{ \int_0^{2\pi} dF_z \right\}.$$

Pošto je $dF_z = (d\mathbf{F}, \mathbf{k}) = -m\gamma\mu_0\rho d\rho d\varphi\frac{b}{(b^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$, gde je $(d\mathbf{F}, \mathbf{k})$ skalarni proizvod vektora $d\mathbf{F}$ i $\mathbf{k}$, to je

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\mathbf{k}\int_0^a\left\{\int_0^{2\pi}\frac{m\gamma\mu_0 b\rho d\varphi}{(b^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}d\rho = -\mathbf{k}2\pi\gamma\mu_0 mb\int_0^a\frac{\rho d\rho}{(b^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= -\mathbf{k}\,\frac{2\pi\gamma\mu_0 mb}{\sqrt{b^2+\rho^2}}\bigg|_a^0 = -\mathbf{k}2\pi\gamma\mu_0 m\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).\ \blacktriangleright\end{aligned}$$

Napomena. U poslednja dva primera imali smo integral vektorske funkcije.

Ako je $\mathbf{F}(x) = \mathbf{a}f(x)$, gde je $\mathbf{a}$ fiksiran vektor, ne zavisi od x, a $f(x)$ integrabilna funkcija na $[a,b]$ to je po definiciji

$$\int_a^b \mathbf{F}(x)\,dx = \mathbf{a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

363. Saglasno Toričelijevom zakonu brzina isticanja tečnosti iz suda jednaka je $v = c\sqrt{2gh}$, gde je g ubrzanje zemljine teže, h visina nivoa tečnosti nad otvorom i $c = 0,6$ opitni koeficijent.

Za koje vreme će se napuniti do vrha vertikalna cilindrična bačva prečnika $D = 1m$ i visine $H = 2m$ kroz kružni otvor pri dnu prečnika $d = 1cm$?

◀ U procesu isticanja tečnosti kroz otvor prečnika d sa brzinom v imamo zapreminu istisnute tečnosti $\frac{\pi d^2 v}{4}$. Tada za vremenski razmak dt imamo promenu zapremine $dV = \frac{\pi d^2}{4}vdt$.

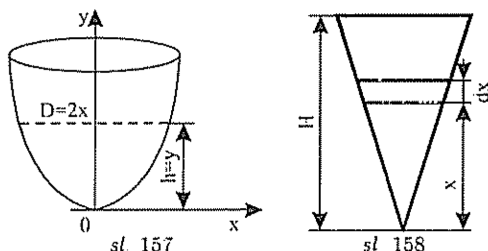
S druge strane, $dV = -\frac{\pi D^2}{4}dh$. Izjednačavanjem oba izraza, dobijamo jednostavnu diferencijalnu jednačinu $d^2c\sqrt{2gh}dt = -D^2dh$, iz koje integriljenjem dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^T dt &= -\int_H^0 \frac{D^2}{d^2c\sqrt{2g}}\cdot\frac{dh}{\sqrt{h}};\\ T &= \frac{\sqrt{2}D^2\sqrt{H}}{cd^2\sqrt{g}} = \frac{2\cdot 10^4}{0,6\sqrt{9,81}}\,\text{sec} \approx \frac{10^5}{9,405}\,\text{sec} \approx 10633\,\text{sec} \approx 3\text{časa}.\ \blacktriangleright\end{aligned}$$

364. Kakav oblik mora imati sud, koji predstavlja obrtnu površ, da bi snižavanje nivoa tečnosti pri isticanju bilo ravnomerno.

◀ Razmotrimo sud, koji predstavlja granicu tela dobijenog rotacijom

oko ose Oy krive $y = y(x)$, iz koga ističe tečnost kroz otvor koji se nalazi u koordinatnom početku (**sl.157**).



sl. 157 *sl.* 158

Iz prethodnog zadatka je $dt = -\frac{cD^2}{\sqrt{h}}dh$, gde je c konstanta. Uzmimo $h = y$, $D = 2x$. Onda je $\frac{dy}{dt} = c_1\frac{\sqrt{y}}{x^2}$, gde je $c_1 = -\frac{1}{4c} = const.$

Po uslovu zadatka je $\frac{dy}{dt} = c_2 = const.$ odakle je $c_1\frac{\sqrt{y}}{x^2} = c_2$, $y = ax^4$, gde je $a = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = const.$ ▶

365. Brzina raspada radijuma u svakom vremenskom trenutku proporcionalna je njegovoj ukupnoj količini.

Naći zakon raspadanja radijuma, ako u trenutku $t = 0$ imamo $Q_0 g$ radijuma, a posle $T = 1600$ godina njegova količina se dvostruko smanjila.

◀ Neka je u trenutku t masa radijuma Qg. Tada se za vremenski razmak $t - t_0$ masa $Q_0 - Q$ podvrgava raspadu. Brzina raspadanja je

$$\frac{d(Q_0 - Q)}{dt} = -\frac{dQ}{dt}.$$

Po uslovu zadatka je

$$-\frac{dQ}{dt} = cQ. \tag{1}$$

Određivanjem konstante c imamo rešenje zadatka. Razdvajanjem promenljivih u (1) i integraljenjem u granicama $[t_0, t]$, dobijamo

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -c(t - t_0), \tag{2}$$

odakle je

$$Q = Q_0 e^{-c(t-t_0)}. \tag{3}$$

Iz uslova zadatka sledi da je za $t = T = 1600$, $Q = \frac{Q_0}{2}$. Zamenjujući u (2) T umesto t i $\frac{Q_0}{2}$ umesto Q, nalazimo $\ln 2 = cT$, odakle je $c = \frac{\ln 2}{T}$.

Zamenjivanjem dobijenog c u (3), dobijamo

$$Q = Q_0 e^{-\ln 2\frac{t-t_0}{T}} = Q_0 2^{-\frac{t-t_0}{T}}.$$

Kako je $t_0 = 0$, $T = 1600$, to je zakon raspadanja dat formulom $Q = Q_0 2^{-\frac{t}{1600}}$. ▶

366. U slučaju procesa drugog reda brzina hemijske reakcije prelaska materijala A u materijal B, proporcionalna je proizvodu koncentracija tih materijala.

Koliki procenat materijala B se sadrži u sudu kroz $t = 1$ čas, ako za $t = 0$ min. imamo 20% materijala B, a za $t = 15$ min. imamo 80% tog materijala.

◀ Neka se u sudu zapremine V sadrži zapremina V_A materijala A i zapremina V_B materijala B. Priraštaj V_B u slučaju prelaska A u B, očigledno ima oblik $dV_B = -dV_A$, a brzina reakcije je $\frac{dV}{dt} = \frac{dV_B}{dt} = -\frac{dV_A}{dt}$. Po uslovu je

$$\frac{dV_B}{dt} = c\frac{V_A}{V} \cdot \frac{V_B}{V}, \tag{1}$$

gde je c konstanta navedena u zadatku. Pošto je $V_A = V - V_B$ diferencijalna jednačina (1) dobija oblik

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{c\,(V - V_B)\,V_B}{V^2}. \tag{2}$$

Razdvajanjem promenljivih i integrisanjem, dobijamo (iskorišćen je uslov zadatka)

$$\int_{0,2V}^{0,8V} \frac{dV_B}{V_B\,(V - V_B)} = \frac{c}{V^2}\int_0^{15} dt,$$

odakle sledi, $\frac{c}{V} = \frac{4}{15}\ln 2$. Zamenjivanje dobijene vrednosti za $\frac{c}{V}$ u (2) i razdvajanjem promenljivih, nalazimo

$$\frac{dV_B}{V_B\,(V - V_B)} = \frac{4}{15}\ln 2\frac{dt}{V}. \tag{3}$$

Pretpostavimo da će se kroz 60 min. u zapremini V sadržavati V_B' materijala B; integrisanjem jednačine (3), dobijamo

$$\int_{0,2V}^{V_B'} \frac{dV_B}{V_B\,(V - V_B)} = \frac{4}{15}\frac{\ln 2}{V}\int_0^{60} dt,$$

odakle nalazimo $\ln\frac{dV_B'}{V_B(V-V_B')} = \ln 2^{14}$, $V_B' = \frac{2^{14}}{1+2^{14}}V \simeq 0,999938V$. Dakle, kroz 1 čas u sudu će se nalaziti oko $99,9938\%$ materijala B. ▶

367. Prema Hukovom zakonu relativno produženje ε osovine proporcionalno je naprezanju sile σ na odgovarajući poprečni presek, tj. $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, gde je E Yungov modul. Odrediti produženje osovine konusnog oblika okrenute naniže sa vrhom u koordinatom početku, ako je R poluprečnik osnove, H visina kupe i γ specifična težina materijala kupe.

◀ Osovina se produžava pod dejstvom sile sopstvene težine. Razmotrimo poprečni presek osovine (sl.158), koji se nalazi na rastojanju x od vrha $(0 < x < H)$ i predstavlja krug poluprečnika r. Težina kružnog konusa, poluprečnika osnove r, i visine x, jednaka je $\frac{\pi r^2 x\gamma}{3}$; naprezanje silom σ u tom poprečnom preseku, očigledno je jednako

$$\sigma = \frac{\pi r^2 x\gamma}{3} : \pi r^2 = \frac{x\gamma}{3}.$$

Označimo sa $\Delta\, dx$ produženje elementa osovine dužine dx; ono je jednako $\Delta\, dx = \varepsilon dx = \frac{\gamma x}{3E} dx$.

Potpuno produženje izračunavamo pomoću integrala

$$\Delta \int_0^H dx = \frac{\gamma}{3E} \int_0^H x dx,$$

odakle je $\Delta\, H = \frac{\gamma H^2}{6E}$. ▶

4.11 Približno izračunavanje određenog integrala

1^0. **Formula pravougaonika.** Ako funkcija $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$; $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, ..., n)$; $y(x_i) = y_i$, onda je

$$\int_a^b y(x)\, dx = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) + R_n,$$

gde je $R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi)$, $a \le \xi \le b$.

2^0. **Formula trapeza.** Ako $y = y(x) \in C^{(2)}[a,b]$, onda pri istim oznakama imamo

$$\int_a^b y(x)\, dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

gde je $R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\eta)$, $a \le \eta \le b$.

3^0 Formula parabole (Simpsona). Neka $y = y(x) \in C^{(4)}[a,b]$. Stavljajući $n = 2k$, dobijamo Simpsonovu formulu

$$\int_a^b y(x)\,dx = \left(\frac{h}{3}(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1})\right.$$
$$\left. +2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k-2})\right) + R_n,$$

gde je $R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{IV}(\zeta)$, $a \le \zeta \le b$.

Napomena. Ako je ispunjena formula

$$\left\| z - \tilde{z} \right\|_0 = \max \left| z_i - \tilde{z}_i \right| \le M h^n,$$

gde je $\tilde{z}_i$ približna vrednost veličine z_i, izračunata po nekoj formuli, to se kaže, da ta formula u nekoj klasi funkcija ima n-ti red tačnosti ($M > 0$ je konstanta koja ne zavisi od h).

Na taj način, formula pravugaonika ima u klasi $y \in C^{(1)}[a,b]$ prvi red tačnosti, formula trapeza u klasi $y \in C^{(2)}[a,b]$ ima drugi red tačnosti, formula parabole u klasi $y \in C^{(4)}[a,b]$ ima četvrti red tačnosti.

Često se umesto norme $\|\cdot\|_0$ biraju i druge norme u zavisnosti od karaktera rešenja zadatka. U nastavku ćemo segment $[a,b]$ sa tačkama $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ u njemu zvati ravnomernom mrežom sa korakom $h = \frac{b-a}{n}$; tačke deljenja x_i zovu su čvorovima mreže.

4^0 Rešeni zadaci.

368. Primenom formule pravougaonika $(n = 12)$, približno izračunati integral $I = \int_0^{2\pi} x \sin x\,dx$ i rezultat uporediti sa njegovom tačnom vrednošću.

◄ S obzirom na rečeno, ovde je $[a,b] = [0, 2\pi]$, $h = \frac{\pi}{6}$, $x_i = i\frac{\pi}{6}$ $(i = \overline{0,12})$. Po formuli pravougaonika, imamo

$$I = \int_0^{2\pi} x \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{6} \sum_{i=0}^{11} i\frac{\pi}{6} \sin i\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{36} \sum_{i=0}^{11} i \sin \frac{i\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{36} \left(\sum_{i=1}^{11} \cos ix \right)'_{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{\pi^2}{36} \left(\frac{\cos 6x \cdot \sin \frac{11}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right)'_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36} \left(\frac{\left(6 \sin 6x \cdot \sin \frac{11}{2}x - \frac{11}{2} \cos \frac{11}{2}x \cdot \cos 6x\right) \sin \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \cos 6x \sin \frac{11}{2}x}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right)_{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{36}\frac{\frac{11}{2}\cos\frac{11}{12}\pi\sin\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{11}{12}\pi}{\sin^2\frac{\pi}{12}}\\
&= -\frac{\pi^2}{72}\cdot\frac{11\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin^2\frac{\pi}{12}}\\
&= -\frac{\pi^2}{6}\cot\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi^2}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)\approx -6,2961
\end{aligned}
$$

(uzeli smo $\pi \approx 3,14; \sqrt{3} \approx 1,73$). Inače, tačna vrednost integrala je $I = -2\pi = -6,28\ldots$ ▶

369. Pomoću formule trapeza izračunati integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x dx} \quad (n=6)$$

i oceniti grešku.

◀ Očigledno $h = \frac{\pi}{12}$, $x_i = i\frac{\pi}{12}$, $i = 0,1,2,3,4,5,6$. Po formuli trapeza je

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{12}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\sqrt{7+\cos 2i\frac{\pi}{12}}\right)\\
&= \frac{\pi}{24}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\sqrt{7+\cos i\frac{\pi}{6}}\right)\\
&= \frac{\pi}{24}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{14+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}+\sqrt{7}+\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{14-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{48}\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{14+\sqrt{3}}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{13}+\sqrt{14-\sqrt{3}}\right)\\
&\approx \frac{3,142}{48}(3,732+3,966+3,873+3,742+3,606+3,502)\\
&\approx \frac{3,142\cdot 22,421}{48}\approx 1,4676.
\end{aligned}
$$

Ocenimo grešku formule trapeza; u tom cilju ocenimo R_n. Očigledno,

$$|R_n| \le \frac{(b-a)\,h^2}{12}\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|f''(x)\right|.$$

U ovom primeru je

$$\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\right)''\right| \le \frac{17}{14\sqrt{14}}.$$

Znači, $|R_n| \leq \frac{17\pi^3}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 7\sqrt{14}} < 0,002$. ►

370. Pomoću formule Simpsona izračunati integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad (k=2).$$

◄ Deleći segment $[0,1]$ na 4 jednaka dela ($h = \frac{1}{4}$), po Simpsonovoj formuli je

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{1}{12}\left((y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2\right) \\ &\approx \frac{1}{12}(1+0,5+3,76471+2,56+1,6) = 0,78539. \end{aligned}$$ ►

371. Uzimajući $n = 10$, izračunati Katalanovu konstantu

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx.$$

◄ Ovde je $h = 0,1$; $x_i = ih$, $i = 0,1,\dots,10$. Onda je

$$G = \frac{1}{30}\left((y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)\right).$$

Izračunavanjem vrednosti funkcije sa tačnošću do pet znakova posle zareza, dobijamo:

$$y_0 = 1;\ y_{10} = 0,78540;\ y_0 + y_{10} = 1,78540;$$

$$y_1 = 0,99668;\ y_3 = 0,97152;\ y_5 = 0,92730;\ y_7 = 0,87246;\ y_9 = 0,81424;$$

$$4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9) = 4 \cdot 4,58220 = 18,32880;$$

$$y_2 = 0,98698;\ y_4 = 0,95127;\ y_6 = 0,900070;\ y_8 = 0,84343;$$

$$2(y_2+y_4+y_6+y_8) = 2 \cdot 3,68238 = 7,36467.$$

Primenom izračunatih vrednosti, nalazimo

$$G \approx \frac{1,78540+18,32880+7,36476}{30} = 0,915965.$$ ►

372. Polazeći od formule $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, izračunati broj π sa tačnošću do 10^{-4}.

◀ Već smo u zadatku 370 izračunali integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ pomoću Simpsonove formule, uzimajući $k = 2$. Ocenimo grešku. Prema zadatku 128, glave II, je

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left((n+1)\arctan x\right),$$

$$\text{te je } \left|\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(4)}\right| \leq 4!, \ x \in [0,1],$$

$$\text{sledi } |R_4| \leq \frac{24}{180} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{1}{1920} \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

Sada prema pomenutom zadatku 370, nalazimo $\pi \approx 4 \cdot 0,78539 = 3,14156$. Upoređivanjem dobijenog rezultata sa tabličnim $\pi = 3,141592\ldots$, vidimo jednakost prve četiri cifre posle zareza. ▶

373. Izračunati $\int\limits_0^1 e^{x^2} dx$ sa tačnošu do $0,001$.

◀ Primenićemo Simpsonovu formulu; pošto je $\left|\left(e^{x^2}\right)^{(4)}\right| \leq 228$ za $x \in [0,1]$, to ćemo h dobiti iz uslova (ocena greške po formuli parabole) $h^4 < \frac{10^{-3} \cdot 15}{19} \approx 8 \cdot 10^{-4}$. Deleći segment $[0,1]$ na 10 jednakih delova, dobijamo

$$\int\limits_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{30}\left((y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right).$$

Izračunavanjem vrednosti funkcije $x \mapsto e^{x^2}$ u tačkama $x_i = ih$ $(i = 0, \ldots, 10)$ sa tačnošću do 10^{-5} (na primer koristeći Tejlorovu formulu), dobijamo

$$y_0 = 1, \ y_{10} \approx 2,71828, \ y_0 + y_{10} \approx 3,71828;$$

$$y_1 \approx 1,01004, \ y_3 \approx 1,09417, \ y_5 \approx 1,28733, \ y_7 \approx 1,63230, \ y_9 \approx 2,24789,$$

$$4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) \approx 4 \cdot 7,27173 = 29,08692;$$

$$y_2 \approx 1,04081, \ y_4 \approx 1,17351, \ y_6 = 1,43332, \ y_8 \approx 1,89648,$$

$$2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) \approx 2 \cdot 5,54412 = 11,08824;$$

$$I = \int\limits_0^1 e^{x^2} dx = \frac{1}{30}(3,71828 + 29,08692 + 11,08824) = \frac{43,89344}{30} \approx 1,46311.$$

Dobili smo tri tačne cifre posle zareza. ▶

374. Izračunati integral $\int\limits_0^1 (e^x - 1)\ln\frac{1}{x}dx$ sa tačnošću do 10^{-4}.

◀ Pošto $(e^x - 1)\ln\frac{1}{x} \to 0$ kad $x \to 0$ to je dati integral Rimanov. Četvrti izvod podintegralne funkcije ima složen oblik i zato ga je teško oceniti. Pored toga, već je njen prvi izvod neograničen na $[0,1]$. U principu formulu Simpsona možemo primeniti ali ne možemo oceniti grešku. Zato postupamo na sledeći način: razložimo po Tejlorovoj formuli funkciju $x \mapsto 1 - e^x$ po stepenima x :

$$1 - e^x = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\right) + R(x),$$

gde je $R(x) = \frac{e^c x^7}{7!}$, $0 < c < 1$. Zapišimo dalje podintegralnu funkciju u obliku

$$f(x) = (1 - e^x)\ln x$$

i označimo preko $\varphi(x)$ funkciju

$$\varphi(x) = -\ln x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\right).$$

Očigledno je $f(x) = \varphi(x) + R_1(x)$, gde je $R_1(x) = R(x)\ln x$. Ocenimo $|R_1(x)| = \left|\frac{e^c x^7 \ln x}{7!}\right|$ ako $x \in [0,1]$. Kako je $\lim\limits_{x\to 0} x^7 \ln x = 0$; $\ln 1 = 0$, to funkcija $|z| = \left|x^7 \ln x\right|$ postiže apsolutni maksimum u nekoj unutrašnjoj tački segmnta $[0,1]$. Diferenciranjem $z(x)$ dobijamo: $z'(x) = x^6 + 7x^6 \ln x$. Izjednačavajući sa nulom $z'(x)$, nalazimo da u tački $x = e^{-\frac{1}{7}}$ funkcija $|z(x)|$ postiže apsolutni ekstremum, jednak

$$\max_{0\le x\le 1} |z(x)| = \left|-\frac{1}{7}e^{-1}\right| = \frac{1}{7e}.$$

Pošto je $|R(x)| < \frac{e}{7!}$ za $x \in [0,1]$, dobijamo ocenu

$$|f(x) - \varphi(x)| = |R_1(x)| < \frac{1}{7\cdot 7!}.$$

Na taj način je

$$\left|\int\limits_0^1 (f(x) - \varphi(x))\,dx\right| \le \int\limits_0^1 |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{1}{7\cdot 7!} < 10^{-4},$$

zato ćemo umesto integrala funkcije $f(x)$ izračunati integral funkcije $\varphi(x)$. Zadata tačnost biće obezbeđena ako pri izračunavanju integrala funkcije $\varphi(x)$ greška ne bude veća od 10^{-4}. Parcijalnim integraljenjem nalazimo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\approx \int_0^1 \varphi(x)\,dx \\ &= \psi(x)\ln x\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+\frac{x^5}{720}+\frac{x^6}{7!}\right)dx \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{96}+\frac{1}{600}+\frac{1}{6\cdot 6!}+\frac{1}{7\cdot 7!},\end{aligned}$$

gde je

$$\psi(x) = -\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{7!}\right);$$

$$\psi(x)\ln x\Big|_0^1 = \psi(1)\cdot\ln 1 - \lim_{x\to 0}\psi(x)\cdot\ln x = 0.$$

Sa tačnošću do 10^{-6} imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= 0,250000;\ \frac{1}{18} = 0,055556;\ \frac{1}{96} = 0,010417; \\ \frac{1}{600} &= 0,001667;\ \frac{1}{6\cdot 6!} = 0,000231;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-e^x)\ln x\,dx &\approx 0,250000+0,055556+0,010417+0,001667 \\ +0,000231 &= 0,317871 \approx 0,3179. \ \blacktriangleright\end{aligned}$$

375. Izračunati sa tačnošću do 0,001 integral verovatnoće $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

◀ Integral konvergira, jer za svako $\varepsilon > 0$ postoji $A_1 > 0$ tako da je za $A \geq A_1$

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2}dx < \varepsilon.$$

Ako smo našli A_1, onda možemo zapisati za $A \geq A_1$

$$I = \int_0^A e^{-x^2}dx + R,\ R = \int_A^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Uzmimo $\varepsilon = 10^{-3}$ i pronađimo A tako da je dužina intervala $[0, A]$ najveća. U tom cilju postupićemo na slededeći način: pretpostavimo da smo našli takvo A, da je $\int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}dx < \varepsilon$; tada je i $\int\limits_{A+1}^{+\infty} e^{-x^2}dx < \varepsilon$; i

$$0 < \int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}dx - \int\limits_{A+1}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int\limits_A^{A+1} e^{-x^2}dx = e^{-\xi^2} < \varepsilon,$$

gde je $A < \xi < A + 1$ (teorema o srednjoj vrednosti).

Dobijena nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$\xi > \sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Uzimajući $\varepsilon = 10^{-3}$, dobijamo

$$\xi > \sqrt{\ln 1000} \approx \sqrt{6,907755} \approx 2,628$$

i umesto A možemo uzeti $A = 2,6$.

Možemo dobiti još bolju ocenu za A. Pretpostavimo da je takvo A nađeno, tj. da je

$$I_1 = \int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}dx < \varepsilon.$$

Smenom $x^2 = t$, dobijamo

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{A^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt < \frac{1}{2A}\int\limits_{A^2}^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{e^{-A^2}}{2A}.$$

Iz uslova $\frac{e^{-A^2}}{2A} < \varepsilon$ sledi $Ae^{A^2} > \frac{1}{2\varepsilon}$,tj. $\ln A + A^2 > \ln\frac{1}{2\varepsilon}$, odakle je $A > \sqrt{\ln\frac{1}{2\varepsilon} - \ln A}$. Pošto za $\varepsilon = 10^{-3}$ mora biti $A > 2$, to pod korenom možemo umesto $\ln 2$ uzeti $\ln A$, pa je

$$A > \sqrt{\ln 1000 - 2\ln 2} \approx \sqrt{6,90775 - 1,38628} = \sqrt{5,52147} = 2,35.$$

Naš zadatak se sada svodi na izračunavanje integrala

$$\overline{I} = \int\limits_0^{2,4} e^{-x^2}dx$$

sa tačnošću do 10^{-3}.

Može se postupiti kao u primeru 374; aproksimacijom funkcije e^{-x^2} polinomom. No u vezi sa tim, pošto segment integrisanja ima dužinu 2, 4, to stepen $(2,4)^n$ brzo raste, tako da je za garantovanu tačnost potrebno uzeti više od 15 sabiraka u razvoju po Tejlorovoj formuli.

Zato ćemo integral $\overline{I}$ izračunati Simpsonovom metodom. Nađimo $y^{(4)}$ za funkciju $y = e^{-x^2}$. Pošto je $y^{(4)} = 4y\left(3 - 12x^2 + 4x^4\right)$, to je $\left|y^{(4)}(x)\right| \leq 4(3 - 12 \cdot 5,76 + 4 \cdot 33,1776)$, $x \in [0; 2,4]$, jer je $\left|e^{-x^2}\right| \leq 1$, a funkcija $z = 3 - 12x^2 + 4x^4$ raste za $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$. Na taj način je $\left|y^{(4)}(x)\right| \leq 4 \cdot 66,5904 = 266,3616$; $0 \leq x \leq 2,4$. Ocenjujući grešku R po formuli Simpsona

$$R = -\frac{(b-a)\,h^4}{180} f^{(4)}(\xi)\,, \quad a \leq \xi \leq b,$$

nalazimo za naš slučaj da je

$$|R| \leq \frac{2,4 \cdot 266,3616}{180} h^4 \approx 3,55128 h^4.$$

Iz uslova $|R| < 10^{-3}$ dobijamo

$$h < \sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{3,55128}} < \sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{3,5}} = 0,1 \cdot \sqrt[4]{\frac{10}{3,5}} \approx 0,13.$$

Za dobijanje zadate tačnosti možemo uzeti $h = 0,1$. Odatle je $k = 12$, tj. $n = 24$. Sada kao u primeru 370, imamo

$$\overline{I} \approx \frac{1}{30}\left(y_0 + y_{24} + 4\sum_{j=1}^{12} y_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{11} y_{2j}\right) \approx \frac{28,56857}{30} \approx 0,8556.$$

Razmotrima tačnu vrednost $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,8862\ldots$, a takođe i grešku $R = I - \overline{I} = 0,0006 = 6,10^{-4}$. Vidimo da dobijena tačnost prevazilazi zadatu. ►

376. Naći približnu dužinu elipse, čije su poluose $a = 10$ i $b = 6$.

◄ Pošto su $x = 10\cos t$, $y = 6\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ parametrske jednačine elipse to je njena dužina data sa

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{100\cos^2 t + 36\sin^2 t}dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{17 + 8\cos 2x}dx.$$

Primenom Simpsonove formule deleći segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ na 6 jednakih delova

$(h = \frac{\pi}{12})$ i izračunavanjem vrednosti podintegralne funkcije u tačkama ih : $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

$$\begin{aligned} y_0 &= 5,\ y_6 = 3,\ y_1 = \sqrt{17 + 4\sqrt{3}} \approx \sqrt{23,928} \approx 4,892; \\ y_2 &= \sqrt{17+4} = \sqrt{21} \approx 4,583,\ y_3 = \sqrt{17} \approx 4,124 \\ y_4 &= \sqrt{17-4} = \sqrt{13} \approx 3,606; y_5 = \sqrt{17 - 4\sqrt{3}} \approx \sqrt{10,072} \approx 3,173; \\ y_0 + y_6 &= 8;\ 4(y_1 + y_3 + y_5) \approx 48,756;\ 2(y_2 + y_4) \approx 16,378, \end{aligned}$$

dobijamo:

$$L \approx \frac{2\pi}{9}(8 + 48,756 + 16,378) = \frac{6,283 \cdot 73,134}{9} \approx 51,047. \ ▶$$

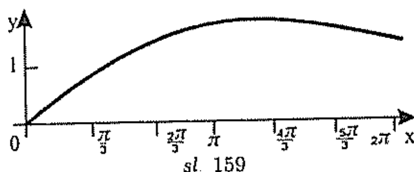
377. Nacrtati grafik funkcije $y = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ $(0 \le x \le 2\pi)$ na osnovu tačaka uzimajući $\Delta x = \frac{\pi}{3}$.

◀ Uzimimo mrežu $\omega_h = \{x_i = i\frac{\pi}{3},\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i izračunajmo vrednost funkcije $y(x)$ u njenim čvorovima:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0;\ y_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt;\ y_2 = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt;\ y_3 = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ y_4 &= \int\limits_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt;\ y_5 = \int\limits_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt;\ y_6 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Zadatak se svodi na približno izračunavanje šest integrala.

U tom cilju uzmimo na $[0, 2\pi]$ mrežu $\overline{\omega}_h = \{x_i = i\frac{\pi}{12};\ i = 0, 1, 2, \dots, 24\}$; očigledno svi čvorovi mreže ω_h pripadaju mreži $\overline{\omega}_h$. Svih šest integrala ćemo izračunati po Simpsonovoj formuli.



sl. 159

Nalazeći vrednost funkcije diskretnog argumenta $\overline{y}_i = \frac{\sin x_i}{i}$ u čvorovima mreže $\overline{\omega}_h$, dobijamo

$$\overline{y}_0 = \lim_{i \to 0} \frac{\sin x_i}{i} = \lim_{i \to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{12} i}{i} = \frac{\pi}{12} \approx 0,2618;\ \overline{y}_1 \approx 0,2590;\ \overline{y}_2 \approx 0,25;$$

$$\begin{aligned}
\overline{y}_3 &\approx 0,2359;\ \overline{y}_4 \approx 0,2165;\ \overline{y}_5 \approx 0,1932;\ \overline{y}_6 \approx 0,1666;\ \overline{y}_7 \approx 0,1380;\\
\overline{y}_8 &\approx 0,1083;\ \overline{y}_9 \approx 0,0785;\ \overline{y}_{10} \approx 0,05;\ \overline{y}_{11} \approx 0,0235;\ \overline{y}_{12} = 0;\\
\overline{y}_{13} &\approx -01999;\ \overline{y}_{14} \approx -0,0357;\ \overline{y}_{15} \approx -0,0471;\ \overline{y}_{16} \approx -0,0541;\\
\overline{y}_{17} &\approx -0,0568; \overline{y}_{18} \approx -0,0555;\ \overline{y}_{19} \approx -0,0508;\ \overline{y}_{20} \approx -0,0433;\\
\overline{y}_{21} &\approx -0,0336;\ \overline{y}_{22} \approx -0,0227;\ \overline{y}_{23} \approx -0,0112;\ \overline{y}_{24} = 0.
\end{aligned}$$

Očigledno,

$$\begin{aligned}
y_1 &\approx \frac{1}{3}\left(\overline{y}_0 + \overline{y}_4 + 4\left(\overline{y}_1 + \overline{y}_3\right) + 2\overline{y}_2\right) = \frac{2,9579}{3} \approx 0,9859;\\
y_2 &\approx \frac{1}{3}\left(\overline{y}_0 + \overline{y}_8 + 4\sum_{k=1}^{4}\overline{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{3}\overline{y}_{2k}\right) = \frac{4,9407}{3} \approx 1,6469;\\
\overline{y}_3 &\approx \frac{1}{3}\left(\overline{y}_0 + \overline{y}_{12} + 4\sum_{k=1}^{6}\overline{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{5}\overline{y}_{2k}\right) = \frac{5,5570}{3} \approx 1,8523;\\
y_4 &\approx \frac{1}{3}\left(\overline{y}_0 + \overline{y}_{16} + 4\sum_{k=1}^{8}\overline{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{7}\overline{y}_{2k}\right) = \frac{5,1635}{3} \approx 1,7211;\\
y_5 &\approx \frac{1}{3}\left(\overline{y}_0 + \overline{y}_{20} + 4\sum_{k=1}^{10}\overline{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{9}\overline{y}_{2k}\right) = \frac{4,5247}{3} = 1,5082;\\
y_6 &\approx \frac{1}{3}\left(\overline{y}_0 + \overline{y}_{24} + 4\sum_{k=1}^{12}\overline{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{11}\overline{y}_{2k}\right) = \frac{4,2568}{3} \approx 1,4189.
\end{aligned}$$

Za $x \in]0,\pi[$ $y'(x) > 0$, a za $x \in]\pi, 2\pi[$ $y'(x) < 0$; $y''(x) < 0$ za $x \in \left]0, \frac{4}{3}\pi\right[$ a $y''(x) > 0$ za $x \in \left]\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right[$. Na taj način, $y(x)$ raste na intervalu $]0,\pi[$ a opada na $]\pi, 2\pi[$. Grafik funkcije je konveksan na intervalu $\left]\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right[$ a konkavan na $\left]0, \frac{4}{3}\pi\right[$. Grafik je nacrtan na (**sl.159**). ▶

4.12 Zadaci za samostalni rad

1. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, gde je $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Uputstvo: $S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

2. Neka je $0 < \xi < 1$ i neka funkcija f na segmentu $[0,\xi]$ raste, a na $[\xi, 1]$ opada; neka je $M = f(\xi)$ njen apsolutni maksimum na $[0,1]$. Dokazati, da je

$$-\frac{M - f(0)}{n} \leq \Delta_n \leq \frac{M - f(1)}{n},$$

gde je

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

3. Neka je f funkcija ograničene varijacije na $[0,1]$. Pokazati da za Δ_n iz prethodnog zadatka važi ocena $|\Delta_n| \le \frac{V}{n}$, gde je V potpuna varijacija funkcije f na segmentu $[0,1]$.

Napomena. Po definiciji je $V = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|\right\}$, gde se supremum uzima po svim segmentima dobijenim podelom segmenta $[0,1]$.

4. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na $[a,b]$ a f'' integrabilna na tom segmentu. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\,\Delta_n'$, gde je

$$\Delta_n' = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{b-a}{2n}\right).$$

5. Neka f zadovoljava uslove zadatka 4. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\,\Delta_n''$, gde je

$$\Delta_n'' = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2n+1}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n} f\left(a + 2k\frac{b-a}{2n+1}\right)\right).$$

6. Neka je funkcija $f(x) > 0$ integrabilna na segmentu $[a,b]$; označimo $f_{kn} = f(a + k\delta_n)$, $\delta_n = \frac{b-a}{n}$. Dokazati:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_{kn} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}} = e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{kn}}} = \frac{b-a}{\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}}.$$

Izračunati integrale:

7. $\displaystyle\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$. **8.** $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^6}}$. **9.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

10. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$. **11.** $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^4 dx$.

12. Rešiti jednačinu $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$.

13. Rešiti jednačinu $\int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \frac{\pi}{6}$.

14. Naći apsolutne ekstremume funkcije

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}dt$$

na segmentu $[-1,1]$.

15. Odrediti ekstremume i prevojne tačke funkcije

$$y = \int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2 dt.$$

16. Dokazati jednakost:

$$\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt = \frac{\pi}{4}.$$

17. Dokazati, da ako je f neprekidna funkcija i ako je $f(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, tada je $f(x) \equiv 0$.

18. Znajući da je poredak rasta pozitivne funkcije $f(x)$ kad $x \to +\infty$ viši, jednak ili niži u poređenju sa x^m, dokazati da funkcija $\int\limits_0^x f(t)dt$ ima odgovarajući poredak rasta u poređenju sa x^{m+1}.

19. Uporediti poredak rasta integrala $\int\limits_a^x f(t)dt$ kad $x \to +\infty$ sa funkcijom $f(x)$ u sledećim slučajevima:

a) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; b) e^x; c) xe^{x^2}; d) $\ln x$.

20. Dokazati da je $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$.

21. Za neprekidnu funkciju $f(x)$ se zna da je neparna na segmentu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i da ima period T. Dokazati, da je $\int\limits_0^x f(t)dt$ takođe periodična funkcija sa istim periodom.

22. Izračunati srednju vrednost funkcije $f(x) = \frac{2}{e^x+1}$ na segmentu $[0, 2]$.

23. Za koje a je srednja vrednost funkcije $y = \ln x$ na segmentu $[1, a]$ jednaka srednjoj brzini promene funkcije na tom segmentu?

24. Pokazati da je $\frac{\pi}{6} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{4-x^2-x^3} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

25. Pokazati da je $0,5 < \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6}$ $(n \geq 1)$.

26. Pokazati da je $0,78 < \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0,93$.

Uputstvo: Za gornju granicu primeniti nejednakost Koši-Bunjakovskog.

27. Dokazati jednakost: $\int\limits_{100}^{200} \frac{x^3 dx}{x^4+x+1} = \ln 2 - \frac{\theta}{3 \cdot 10^6}$, $0 < \theta < 1$.

28. Dokazati jednakost $\int\limits_{100}^{200} \sin \pi x^2 dx = \frac{\theta}{200\pi}$, $|\theta| < 1$.

29. Dokazati jednakost $\int\limits_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x} dx = \frac{0,005}{\pi} + \frac{2\theta}{\pi^3 \cdot 10^6}$, $|\theta| < 1$.

Ispitati konvergenciju sledećih integrala:

30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$. **31.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2 \sin^2 x}$. **32.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$.

33. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha (x+2)}{x+1} dx$. **34.** $\int\limits_0^{\pi} \ln \sin x dx$. **35.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{x} dx$.

36. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^n}$. **37.** $\int\limits_0^{+\infty} x^x e^{-x^n} dx$. **38.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} dx$.

39. Dokazati, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 n^2 x^{n-1}(1-x) dx \neq \int\limits_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x^{n-1}(1-x)\right) dx$.

40. Dokazati, da ako integral $\int\limits_0^{+\infty} f(x) dx$ konvergira apsolutno, to je

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x) |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(x) dx.$$

41. Dokazati, da je

$$\lim_{\alpha\to+0} \alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t) dt = \lim_{t\to+\infty} f(t),$$

pretpostavljajući da integral na levoj strani i limes na desnoj postoje.

42. Dokazati jednakost:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

43. Dokazati da nesvojstveni integral

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 \left(\pi \left(x + \frac{1}{x}\right)\right) dx$$

divergira.

44. Naći površinu konačnog dela figure, ograničene krivom

$$x^2y^2 = 4(x-1)$$

i pravom, koja prolazi kroz njenu prevojnu tačku.

45. Izračunati površinu krivolinijskog trapeza, ograničenog krivom

$$y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2,$$

osom Ox i dvema pravama, paralelnim osi Oy, koje prolaze kroz tačke ekstremuma funkcije $y = y(x)$.

46. Naći površinu figure ograničene apscisnom osom i graficima funkcija $y = \arcsin x$ i $y = \arccos x$.

47. Naći površinu figure ograničene kardioidom:

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t, \; y = 2a\sin t - a\sin 2t.$$

48. Naći površinu petlje krive $x = 3t^2$, $y = 3t - t^2$.

49. Naći površinu figure ograničene unutrašnjim i spoljašnjim delom krive $\rho = a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

50. Izračunati površinu zajedničkog dela figure koju ograničavaju krive

$$\rho = 3 + \cos 4\varphi \text{ i } \rho = 2 - \cos 4\varphi.$$

51. Odrediti površinu petlje krive $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$ kao i površinu figure ograničene krivom i njenom asimptotom.

52. Naći dužinu luka polukubne parabole $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ koji se nalazi unutra parabole $y^2 = \frac{x}{3}$.

53. Naći dužinu krive $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

54. Odrediti dužinu luka traktrise

$$x = a\left(\cos t + \ln\tan\frac{t}{2}\right), \ y = a\sin t$$

od tačke $(0, a)$ do njene tačke (x, y).

55. Naći dužinu krive $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

56. Dokazati da je dužina krive

$$\rho = a\sin^m\frac{\varphi}{m} \ (m \in \mathbb{Z})$$

srazmerna sa a ako je m paran, i da je srazmerna sa dužinom kružnice poluprečnika a ako je m neparan $(m \neq 0)$.

57. Naći zapreminu tela ograničenog sa površi dobijene rotacijom traktrise

$$x = a\left(\cos t + \ln\tan\frac{t}{2}\right), \ y = a\sin t$$

oko njene asimptote.

58. Naći zapreminu tela ograničenog paraboloidom $z = x^2 + 2y^2$ i elipsoidom $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

59. Naći površinu rotacione površi, koja se dobija rotacijom petlje krive $9ay^2 = x(3a - x)^2$ oko apscisne ose.

60. Beskonačni luk krive $y = e^{-x}$, koji odgovara nenegativnoj vrednosti x, rotira oko ose Ox. Naći površinu tako dobijenog tela.

61. Homogena pravougaona ploča stranica a i b podeljena je na dva dela lukom parabole, čije se teme poklapa sa jednim temenom pravougaonika i prolazi kroz naspramno teme. Naći težišta oba dela pravougaonika.

62. Naći koordinate težišta homogene figure, ograničene koordinatnim osama i krivom $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

63. Naći statički moment homogene figure, koja je ograničena krivama $y = \frac{2}{1+x^2}$ i $y = x^2$, u odnosu na osu Ox.

64. Odrediti koordinate težišta homogene figure ograničene krivom $y^2 = ax^3 - x^4$.

65. Dokazati da su apscisa i ordinata težišta homogenog isečka ograničenog sa dva polarna radijusa i krivom $\rho = \rho(\varphi)$ date sa

$$\xi = \frac{2}{3}\cdot\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\cos\varphi d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi}; \ \eta = \frac{2}{3}\cdot\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\sin\varphi d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi}.$$

66. Naći Dekartove koordinate težišta homogene figure ograničene desnom petljom Bernulijeve lemniskate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

67. Dokazati da se Dekartove koordinate težišta luka homogene krive koja je data jednačinom $\rho = \rho(\varphi)$ u polarnim koordinatama, nalaze po formulama:

$$\xi = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi}; \quad \eta = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi}.$$

68. Odrediti Dekartove koordinate težišta luka logaritamske spirale $\rho = ae^{\varphi}$ (od tačke $\frac{\pi}{2}$ do tačke π).

69. Naći moment inercije bočne površi konusa (poluprečnik osnove R, visina H) u odnosu na njegovu osu simetrije.

70. Krivolinijski trapez ograničen krivama $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$ rotira redom oko ose Ox tj. oko ose Oy. Odrediti moment inercije tako dobijenog tela u odnosu na osu rotacije

71. Kvadrat rotira oko ose koja pripada njegovoj ravni i sadrži jedno teme. Odrediti položaj ose tako da zapremina tela bude maksimalna. Dati odgovor na isto pitanje ali za trougao.

72. Poluprečnici osnova prave kružne zarubljene kupe su R i r, visina h i gutina μ. Kolika je sila kojom ona dejstvuje na materijalnu tačku mase m, smeštene u vrhu kupe?

73. Kolikom silom izlomljena materijalna linija $y = |x| + 1$ privlači materijalnu tačku mase m, linearne gustine μ koja se nalazi u koordinatnom početku?

74. Kapljica početne mase M pada pod dejstvom sile teže i ravnomerno isparava, gubeći svake sekunde masu jednaku m. Koliki je rad sile teže za vreme od početka kretanja do potpunog isparenja kapljice (otpor vazduha se prenepregava).

75. Trougaona ploča osnove $a = 0,4m$. i visine $h = 0,3m$. okreće se oko svoje osnove konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 5\pi \sec^{-1}$. Naći kinetičku energiju ploče, ako je njena debljina $d = 0,002m$. a gustina materijala ploče je $\mu = 2200kg/m^3$.

76. Ploča u obliku trougla potopljena je vertikalno u vodu, tako da njena osnova pripada površini (horizontu) vode. Osnova ploče je a, visina h.

a) Izračunati silu pritiska vode na svaku od strana ploče.

b) Koliko se puta poveća pritisak, ako okrenemo ploču tako, da na

površini vode bude vrh, a da osnova bude paralelna površini (horizontu) vode.

77. Pravugaona ploča stranica a i b ($a > b$) potopljena je u tečnost pod uglom α u odnosu na površinu tečnosti. Veća strana je paralelna površini tečnosti na dubini h. Izračunati pritisak tečnosti na svaku od strana ploče, ako je specifična težina tečnosti d.

78. Pri dnu kotla, oblika polukugle poluprečnika $R = 43cm$, napravljen je otvor površine $S = 0,2cm^2$. Posle koliko vremena će se kotao pun vode isprazniti?

79. Dva kg. soli rastvara se u $30l$, vode. Za 5 min. rastvori se $1kg$, soli. Za koje vreme će se rastvoriti 99% početne količine soli (brzina rastvaranja proporcionalna je količini nerastvorene soli i razlici između koncentracija zasićenih rastvora, koja je jednaka $1kg$ na $3l$, i koncentaracije rastvora u datom momentu)?

80. Izračunati $\ln 10 = \int_1^{10} \frac{dx}{x}$, koristeći pravilo Simpsona za $n = 10$. Naći modul prelaza od prirodnog na dekadni logaritam.Uporediti sa tabličnim vrednostima.

4.13 Rezultati

1. $\ln 2$. **4.** $\frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a))$. **5.** $\frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) + 2f'(a))$. **7.** $3 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{48}$. **9.** $\frac{\pi}{6}$. **10.** $4 - \pi$. **11.** $\frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$. **12.** $x = 2$. **13.** $2\ln 2$. **14.** $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(1) \approx 1,66$; $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0,11$. **15.** $y_{\min} = y(1) = -\frac{17}{12}$; prevojne tačke su: $\left(2, -\frac{4}{3}\right); \left(\frac{4}{3}, -\frac{112}{81}\right)$. **19.**a) višeg; b) istog; c) nižeg; d) višeg. **22.** $2 + \ln\frac{2}{e^2+1}$. **23.** za $a = e$. **30.** konvergira. **31.** divergira. **32.**divergira. **33.**divergira. **34.**konvergira. **35.** divergira.**36.** divergira. **37.** konvergira apsolutno za $n > 1$; za $n \le 1$ divergira. **38.** konvergira. **41.**$8\left(\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} - \arctan\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$. **45.**$\frac{3}{e}(e^3 - 4)$. **46.** $\sqrt{2} - 1$. **47.** $6\pi a^2$. **48.** $\frac{72\sqrt{3}}{5}$. **49.** $\frac{a^2(5\pi+18\sqrt{3})}{32}$. **50.**$\frac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$. **51.** $2 - \frac{\pi}{2}; 2 + \frac{\pi}{2}$. **52.** $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right)$. **53.** 2. **54.** $a\ln\frac{a}{y}$. **55.** $\frac{4(a^2+ab+b^2)}{a+b}$. **57.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **58.**$V_1 = \pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6} - \frac{11}{3}\right)$; $V_2 = \pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6} + \frac{11}{3}\right)$. **50.** $3\pi a^2$. **60.** $\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$. **61.**$\left(\frac{3a}{5}, \frac{3b}{8}\right); \left(\frac{3a}{10}, \frac{3b}{4}\right)$. **62.** $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$. **63.** $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{5}$. **64.** $\left(\frac{5}{8}a, 0\right)$. **66.** $\left(\frac{\pi\sqrt{2a}}{8}, 0\right)$. **68.** $\left(-\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}, \frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}\right)$. **69.** $\frac{1}{2}MR^2$, gde je

M masa bočne površi konusa. **70.** $I_x = \frac{\pi(e^4-1)}{8}$; $I_y = 4\pi(3-e)$. **71.** Osa rotacije mora biti normalna na dijagonalu kvadrata; osa rotacije mora biti normalna na težišnu liniju trougla. **72.** $2\pi\gamma mh\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\right)$, gde je γ gravitaciona konstanta. **73.** $2\gamma m\pi$. **74.** $\frac{g^2M^3}{6m^2}$. **75.** $\frac{ah^3d\omega^2\mu}{24} \approx 0,4905J$. **76.** a) $\frac{ah^2}{6}$, b) dva puta. **77.** $abd\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right)$. **78.** $\approx 1 čas 6\min 53\sec$. **79.** $\approx 37,3\min$. **80.** $\ln 10 \approx 2,31$; $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,433$.